



CURSO DE ASTRONOMIA GERAL

IOTA



MEDIDAS

CURSO DE ASTRONOMIA GERAL

versão iota – outubro de 2012

volume II : medidas

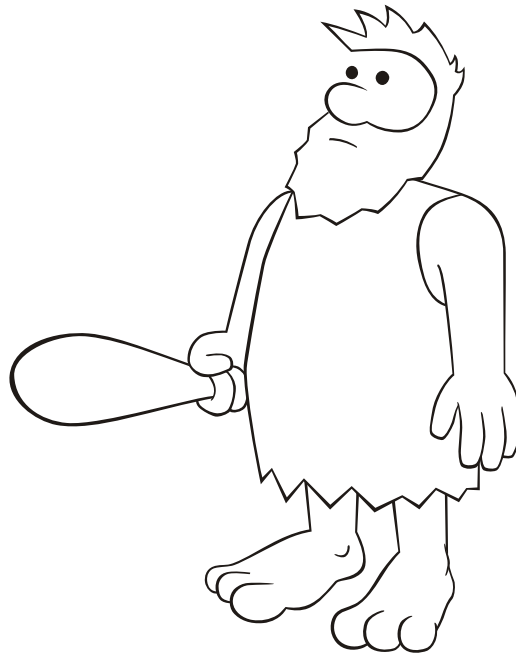
escrito por:

Bruno L' Astorina

Felipe Augusto C. Pereira

Gustavo Amarante Furtado

Julio Campagnolo



Charge-Coupled Device

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

Todos os volumes desta obra são licenciados como Creative Commons (CC BY-SA 3.0). Isso significa que você é livre para copiar, distribuir, transmitir ou adaptar este trabalho, desde que citada a fonte (Curso de Astronomia Geral do CCD-OBA) e que qualquer trabalho derivado deste seja liberado com a mesma licença.

Sumário

I	Concepções Teóricas	8
1	Números	10
1.1	Ordem de Grandeza	10
1.2	Algarismos Significativos	12
1.3	Notação Científica	13
2	Dimensões	15
2.1	Dimensão de grandezas	16
2.2	Dimensão de equações	19
3	Unidades	21
3.1	Grandezas tipo T	22
3.2	Grandezas tipo L	23
3.3	Grandezas tipo M	23
3.4	Outras grandezas	23
3.5	Tabela de Múltiplos e Submúltiplos	25
4	Estatística	26
4.1	Números de Resumo	27
4.1.1	Valores Médios	27
4.1.2	Valores de Desvio	31
4.1.3	Outros Valores	33
4.2	Normalização	33
4.3	Distribuições	34
5	Incertezas	38
5.1	Incertezas Estimadas	39
5.1.1	Propagação de Erros	39
5.2	Incertezas Estatísticas	40
6	Gráficos	44
6.1	Barras	44
6.2	Pizza	46
6.3	Dispersão	46
II	Medidas	50
7	Medidas de Brilho	52
7.1	Luminosidade e Fluxo	52
7.2	Sistema de Magnitudes	55

7.3	Magnitude Absoluta	58
8	Medidas de Distância	61
8.1	Medidas na Terra	61
8.2	Paralaxe no Espaço	62
8.3	Outras Paralaxes	64
8.3.1	Paralaxe Espectroscópica	65
8.3.2	Paralaxe Dinâmica	65
8.3.3	Paralaxe Rotacional	65
8.4	Velas Padrão	65
8.4.1	Cefeidas	66
8.4.2	RR Lyrae	66
8.4.3	Supernovas Ia	66
III	Telescópios	68
9	O Telescópio	71
10	Óptica	79
11	Montagens	84
12	Atmosfera	90
12.1	Refração	90
12.2	Seeing	92
12.3	Extinção	93
13	Telescópios Atuais	95
13.1	Grandes Telescópios na Terra	95
13.2	Telescópios Espaciais	96
IV	Apêndices	99
A	Experimentos	101
A.1	Acuidade Visual	101
A.2	Tempo de Reação	103
A.3	Declinação Magnética	105
A.4	Constante Solar	106
B	Análise de Dados	107
B.1	Céu	108
B.1.1	Refração (IAO 2005)	108
B.1.2	Shenzou-6 (IAO 2005)	109
B.1.3	Coordenadas Galácticas (IAO 2004)	110
B.1.4	Objetos do Sistema Solar (IOAA 2007)	111
B.2	Mecânica	119
B.2.1	Medindo a velocidade da luz (IAO 2003)	119
B.2.2	Sistema planetário (IOAA 2008)	120
B.2.3	Rádio-pulsar binário (IAO 2006)	121
B.2.4	Vênus (IOAA 2009)	122
B.2.5	Elementos Orbitais de NEAs (IOAA 2008)	123

B.2.6	NGC 1325 (IAO 2006)	126
B.3	Astrofísica	127
B.3.1	Supernova Ia (IAO 2007)	127
B.3.2	Velocidade Radial de Cefeidas (IAO 2007)	128
B.3.3	Cefeidas (IOAA 2012)	129
B.3.4	Nebulosa Planetária (IAO 2005)	131
B.3.5	Análise de mínimos (IOAA 2011)	132
B.3.6	Determinação de massas estelares em uma binária visual (IOAA 2008) . . .	133
B.3.7	Curvas de Luz Estelares (IOAA 2010)	134
B.3.8	Trânsito Planetário (IOAA 2008)	136
B.3.9	Idade de um Meteorito (IOAA 2008)	138
B.3.10	Fotometria de Asteróides (IOAA 2012)	140
B.4	Cosmologia	142
B.4.1	Aglomerado de Virgem (IOAA 2008)	142
B.5	Instrumentos	143
B.5.1	Antenas do GRMT (IAO 2006)	143
B.5.2	Monitoramento de uma Estrela (IAO 2006)	145
B.5.3	Imagem de CCD (IOAA 2009)	146
B.5.4	Imagem de CCD (IOAA 2010)	149
B.5.5	Medindo a Massa de Saturno (IAO 2003)	153
B.5.6	Pesando uma Galáxia (IOAA 2011)	155
C	Dados	157
C.1	Dados do Sistema Solar	157
C.1.1	Sol	157
C.1.2	Planetas Terrestres	157
C.1.3	Planetas Jovianos	158
C.1.4	Lua	158
C.2	Constantes Físicas	158
C.3	Unidades-Padrão da Astronomia	159
C.3.1	de Distância	159
C.3.2	de Tempo	159

Prefácio

Desviar-se do caminho batido talvez não seja uma grande metodologia, mas cria a possibilidade de se apreciar alguns pontos de vista incomuns, que podem ser os mais reveladores.

Robert Darnton, *O Grande Massacre de Gatos*

Estas são as apostilas do Curso de Astronomia Geral do CCD-OBA, versão 1. Nosso objetivo principal, com o curso, é enriquecer a *formação* dos seus participantes. Por “*formação*”, referimo-nos a um processo que é, em sua essência, individual e único, composto amplamente pelo conjunto de experiências vividas por alguém. Citando Hans-Georg Gadamer, “Não é casual que a palavra *formação* se pareça, neste aspecto, ao grego *physis*. Como a natureza, a *formação* não conhece objetivos que lhe sejam exteriores.”

Isso quer dizer que a postura que procuraremos desenvolver se fundamenta na *autonomia intelectual*: cada indivíduo é senhor sobre a *formação* de seu próprio conhecimento. Tudo o que podemos fazer, enquanto organizadores do curso, é dar incentivo, buscando fornecer uma visão mais ampla a partir de nossas próprias experiências.

Convidamos para este curso pessoas que têm grande vontade de saber, esperamos fornecer conhecimento até elas saciarem essa vontade e, então, perceberem que ter aprendido aquilo tudo não faz sentido se, de alguma forma, não for passado adiante. Com isso o processo se retroalimenta, individual e coletivamente. Individual porque sempre aprendemos muito quando alguém nos ensina, mas aprendemos ainda mais quando nós ensinamos alguém, quando fazemos o esforço de pôr nosso conhecimento em frases organizadas e compreensíveis. Coletivamente porque os que aprenderem conosco agora estarão ensinando depois, como nós. Essa é precisamente a origem da CCD: ex-alunos da olimpíada que aprenderam muito, sozinhos e com a ajuda de livros, professores e astrônomos, e acabaram decidindo que precisavam escrever e organizar cursos com tudo o que sabiam. Dentre os autores desta versão 1 do Curso, há nomes de pessoas que, um ano atrás, eram alunos felizes e curiosos pelo que viria a seguir.

Nesse contexto, a Astronomia, por mais encantadora e atraente que seja para a maioria de nós, não é pensada como um fim em si próprio, mas como um lugar de articulação de saberes. Mostramos, ao longo das apostilas, o quanto a astronomia tem a ver com o desenvolvimento da física, da química e da matemática; mas, mais do que isso, quais são suas relações com a história, a filosofia, as religiões, as diferentes expressões artísticas e, enfim, com as diferentes visões de mundo que surgiram aqui e ali ao longo das histórias humanas. Em suma, não queremos Astronomia pela Astronomia, mas Astronomia por Tudo!

Assim, pretendemos desenvolver uma visão melhor e mais completa do mundo natural e, através disso, do mundo humano também. Fazemos isso, em particular, buscando desenvolver as seguintes habilidades/características individuais:

- Articulação lógica e formal (que tem a ver com a LINGUAGEM)
- Capacidade de abstrair e imaginar (relacionado ao PENSAMENTO)

- Cultura Experimental (característica da CIÊNCIA)
- Reflexão crítica sobre o conhecimento (papel da FILOSOFIA)
- Contemplação estética (o que chamamos de ARTE)

O material está dividido em cinco volumes, na ordem em que os assuntos pareceram mais naturais para nós. O Volume I, *Céu*, discute tudo o que pode ser observado. Discute também algumas interpretações, míticas, poéticas e teóricas, sobre as observações. Toda a matemática desenvolvida nele, portanto, está ligada à geometria dos céus, a Geometria Esférica. Talvez seja o volume com conteúdo mais diferente do que normalmente é visto no colégio. O Volume II, *Medidas*, está mais ligado à idéia e à prática dos experimentos; sua introdução a como tratar dados experimentais é uma introdução à abordagem algébrica que virá nos volumes seguintes. Além disso, ele procura desenvolver uma intuição sobre as técnicas e medição e os instrumentos (em particular os telescópios) necessários para se desenvolver qualquer outro instrumento astronômico. O Volume III, *Mecânica*, é o primeiro que trata de física. Ele introduz a mecânica aprendida no colégio, mas com as intuições nascidas da nossa própria experiência. Discute também a física no contexto da mudança da visão sobre o universo nos séculos XVI e XVII, que culmina com o nascimento da Mecânica Celeste. Discute, finalmente, a construção da própria Mecânica Celeste, com uma abordagem geométrica (que é clássica mas também incomum nos estudos de física de hoje em dia) e procurando criar uma boa intuição sobre movimentos livres em campos gravitacionais. O Volume IV, *Astrofísica*, também fala de física, mas de um caráter bem diferente: da constituição material do mundo, do caráter da luz e das interações atômicas. Nesse sentido, é um volume bastante ligado à química. Ele culmina com o estudo detalhado, dos pontos de vista teórico, experimental e observacional, de alguns objetos de interesse astronômico, passando por estrelas e sua evolução, mas também por aglomerados, galáxias e asteróides. Por fim, o Volume V, *Universo*, trata principalmente de Cosmologia, ou seja, da discussão sobre o universo como um todo. Como não poderia deixar de ser, ele alterna entre discussões filosóficas e matemáticas densas, pontuadas por alguns *insights* poéticos. Na segunda parte, há dois capítulos discutindo sobre a situação atual da pesquisa em astronomia no Brasil – o que é especialmente interessante para quem tem alguma pretensão de estudar ciência na universidade.

Além dessas apostilas, enviaremos outros materiais, como referências e algumas atividades práticas ao longo do curso. Incentivamos que as façam, de forma a complementar o conteúdo das apostilas. Aplicaremos também uma ou duas provas para selecionar os estudantes para a *International Olympiad on Astronomy and Astrophysics* (IOAA) e para a *Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica* (OLAA). Além disso, esperamos engajar os participantes em algumas práticas, ligadas à noção de responsabilidade intelectual discutida acima: ensinar colegas, em discussões de grupo, aulas preparatórias para a próxima OBA ou aulas motivadoras em colégios de baixa renda; observar o céu com outros, em clubes de astronomia amadora e em *star parties*; envolver-se em projetos de pesquisa, junto a astrônomos amadores, professores universitários ou membros do CCD; integrar-se, por fim, ao nosso próprio grupo.

A primeira olimpíada internacional de astronomia foi fundada em 1996; é dois anos mais antiga, portanto, que a sua versão brasileira. Desde a fundação da OBA, há o compromisso de enviar times anualmente à olimpíada internacional – pelo qual sempre foi necessário fazer uma seleção justa e eficiente para montar as equipes. Este curso nasceu dessa necessidade: precisávamos, afinal, fornecer bases de conhecimento necessária aos que tivessem as habilidades e os interesses necessários. Nossos objetivos, contudo, já ultrapassaram em muito os objetivos da seleção. É o que esperamos que fique claro ao longo das páginas que se seguem.

Sobre este Volume

Enquanto o Volume 1 ensinou a observar o céu, este Volume 2, Medidas, pretende ensinar a observar mais sistematicamente, obter dados e tratar esses dados. Ele deve ser uma transição entre a observação inocente e a abordagem matemática. Este volume contém muitas referências aos outros quatro; quando esbarrar nelas durante a leitura, você tem duas opções: (i) parar e ler rapidamente sobre o tema em outro volume ou (ii) pular a referência e continuar a leitura.

A Unidade 1 trata das concepções teóricas necessárias à realização de experimentos. Trataremos de ordens de grandeza, Algarismos significativos, dimensões físicas e suas unidades, além de introduzir a noção de incerteza de experimentos e conceitos básicos de estatística.

A Unidade 2, por outro lado, dialoga com os Volumes 1 e 4. Ela aborda, primeiro, maneiras de quantificar o brilho das estrelas, complementando a observação do céu mas também introduzindo as técnicas fotométricas da astrofísica. Depois, aborda formas de medir distâncias às estrelas, expandindo a Esfera Celeste em um objeto 3D.

A Unidade 3, focada em instrumentação, aborda todos os aspectos sobre telescópios e sua relação com a atmosfera. Os capítulos de Óptica e de Atmosfera possuem uma abordagem física e matemática mais refinada; talvez seja melhor deixar para lê-los junto com o Volume IV. Os demais capítulos da unidade não possuem esse problema.

Por fim, os apêndices contém uma pequena lista de experimentos sugeridos, além de uma tabela de dados que será útil para resolver problemas e exercícios.

Unidade I

Concepções Teóricas

Capítulo 1

Números

A primeira coisa a aprender quando lidamos com quantidades é escrever adequadamente com os números. Como algumas vezes lidamos com números extremamente grandes ou pequenos, a forma decimal comum torna-se especialmente inconveniente. Parece desagradável, por exemplo, multiplicar a constante da gravitação universal $G = 0,0000000000667 \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$ pela massa da Terra $M_T = 5970000000000000000000 \text{ kg}$, mesmo com uma calculadora. Quem gosta de números com muitos zeros já deve ter tido problemas, digitando em excesso ou perdendo zeros pelo caminho; de fato, esse é o jeito mais fácil de errar uma conta.

1.1 Ordem de Grandeza

A ideia disso é que nem sempre precisamos conhecer o valor preciso de determinada medida; muitas vezes, basta sabermos a ordem de grandeza. Nós usamos um medidor parecido na nossa linguagem cotidiana. Por exemplo, se me perguntassem:

- Quantos alunos assistiram sua aula ontem?
- Ah, muitos.

Eu poderia ter respondido “nenhum”, ou “poucos” ou “uma quantidade estupidamente grande”; o que importa não é saber quantos exatamente haviam, mas uma idéia qualitativa da quantidade. Meu interlocutor, entretanto, poderia ficar insatisfeito e exigir uma resposta mais precisa:

- Mas muitos quanto?
- Ah, uma meia dúzia.

Aqui eu poderia ter respondido “uns trinta”, “uns cinquenta” ou “uns cem”. Novamente, eu não estou dizendo que haviam 37 alunos na sala (mesmo porque eu provavelmente não teria contado), já que não importa para o meu interlocutor se foram 37 ou 39; importa apenas ter uma idéia da quantidade.

Na linguagem científica, existe um padrão para expressar a noção de certas quantidades, chamada ORDEM DE GRANDEZA. Ela é definida como a potência de dez que melhor aproxima a quantidade que eu quero expressar. Assim, a distância do Rio a São Paulo é da ordem dos 100 km, ou 10^2 km, ou 10^5 m. Já Belém é uma ordem de grandeza mais distante; dista da ordem de 10^3 km.¹ No Capítulo 8 discutimos melhor ordens de grandeza de distâncias. Falando em

¹Se você não está satisfeito e quer distâncias mais precisas, a distância linear entre o centro do Rio e o de São Paulo é de 357 km e entre os centros do Rio e de Belém é 2435 km

medidas de massas, podemos dizer que a massa dos planetas terrestres é da ordem de 10^{24} kg, enquanto que a dos gigantes gasosos é da ordem de 10^{26} kg e a do Sol, 10^{30} kg.

Se você não está acostumado a escrever em potências de dez, acostume-se: a partir de agora, isso será usado em quase todos os valores que você escrever. Basta notar que 10^B com $B \geq 0$ é igual a 1 seguido de B zeros. Já se B é um número negativo, 10^B é da forma 0,00...01 onde o 1 fica -B casas depois da vírgula; por exemplo, 10^{-3} é igual a 0,001 ou $1/10^3$.

Uma grande vantagem no uso de ordens de grandeza é que realizar operações com elas é fácil. Existem algumas regras, possivelmente familiares a todos:

Regra de Adição e Subtração

Quando se trata de ordem de grandeza, podemos desprezar ordens de grandeza menores. Assim, $10^7 + 10^4$ é da ordem de 10^7 , já que $10000000 + 10000 = 10001000$.

Para deixar mais claro, retomemos o último exemplo. Do Rio de Janeiro ao *Mare Humorum*, na Lua, trata-se de algo da ordem dos 100.000 km, ou 10^5 km, três ordens de grandeza maior que a distância Rio - Belém. Mas e quanto à distância do Rio ao *Mare Frigoris*, que é bem distante do *Mare Humorum*, na Lua? Alguém diria “é a mesma coisa!”, o que poderíamos parafrasear como “É a mesma ordem de grandeza!, pois a distância entre os dois mares é muitas ordens de grandeza menor que a distância da Terra à Lua”.

Regra de Multiplicação (adição de expoentes)

Vamos usar exemplos de números que foram reescritos usando notação em potência de dez. Seja, por exemplo, a multiplicação $3,4 \cdot 10^7 \times 2,1 \cdot 10^3$.

Para explicitar a conta, note que os dois fatores podem ser reescritos como $(3,4 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10) \times (2,1 \times 10 \times 10 \times 10)$. Como é um produto, a ordem dos fatores não altera o resultado; logo, reorganizando de forma a colocar os 10s juntos, reescrevemos como $(3,4 \times 2,1) \times (\times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10)$. Repare que o total de 10s é igual à soma dos expoentes, afinal um dos fatores contribuiu com sete 10s (10^7) e o outro com três 10s (10^3). Podemos simplificar então para: $(3,4 \times 2,1) \times 10^{10}$.

A parte dentro dos parênteses é bem simples de fazer: $(3,4 \times 2,1) \times 10^{10} = 7,14 \times 10^{10}$. Corrigindo o número de casas para a precisão que temos (ver próxima seção) fica $7,14 \times 10^{10}$. Como regra geral, podemos então dizer que

$$A \cdot 10^x \times B \cdot 10^y = A \times B \times 10^x \times 10^y = AB \cdot 10^{x+y}$$

Regra de Divisão (subtração de expoentes)

Repetamos o exemplo anterior, mas com divisão: $3,4 \cdot 10^7 \div 2,1 \cdot 10^3$

Podemos reescrever na forma $\frac{3,4 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{2,1 \times 10 \times 10 \times 10}$. Se cancelarmos os 10s ficaremos com $\frac{3,4 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{2,1}$. O número de 10s no numerador é igual à diferença dos expoentes. Dos sete 10s, três foram cancelados, sobrando apenas quatro. Ainda podemos reorganizar da forma $\frac{3,4}{2,1} \times 10^4$. Isso nos leva a um resultado de $1,6 \times 10^4$, já corrigidas as casas decimais. Podemos dizer então que

$$A \cdot 10^x \div B \cdot 10^y = \frac{A}{B} \cdot 10^{x-y}$$

- 1- Estime a quantidade de grãos de areia em uma praia.
- 2- Estime a proporção entre os tamanhos de
 - (a) uma pessoa e uma célula
 - (b) uma célula e uma molécula
 - (c) uma molécula e um átomo
- 3- Estime a proporção entre estrelas numa galáxia e galáxias no universo observável.

1.2 Algarismos Significativos

Vamos agora olhar a questão por outro ponto de vista: quão preciso um valor pode ser? Toda medida física tem uma precisão intrínseca, normalmente associada aos instrumentos utilizados; isso naturalmente limita o quão bem podemos conhecer qualquer valor. Por isso existe o conceito de ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS. Para ilustrar a ideia, vamos calcular o valor da aceleração gravitacional na superfície da Terra. Utilizaremos a fórmula:

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

Substituindo os valores:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$$

$$M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Obtemos um preciso valor de:

$$g = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6,0 \cdot 10^{24}}{(6,4 \cdot 10^6)^2} = 9,770507813 \text{ m/s}^2$$

Talvez você tenha reparado que nunca viu esse valor com tanta precisão antes (e talvez esteja um pouco diferente do que você está acostumado). Isso não se deve só ao fato de ser trabalhoso lidar com tantas casas decimais, mas também a uma *falsa* precisão do valor! Repare que informamos o valor de G com três algarismos, e o valor do raio com apenas dois. Repare ainda que colocamos o valor da massa da Terra como 6,0 e não somente 6 – certamente não sem motivo.

Apesar de as contas estarem aritmeticamente corretas, elas são experimentalmente ruins. Repare que o valor de G que informamos é $6,67 \cdot 10^{-11}$, o que pode corresponder tanto a 6,665 quanto 6,675. Calculando com o primeiro valor, obtemos $g = 9,76318359$; com o segundo, $g = 9,7783203$. Ou seja, esses algarismos são irrelevantes, não acrescentam nenhuma informação, podem ir para o lixo! Com o raio da Terra é ainda pior: ele pode ser qualquer valor entre 6,35 e 6,45 – apenas dois algarismos de certeza! Isso dá um valor de g entre 9,6196142 e 9,92497985!

Com esses dados, tudo o que podemos dizer é que g assume um valor entre 9,7 e 9,8 m/s^2 . Ou, expressando como uma regra, quando chegamos ao resultado, devemos informá-lo *com tanta precisão quanto o valor mais impreciso que usamos*. No nosso caso, a massa e o raio da Terra tinham apenas dois algarismos. Portanto, nossa resposta deverá ter apenas duas.

$$g = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6,0 \cdot 10^{24}}{(6,4 \cdot 10^6)^2} = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Agora a resposta foi escrita com dois algarismos significativos (o 9 e o 8), o que indica que o valor correto está entre 9,75 e 9,85. Da mesma forma, quando informamos a massa da Terra, indicamos que ela está entre $5,95 \cdot 10^{24}$ e $6,05 \cdot 10^{24}$.

Saber o número de algarismos significativos para números com casas decimais é bastante simples, basta contar quantos algarismos tem o número. Porém para números sem casa decimal pode ser mais complicado: quando saber se 100 indica algo entre 99,5 e 100,5 ou algo entre 95 e 105. Ou ainda 99,9995 e 100,0005? Para saber, às vezes temos que saber o contexto do número. Foi por isso que, no exemplo anterior, informamos a massa da Terra como 6,0 e não apenas 6.

Certos tipos de medidas apresentam precisões diferentes, devido à forma como são feitas as medidas. Alguns exemplos:

MASSAS DE ASTROS: dificilmente vão ter mais que 3 ou 4 algarismos significativos. Isso porque a própria constante gravitacional só foi determinada até 6,6742. Pode-se chegar até 5 casas ocasionalmente. Mesmo assim, muitos dados só contam com 2 casas, especialmente para astros fora do sistema solar.

COMPRIMENTOS DE ONDA: (por espectroscopia), em contraste, são medidos em laboratórios, com todas as condições controladas, o que facilita bastante o trabalho. Os valores chegam a 6 ou 7 algarismos. Em física quântica se lida com mais de 8 casas.

DISTÂNCIAS ASTRONÔMICAS: para estas, não teremos mais que 3 para fora do sistema solar, mas para dentro a determinação já é bastante precisa – para a Lua já temos precisão na casa do metro, o que dá 8 algarismos. Para os astros no nosso sistema, medimos distâncias com métodos de altíssima precisão, como feixes de radar. Para outras estrelas, contudo, vimos que o principal método é a paralaxe, que tem diversas possíveis fontes de erro – a começar pelo fato dos ângulos serem muito pequenos.

4- Indique entre que valores estão os números abaixo:

- (a) $7,2 \cdot 10^5$
- (b) $7,20 \cdot 10^5$
- (c) $7,0 \cdot 10^5$

5- Calcule (lembre-se de informar com precisão correta):

- (a) $5,25 \cdot 10^6 \times 4,3 \cdot 10^{-2}$
- (b) $6,37 + 2,400$

1.3 Notação Científica

Conjugando as ideias das duas seções anteriores, podemos finalmente usar uma forma mais prática de escrever números. Nos dados, exercícios, e na maioria dos lugares, a **NOTAÇÃO CIENTÍFICA** é a forma usual de expressar números. Ela une as idéias de ordem de grandeza e de algarismos significativos, consistindo em escrever os números na forma

$$A \cdot 10^B,$$

onde A é sempre um número entre 1 e 9 (pode ter casas decimais), e B é um número inteiro qualquer. B representa a *ordem de grandeza* da nossa variável, enquanto A são os *algarismos*

significativos. Assim, em vez de escrever a massa da Terra como 59700000000000000000000 kg, podemos reescrever o número, explicitando tanto sua ordem de grandeza quanto seus algarismos significativos: $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

6- Escreva os seguintes números em notação científica:

- (a) 1059640
- (b) 10596400
- (c) 5000000
- (d) 0,0000000735

7- Quantos quilômetros possui um ano-luz? (Informe com a precisão correta)

8- Usando a tabela de dados anexa, calcule o valor da aceleração gravitacional na superfície de Vênus.

9- Faça todos os exercícios das cinco apostilas usando notação científica e os algarismos significativos adequados.

Capítulo 2

Dimensões

Existe uma diferença fundamental entre uma equação matemática pura e simples e uma equação física: as equações físicas possuem DIMENSÕES (de energia, de força, etc). Isto é, elas correlacionam propriedades do mundo físico, construídas de tal forma que possam se articular harmoniosamente. Veremos a seguir, portanto, que estas propriedades e suas articulações tornam uma equação física não só completa mas, mais fundamentalmente, coerente.

Quando trafegamos pelo mundo, notamos imediatamente algumas de suas propriedades:

- As coisas têm extensão – e da mesma forma há extensões entre elas. Podemos então construir um conceito sobre esse fenômeno observável, que genericamente denominamos *comprimento* e utilizamos para caracterizar a extensibilidade dos objetos do mundo.
- Os fatos que podemos observar acontecem como causa ou consequência uns dos outros, ou pelo menos podemos ordená-los numa ordem de antecedência ou posterioridade. A uma tal ordenação chamamos genericamente de *tempo*.
- As coisas são palpáveis e demandam diferentes esforços para serem erguidas ou transportadas no espaço que existe entre elas. Logo, esbarramos em alguma misteriosa propriedade que, na física newtoniana, será separada em densidade, massa, peso, forças em geral.

Poderíamos ainda dizer: algumas vezes levamos choque (e inventamos o conceito de carga elétrica!) ou cruzamos com coisas que se atraem (e isolamos os fenômenos magnéticos). Ou simplesmente as vemos! Muito mais poderia ser dito sobre a forma como o mundo se nos apresenta, dos conceitos que criamos sobre ele, da forma como interagimos com ele.

As propriedades que a física discute são fatos materiais do mundo, associados uns aos outros, que escolhemos destacar. Nesse sentido, devemos compreender como estabelecemos inter-relações entre esses fatos. Tais propriedades são o que podemos depreender da concretude com a qual o mundo se nos apresenta. É claro que sempre será uma relação entre nós e o mundo, ou seja, conceitos que podemos criar a partir dos fatos do mundo.

Fazer física nada mais é do que ir ao mundo, investigar suas propriedades e estabelecer relações entre elas. Um exemplo é a Segunda Lei de Newton: de vários fatos observáveis, procuramos estabelecer uma relação (ideal) entre o esforço que empreendemos numa ação e a alteração de velocidade que ele produz. Notamos que essa relação se dá mediada, de alguma forma, pelo conteúdo material dos objetos. Com isso vemos que massa, força e alteração da velocidade no tempo (que podemos denominar genericamente de aceleração) estão intrinsecamente relacionadas. E a partir dessa relação intrínseca entre quantidades distintas, finalmente elaboramos algo que chamamos de *Lei*. Algumas leis podem ser bastante restritas a fenômenos locais. Outras podem ter a potencialidade de se tornarem genéricas, com abrangência quase universal, embasando sistemas explicativos inteiros. O próprio conjunto das três Leis de Newton, compreendidas em conjuntos,

perfaz um tal sistema explicativo abrangente.

A invenção do telescópio é um fato curioso na história da construção de nossa moderna visão de mundo (da ciência moderna). Ela teve como consequência a negação de que nossos sentidos naturais eram órgãos inteiramente confiáveis de compreensão da realidade. Os telescópios não só aproximavam as coisas mas, ao fazê-lo, revelavam coisas novas. Como confiar nos sentidos? Onde ancorar a nossa capacidade de julgar? Daí nasce uma linha de pensamento que ancora *na razão* a própria possibilidade de acreditar nos sentidos. O "penso, logo existo" de René Descartes não é outra coisa senão uma tentativa de resolução deste dilema (por uma via, digamos, um tanto radical). Durante algum tempo, os pensadores europeus se dividiam em duas linhas de pensamento: aqueles que davam prioridade absoluta à existência do mundo (EMPIRISTAS), e aqueles que viam, como Descartes, que a razão era a única âncora segura para o homem (RACIONALISTAS).¹

Alguns pensadores procuraram conciliar a disputa do parágrafo acima. Dentre eles, devemos destacar a contribuição de Immanuel Kant. Sobre essa questão, o filósofo diria o seguinte: toda experiência do mundo pressupõe uma extensão espacial na qual as coisas ocorrem, bem como pressupõe a passagem do tempo. Quando falamos "pressupõe", estamos falando de que existe algo inato em nós, humanos, que nos leva a interpretar as coisas deste modo; ou seja, espaço e tempo estão antes em nós, são conhecimentos *a priori*. Assim, só a partir dos conhecimentos *a priori*, dados racionalmente, é que o homem é capaz de investigar o mundo, conhecendo tudo o mais *a posteriori* através da experiência.

2.1 Dimensão de grandezas

Adicionemos às categorias kantianas o fato de que todos os corpos possuem uma constituição material, possuem massa. Assim, elegendo tais grandezas como fundamentais, dizemos que:

- AS GRANDEZAS ESPACIAIS (comprimentos, distâncias, deslocamentos) têm dimensão de extensão, e as representamos pela letra L.
- AS GRANDEZAS TEMPORAIS (períodos, intervalos de tempo) têm dimensão de tempo (representada pela letra T).
- AS MEDIDAS DE MASSA, de quantidade de matéria, têm sua dimensão representada pela letra M.

Ou, escrevendo em termos mais instrumentais, grandezas do tipo L são as que medimos com réguas, do tipo T são as que medimos com relógios, do tipo M são as que medimos com balanças. Note, entretanto, que grandezas de dimensão L só se somam com grandezas de dimensão L; as de dimensão T, só com outras de dimensão T... e uma grandeza de dimensão M não é intercambiável, comutável com uma de dimensão L, porque elas falam de características radicalmente diferentes do mundo. Assim, definimos como *dimensão física* de uma grandeza o recorte conceitual do concreto do mundo que aquela grandeza representa dentro de um sistema.

Dessas dimensões fundamentais, muitas outras podem ser derivadas. Por exemplo, as coisas não só têm extensão própria e extensão que as separa (distância). As distâncias entre corpos mudam. Assim, podemos organizar tais mudanças como relações de antecedência e posterioridade (variação temporal das distâncias). Essa é a mesma discussão que fizemos² sobre medir variações de posição por intervalos de tempo ($\Delta s/\Delta t$), com a qual construímos o conceito de VELOCIDADE. Vimos que medir velocidade é justamente medir o quanto um objeto se desloca em

¹Ver discussão sobre Descartes, racionalismo e empirismo no capítulo 5 do volume de Mecânica.

²Ver Apêndice B do Volume III.

cada unidade de tempo; é medir um deslocamento com réguas, e dividir isso pelo intervalo de tempo correspondente, medido em um relógio. Assim, dizemos que *as velocidades têm dimensão* L/T . Ou, formalizando um pouco,

$$\dim(v) = [v] = \frac{L}{T}$$

Da mesma forma, podemos nos perguntar sobre a variação temporal da velocidade ($\Delta v/\Delta t$), a ACELERAÇÃO. Prosseguindo em nossa formalização

$$\dim(v) = [a] = \frac{[v]}{T} = \frac{L}{T^2}$$

Daí podemos perceber uma coisa: derivamos a velocidade da combinação entre comprimento e tempo, e aceleração de nova combinação entre velocidade e tempo. Ou seja, como partimos das dimensões de comprimento e tempo, obtivemos as dimensões de velocidade e aceleração em termos destas duas. Acelerações, entretanto, aparecem de muitas formas diferentes; dizemos que *são* acelerações porque *têm dimensão de* aceleração. Por exemplo, a aceleração associada ao movimento circular (a_c) em termos da velocidade e do raio do movimento é v^2/R . Em termos de dimensão, temos

$$\dim(a_c) = \left[\frac{v^2}{R} \right] = \frac{L^2}{T^2} \frac{1}{L} = \frac{L}{T^2} = [a] = \dim(a)$$

Podemos ainda descrever outras grandezas combinando estas com a dimensão de massa, M . A idéia da completude aparece aqui; quase todas as grandezas físicas podem ser descritas a partir de L , T e M . Assim, QUANTIDADE DE MOVIMENTO, a quantidade de matéria que se move vezes a intensidade do movimento, tem dimensão

$$\dim(p) = [mv] = M \frac{L}{T}$$

Só com estas relações, já podemos perceber a utilidade desta forma de abordagem da física. Avancemos. Da segunda Lei de Newton, temos que a dimensão de FORÇA é dada pelo produto da dimensão de massa pela de aceleração

$$\dim(F) = [m][a] = M \frac{L}{T^2}$$

Mas podemos ver a força também como a variação temporal da quantidade de movimento de um corpo, ou seja

$$\dim(F) = \frac{[p]}{T} = \frac{M}{T} [v] = M \frac{L}{T^2}$$

Ou ainda, a famosa força-peso – o produto da massa de um corpo pela aceleração da gravidade na proximidade da superfície terrestre – tem, evidentemente, a dimensão de força:

$$\dim(F_g) = M[g] = M \frac{L}{T^2}$$

Outra dimensão básica é a de ENERGIA, que aparece em muitas situações e de formas distintas. Vimos, por exemplo, a energia potencial de um corpo a partir da superfície terrestre, mgh , ou seja, o produto da massa do corpo em questão pela aceleração da gravidade na proximidade da superfície terrestre pela distância a um ponto tomado como origem. Isso resulta em

$$\dim(E) = M [g] [h] = M \frac{L}{T^2} L = \frac{ML^2}{T^2}$$

Evidentemente, quando falamos de energia num sistema cujas dimensões fundamentais sejam comprimento, tempo e massa, sempre estaremos falando da quantidade dimensional $\frac{ML^2}{T^2}$. Deste modo, temos energia cinética,

$$\dim(E_{cin}) = \left[\frac{1}{2}mv^2 \right] = \left[\frac{1}{2} \right] M [v]^2 = 1 \times M \frac{L^2}{T^2} = \frac{ML^2}{T^2}$$

e, claro, só poderíamos encontrar esta dimensão. Perceba que, neste caso, tivemos que lidar com a questão da dimensionalidade de um número puro - no caso, a do fator multiplicativo $1/2$. E verificamos que *números puros não têm dimensão!*, ou, dizendo de outra forma, são *adimensionais*. Como a representação de dimensões físicas é feita com produtos de dimensões básicas, representamos algo sem dimensão pelo elemento neutro da multiplicação: o número 1.

Como último exemplo da dimensão de energia, temos a famosa relação de que o trabalho de uma força tem a mesma dimensão de energia. Mas o trabalho de uma força é exatamente a consideração de uma dada força associada a uma distância (em geral linear) percorrida pelo objeto enquanto ela era nele aplicada. Assim, temos (denotando o trabalho por W)

$$\dim(W) = [F] [\Delta S] = M \frac{L}{T^2} L = \frac{ML^2}{T^2}$$

Chamamos grandezas físicas das quais podemos deduzir outras de **GRANDEZAS FUNDAMENTAIS**, enquanto as construídas a partir das fundamentais são chamadas **GRANDEZAS DERIVADAS**. Para formarmos um sistema de grandezas, devemos eleger um conjunto de grandezas que chamaremos fundamentais, a partir das quais todas as demais possam ser definidas. E isso de uma única forma. Não podemos ter duas definições dimensionais para velocidade, por exemplo. Dizemos que as grandezas fundamentais formam uma *base de grandezas*³. Esta exigência de que uma grandeza só possa ser definida de uma forma é o que torna o sistema de grandezas coerente. Ressalteemos: as grandezas tomadas como base são eleitas, não são intrinsecamente fundamentais. Assim, várias bases podem ser formadas, como veremos ao fim do capítulo. Claro que cada base, cada sistema, foi construído devido a uma certa concepção da física ou, simplesmente, à sua melhor aplicabilidade em um dado contexto.

- 10- Você, já minimamente familiarizado com as discussões astronômicas, conhece uma unidade de medida de distâncias cuja base dimensional é a velocidade (de um ente físico particular) e tempo:

- (a) Qual é esta medida?
- (b) Por que ela é uma unidade interessante para os astrônomos?

³Podemos provar, então, que precisamos sempre de *três* grandezas fundamentais para descrever todas as grandezas mecânicas. É a mesma idéia da discussão de bases de cores, no capítulo "Cores" do Volume IV.

2.2 Dimensão de equações

Reforcemos um outro aspecto que já mencionamos: a representação dimensional se faz por um produto de dimensões. Não faz nenhum sentido somar grandezas espaciais com grandezas temporais, por exemplo. Grandezas de um certo tipo só podem ser comparadas a outras grandezas com a mesma dimensão. Só podemos somar ou subtrair força com força, energia com energia, aceleração com aceleração e assim por diante. Daí tiramos nosso princípio central, o PRINCÍPIO DA HOMOGENEIDADE DIMENSIONAL:

Toda equação física deve ser dimensionalmente homogênea.

Não importa quantos termos uma equação física tenha. Não importa quantos termos ela combine. Todos os termos precisam ter a mesma dimensão. Este é o significado do Princípio. Tomemos o exemplo simples de um sistema físico com N corpos submetidos ao campo gravitacional terrestre e emitindo luz uns para os outros. Parece um sistema muito complicado de analisar, mas podemos dizer bastante olhando para sua energia. Sabemos que, se for um sistema isolado, as trocas entre os parâmetros são tais que a energia se conserva.

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i=1}^N \frac{GM_T m_i}{r_i} + \sum_{j=1}^M h\nu_j = \text{constante}$$

em que todos os termos têm dimensão de energia. Outro exemplo: o da força gravitacional. Conhecemos a forma dela; ela depende do produto das massas que estão interagindo e do inverso do quadrado da distância entre elas. Mas o produto das massas, dividido pelo quadrado da dimensão de distância (ou seja, a dimensão M^2/L^2), não fornece sozinho a dimensão de força (que vimos ser ML/T^2). Mas sabemos que a força gravitacional é dada, na verdade, por

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$$

Isso só pode significar uma coisa: a constante G , além de fazer o ajuste numérico, faz também o ajuste dimensional! Deste modo

$$\dim(G) = \frac{\dim(F_G)}{\dim\left(\frac{m_1 m_2}{R^2}\right)} = \frac{ML}{T^2} \frac{L^2}{M^2} = \frac{L^3}{T^2 M}$$

Vamos nos deter no resultado acima por um instante, para contemplarmos as possibilidades conceituais da análise dimensional. Obtivemos

$$\dim(G) = \frac{L^3}{T^2 M} = \frac{L^3}{T^2} \frac{1}{M} = \frac{[K]}{M}$$

onde K é a constante da Terceira Lei de Kepler. Um desafio discutido no Volume III é o de tentar obter a relação da Terceira lei de Kepler a partir da Gravitação Newtoniana. Eis que ela nos aparece de imediato na expressão acima. De fato, K é exatamente a proporção entre cubos dos semi-eixos maiores e quadrados dos períodos das órbitas planetárias. Sabemos ainda que a constante da terceira lei de Kepler só é válida no âmbito de um dado sistema gravitacional: se pegarmos períodos e semi-eixos maiores das órbitas dos planetas, encontraremos um valor (numérico) para K ; se pegarmos o sistema Júpiter e seus satélites, obteremos outro valor numérico para K ; se considerarmos ainda o sistema Terra-Lua e os satélites artificiais que já colocamos em órbita, obteremos um terceiro valor. Mas o que diferencia fundamentalmente o Sol, Júpiter, a Terra, e qualquer outro planeta? Sua massa! Deste modo, vemos, através da análise da dimensão da constante G , o porque de sua universalidade - e, portanto, da universalidade da gravitação universal de Newton. Ao considerar todas as características físicas de um sistema gravitacional, a relação newtoniana se torna independente de um sistema específico, ou seja, válida para qualquer

sistema físico. Na verdade, a constante kepleriana K de um sistema específico e a constante da gravitação universal G são as grandes "balanças" astronômicas. Se hoje sabemos a massa do Sol, da Terra, de Júpiter é porque conseguimos medir G independentemente, e sabemos as constantes keplerianas específicas dos sistemas que tem o Sol, Júpiter, a Terra e assim por diante como seus corpos principais.

- 11- Verifique, utilizando tempo e comprimento como grandezas fundamentais, a homogeneidade dimensional da expressão:

$$d = d_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$$

onde d é a distância final que um corpo percorre, dada em função de uma distância inicial d_0 , uma velocidade inicial v , submetido a uma aceleração a , transcorrido um tempo t .

- 12- Utilizando como grandezas fundamentais M , L e T , verifique a homogeneidade dimensional de todas as expressões do Volume 2, Unidade 1.
- 13- Num sistema cujas dimensões fundamentais são força, comprimento e tempo, escreva as expressões dimensionais para massa, quantidade de movimento e energia.
- 14- No sistema da questão acima, qual seria o enunciado da Lei da Gravitação Universal?
- 15- Num sistema em que as dimensões fundamentais são velocidade, tempo e força, dê as dimensões da expressão da primeira questão. Refaça as duas últimas questões. Qual é a expressão da aceleração centrípeta? E sua dimensão?
- 16- Utilizando a noção de que uma equação física é homogênea dimensionalmente, estime uma relação para o período de um pêndulo dado em função de seu comprimento e da aceleração da gravidade.

Capítulo 3

Unidades

Vimos, no capítulo anterior, que a física fala das propriedades físicas do mundo (redundante assim mesmo): tempos, comprimentos, massas, etc. Mas como quantificar, como medir estas coisas? Ora, usando as próprias quantidades que se quer medir! Assim, comparamos comprimentos com comprimentos, tempos com tempos, massas com massas! E disto é que nasce a idéia de utilizar uma dada quantidade como princípio de contagem de quantidades de igual natureza. Hoje utilizamos, por exemplo, *centi-metros*, *metros*, *kilo-metros* para contar distâncias (aqui na Terra). Mas você já deve ter ouvido falar em contagens em *pés*, *braças* ou mesmo uns “*dedinhos*” para encher um copo! O que significa isto? Que tomamos alguma quantidade conhecida como padrão de contagem. Como estabelecemos que uma dada quantidade é o padrão, a partir do qual contamos, a chamamos de unidade. Ou seja, uma unidade de um sistema de contagem, de uma dada quantidade física, é uma grandeza física de mesma natureza de que aquela que desejamos contar, que foi tomada como padrão. Assim, por exemplo, quando dizemos que uma coisa pesa 3 kg, queremos dizer que seu peso é três vezes maior que o peso do objeto padrão do quilograma; três vezes um quilograma.

O caminho pelo qual a física constrói o seu uso da matemática é a efetuação de medidas numéricas, a partir do uso de um sistema de unidades. Mas estes sistemas de unidades têm dois vieses: Primeiro, eles devem ser adequados às grandezas em discussão. Em Astronomia isto é bastante claro: se estivermos discutindo escalas do Sistema Solar, em particular das distâncias dos planetas ao Sol, nada melhor do que nos basearmos na distância Terra-Sol, a Unidade Astronômica (UA). Para distâncias nas escalas da vizinhança Solar, usamos o ano-luz, o parsec, e assim por diante. Se estivermos discutindo especificamente escalas atômicas, podemos utilizar o *ångström* ($\text{\AA}$), o “raio” de um átomo de Hidrogênio típico. Se quisermos discutir unificadamente as escalas atômicas e astronômicas, podemos utilizar potências de dez do metro...

O segundo viés é exatamente o contraponto do primeiro: o fato de podermos utilizar diversas unidades para uma dada grandeza física. Este fato nos revela que o fundamental não são as unidades na qual a estamos mensurando, mas as grandezas físicas em si, aquelas propriedades do mundo material sobre as quais empreendemos um sistema descritivo articulado. E quando falamos em sistema, estamos falando em articulação, como veremos a seguir. Você já deve estar imaginando onde queremos chegar. É isto aí: os sistemas de unidades baseiam-se nos sistemas de dimensões. E o segundo passo disto: cada sistema dimensional permite que se crie uma variedade enorme de unidades, cada uma delas adequada a um conjunto de discussões físicas.

Já estabelecidas as grandezas e as dimensões (que nós tomamos como) fundamentais, precisamos fazer uma discussão sobre as unidades usadas para medir cada grandeza. Já falamos sobre a necessidade de adequação das unidades às escalas, e como, numa certa escala, suas escolhas são bastante arbitrárias. Portanto, como era de se esperar, cada país, cada região, sempre teve suas próprias unidades. A idéia de unificação dos sistemas de medidas veio, é claro, do Ilumi-

nismo francês, com seu ideal de universalidade¹. Ainda durante o reinado de Luis XVI, criou-se, na França, um comitê para escolher aquelas que deveriam ser as unidades-padrão; esse comitê reunia personagens tão ilustres quanto Lavoisier. Com a Revolução Francesa, a idéia ganhou ainda mais força; até o Calendário Gregoriano foi abandonado, em prol de um calendário mais racional²!!

Foi nessa reforma revolucionária que se criou o METRO (do grego *métron*, medida) como unidade-padrão francesa de distâncias; ele foi definido como:

Um metro equivale a $\frac{1}{10.000.000}$ da distância do Equador ao Pólo Norte, medido no meridiano de Paris.

Além disso, podia-se usar múltiplos e submúltiplos decimais do metro, que podem ser vistos na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Múltiplos e submúltiplos do metro.

kilômetro	1 km = 1000 m
hectômetro	1 hm = 100 m
decametro	1 dam = 10 m
decímetro	1 dm = $\frac{1}{10}$ m
centímetro	1 cm = $\frac{1}{100}$ m
milímetro	1 mm = $\frac{1}{1.000}$ m

Bastante racional, não? (Compare isso com os pés e braços dos ingleses :S). Assim nasceu o SISTEMA MÉTRICO DECIMAL. Depois de muitos conflitos políticos, realizou-se em 1875 a Convenção do Metro³: um tratado entre países para firmar o sistema métrico como um Sistema Internacional de Unidades (SI). Originalmente, 17 países assinaram o Tratado (O Brasil se manteve neutro, e só assinou o tratado em 1921); hoje, são 51 países signatários.

Vamos ver especificamente como se desenvolveu o padrão métrico de cada grandeza:

3.1 Grandezas tipo T

Para medidas de tempo, o problema de unificação nunca foi muito grande; os próprios fenômenos astronômicos, quase todos periódicos, fornecem uma base natural de medidas. Assim, desde a Idade Média que se parte o *dia solar* em 24 horas; cada hora em 60 minutos; cada minuto em 60 segundos. Assim, a Convenção do Metro definiu, como unidade-padrão de tempo do Sistema Internacional, o SEGUNDO (s), como $\frac{1}{86.400}$ do dia solar médio.

Devido às irregularidades da rotação da Terra, a definição foi mudada em 1956 para $\frac{1}{31.556.925,9747}$ do ano trópico de 1900. Contudo, essa era uma medida muito abstrata, que não podia ser reproduzida. Depois que se percebeu a extraordinária regularidade dos fenômenos subatômicos, a medida de base astronômica perdeu a vez. Desde 1967, a definição oficial de segundo é:

Um segundo equivale a 9.192.631.770 transições de níveis hiperfinos do Césio-133 (¹³³Cs), a partir de seu estado fundamental, à temperatura de 0 K.

¹A idéia era que a razão seria algo universal, acima de línguas, culturas e Estados; algo que unificasse todos os homens. O governo instaurado com a Revolução Francesa tinha justamente essas aspirações a um governo universal, racionalmente organizado.

²Para o calendário da Revolução Francesa, ver Wikipedia.

³O Tratado do Metro criou três organizações para manter o metro como padrão, a saber: A Conferência Geral de Pesos e Medidas (em francês, Conférence Générale des Poids et Mesures –CGPM) – encontro de periodicidade entre quatro e seis anos, com delegados de todos os estados membros; o Escritório Internacional de Pesos e Medidas (Bureau International des Poids et Mesures –BIPM), um centro de metrologia (a “ciência das medidas”) com sede da cidade de Sèvres, França; e o Comitê Internacional de Pesos e Medidas, que se reúne anualmente no BIPM.

3.2 Grandezas tipo L

O METRO (m) foi um grande vitorioso da unificação, desbancando as medidas inglesas: a polegada perdeu para o milímetro; o pé, para o centímetro; a jarda, para o metro; a milha, para o quilômetro⁴. Contudo, medir a partir de um meridiano também era algo pouco preciso, de forma que, em 1889, definiu-se o metro-padrão como a distância entre duas marcas feitas em uma barra de platina e irídio! A barra, que então se tornou o objeto definidor do metro, passou a ficar guardada no BIPM, em Sèvres.

Contudo, a onda atômica também atingiu as medidas de comprimento, e em 1960, o metro foi definido como 1.650.763,73 comprimentos de onda no vácuo da radiação característica do Kriptônio-86 (⁸⁶Kr). Mas a medida de segundo era tão, tão precisa, que acabou se criando uma tendência (que ainda está em vigor hoje) de definir todas as unidades em função do segundo. Agora uma pergunta de Análise Dimensional: como se define uma grandeza espacial a partir de uma temporal? Usando uma velocidade (L/T)! E, como sabemos, a velocidade da luz é a única velocidade absoluta do universo! Então, desde 1983, a definição se tornou

Um metro é a distância percorrida pela luz em $\frac{1}{c} = \frac{1}{299.792.458}$ segundo.

3.3 Grandezas tipo M

O Sistema Métrico francês também tinha uma medida decimal de massa: o grama, e seus múltiplos: quilograma, centigrama, miligrama... Contudo, a CGPM definiu, em 1889, o quilograma (kg), e não o grama, como unidade padrão, definida como a massa de uma barra de platina e irídio. Mas como medidas que envolvem massas são bem menos simples que as de comprimento e tempo, essa é a medida que vigora até hoje.

3.4 Outras grandezas

Com essas três definições fundamentais, podemos definir qualquer outra grandeza. Por exemplo, a unidade Padrão de medida de áreas [L²] é o metro quadrado (m²); de volumes, o metro cúbico (m³). De velocidade, metro por segundo (m/s); de aceleração, metro por segundo ao quadrado (m/s²).

Para essas unidades mais simples, tudo bem; mas então a unidade de energia é *quilograma vezes metro quadrado por segundo quadrado*?? Para isso, o SI tem nomes especiais para certas combinações especiais de unidades, que sejam especialmente relevantes:

- Para força, usa-se o NEWTON (N), de forma que $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$;
- Para energia, o JOULE (J), com $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$;
- Para potência (taxa de variação da energia), temos o WATT (W), com $1 \text{ W} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$;
- Para frequência (1/T), usa-se o HERTZ (Hz), e $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

Oficialmente, o Sistema Internacional adota sete unidades fundamentais: além do segundo, do metro e do quilograma, ele adota também o AMPÉRE (A) como unidade de corrente elétrica; o MOL como unidade de quantidade de matéria (que é diferente de massa); a CANDELA (cd), para intensidade luminosa, e o KELVIN (K) para temperatura. Não falamos antes do ampère porque não vamos tratar diretamente de fenômenos eletromagnéticos, ao longo dos Capítulos; quanto as outras três unidades, elas existem mais por razões históricas (e práticas) do que físicas.

⁴ 1 pol = 25 mm; 1 yd (yard) = 0,9144 m; 1ft (foot) = 30,48 cm; 1 mile = 1,609 km.

Se você for pensar bem, temperatura é apenas uma medida do grau de agitação das moléculas – mais especificamente, da energia cinética média delas⁵. O mol é basicamente uma medida da quantidade de átomos de um corpo; e desde que conhecemos a idéia atômica, podemos escrevê-lo em função da massa dos átomos. Entretanto, ainda é um conceito muito usado na química. A candela foi, há muito, muito tempo (desde que se pensa na luz como uma forma de propagação de energia), substituído pelo Watt; hoje em dia, praticamente ninguém mais usa essa unidade.

Do ponto de vista prático, a vantagem de usar sempre as unidades de um mesmo sistema é sempre saber a unidade que vai sair. Não importa quantas contas você faça no meio do caminho; se o resultado tem dimensão de força, e todas as suas unidades estavam no padrão do SI, ela necessariamente sairá escrita em Newton.

Uma última observação a se fazer é sobre as unidades “compostas”. Já falamos mais de uma vez do ANO-LUZ, uma medida espacial baseada em uma unidade de tempo e uma de velocidade. Uma unidade de força importante é o QUILOGRAMA-FORÇA (kgf): o peso exercido por uma massa de um quilograma. Há também uma de energia, composta de potência e tempo, que aparece todo mês no boleto da conta de luz: o KILOWATT-HORA (kWh)

- 17- Mostre que $1 \text{ kgf} = 9,8 \text{ N}$.
- 18- Dê uma mãozinha para o CGPM, e sugira uma definição de quilograma que seja em função da medida do segundo.
- 19- Existem algumas grandezas que não são suficientemente descritas apenas com as três dimensões M, L e T. O mundo das interações eletromagnéticas, por exemplo, necessita de pelo menos mais uma unidade: o SI adota como fundamental a unidade de corrente elétrica, o Ampère (A). Mas ora, corrente elétrica é um fluxo de cargas por uma certa região, ou seja, o quanto de carga passa em um certo lugar por intervalo de tempo:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Assim, em termos das grandezas L, T, M e I (corrente elétrica), escreva a dimensão da carga elétrica. Escreva também a dimensão da força eletromagnética.

- 20- Estime quanta energia uma lâmpada do seu quarto consome ao longo de um mês, em kWh. Se você tiver acesso à conta de luz de sua casa, verifique que fração da energia consumida pela casa se deve à sua lâmpada. Faça o mesmo com outros aparelhos domésticos.

⁵Entretanto, a escala Kelvin tem algo especial, pois foi construída para ser uma escala absoluta de temperaturas: 0 K corresponde ao mínimo possível de temperatura; é o estado (inatingível) em que as moléculas estariam completamente “paradas”. Voltaremos a essa questão em Capítulos posteriores.

3.5 Tabela de Múltiplos e Submúltiplos

Como dissemos, o SI adota múltiplos e submúltiplos das unidades-padrão, para medidas em outras escalas. Elas aparecem como prefixos nos nomes das unidades. Por exemplo, um milijoule é $1 \text{ mJ} = 10^{-2} \text{ J}$. Os prefixos e símbolos oficiais podem ser vistos na tabela 3.2

Tabela 3.2: Lista de múltiplos e submúltiplos.

prefixo	símbolo	escala	exemplos
yotta	Y	10^{24}	Volume da Terra $\sim 1 \text{ YL}$
zetta	Z	10^{21}	Raio da Via Láctea $\sim 1 \text{ Zm}$
exa	E	10^{18}	Idade do Universo $\sim 0.4 \text{ Es}$
peta	P	10^{15}	Os dinossauros se extinguíram $\sim 2 \text{ Ps}$ atrás
tera	T	10^{12}	Distância Sol-Júpiter $\sim 0,8 \text{ Tm}$
giga	G	10^9	HD do seu computador $\sim 40 \text{ Gbytes}$
mega	M	10^6	Tamanho dessa apostila $\sim 5,7 \text{ Mbytes}$
kilo	K	10^3	Peso de um saco de feijão $\sim 1 \text{ kg}$
hecto	H	10^2	Peso de um prato de almoço $\sim 5 \text{ hg}$
deca	da	10	Largura de uma rua $\sim 1,3 \text{ dam}$
-	-	1	Sua altura $\sim 1,7 \text{ m}$
deci	d	10^{-1}	Volume de uma latinha de refrigerante $\sim 5 \text{ dl}$
centi	c	10^{-2}	Espaço entre dois tracinhos de uma régua $\sim 1 \text{ cm}$
mili	m	10^{-3}	Tempo de reação de um neurônio $\sim 1 \text{ ms}$
micro	μ	10^{-6}	Comprimento de onda da luz visível $\sim 0,5 \mu\text{m}$
nano	n	10^{-9}	Raio de um átomo $\sim 0,5 \text{ nm}$
pico	p	10^{-12}	Massa de uma célula bacteriana $\sim 1 \text{ pg}$
femto	f	10^{-15}	Raio de um próton $\sim 1 \text{ fm}$
atto	a	10^{-18}	Tempo para a luz cruzar um átomo $\sim 1 \text{ as}$
zepto	z	10^{-21}	600 moléculas $\sim 1 \text{ zmol}$
yocto	y	10^{-24}	Massa de um próton $\sim 1,7 \text{ yg}$

Capítulo 4

Estatística

Uma das dificuldades de estudar ciências experimentais é que os experimentos são sistemáticos, isto é, repetidos várias e várias vezes com pequenas mudanças em um ou outro parâmetro. Isso faz com que, tipicamente, o resultado de um experimento seja uma enorme tabela de dados – que não é fácil de se interpretar a partir das teorias. Precisamos construir meios para extrair informações mais significativas das imensas massas de dados. É disso que trata a estatística.

A primeira afirmação importante é: uma tabela é composta de dados. Dados podem ser CATEGÓRICOS (que expressam categorias) ou NUMÉRICOS (que são geralmente *medidas* no sentido físico da palavra). Um exemplo de dado categórico é o sexo de uma pessoa, que pode ser de duas categorias, M ou F. Exemplos de dados numéricos são o peso e a altura de uma pessoa, ou a temperatura e o brilho de estrelas. Veja, por exemplo, a tabela do Catálogo Messier, no final do Volume 1. As três primeiras colunas são os nomes das variáveis (no Messier, no NGC e no vocabulário comum) e então começam as colunas de dados. As duas primeiras, *Tipo* e *Constelação*, são variáveis categóricas: elas expressam categorias nas quais as nebulosas foram divididas e agrupadas.

Essa distinção é importante pois diz como podemos interpretar os dados. No Catálogo Messier, por exemplo, podemos nos perguntar qual o tipo mais comum de nebulosa, ou qual constelação possui mais objetos. Mas não podemos fazer uma média dos tipos de nebulosa, como podemos fazer uma média das suas distâncias ou magnitudes.

Existem ainda alguns dados que podem nos enganar. Por exemplo, os tamanhos de camiseta para uma lista de pessoas. Eles são divididos em categorias, certo? Por exemplo P, M e G. Mas são categorias ordinais, que são *como se* fossem uma reta numérica. Isso por que, na verdade, elas expressam uma grandeza que bem que poderia ser numérica, mas tratamos como categórica. Isso acontece bastante em campeonatos esportivos, em que a idade dos participantes – que é uma variável numérica – é dividida em categorias (p. ex. junior, normal, senior e master). Usando um exemplo mais astronômico, o mesmo vale quando dividimos as estrelas em *classes de luminosidade*, em vez de medirmos o fluxo luminoso de cada uma.

Também é comum, pelo outro lado, termos variáveis numéricas que se parecem com categorias. Por exemplo, o número de filhos de um casal. Existem poucos grupos em que isso pode se encaixar: 0, 1, 2, 3... Mas de fato trata-se de uma variável numérica porque podemos, por exemplo, fazer médias: Nós entendemos quando um jornal diz que a média de filhos em certa cidade é de 2,4 – por mais que nenhum casal específico possa ter 2,4 filhos. Mas não podemos fazer o mesmo com o tamanho das camisetas! Essas variáveis são chamadas de *numéricas discretas*, em contraposição às numéricas contínuas. Elas são parecidas com as variáveis categóricas ordinais e às vezes podemos trocar um tipo pelo outro. Mas não confunda-se. E a distinção não é o mero fato de haver numeros ou não: Se, numa tabela do sexo de pessoas, trocarmos M e F por 1 e 2,

nem por isso a variável passou a ser numérica; de fato, nem ordinal ela é.

Uma maneira muito prática de visualizar informações significantes em massas de dados é transforma-las em desenhos, os famosos gráficos. Dedicamos a eles o capítulo 6. Outra maneira, útil apenas para dados contínuos, são os números de resumo.

4.1 Números de Resumo

Os números de resumo são, como o próprio nome diz, números que, sozinhos, resumem as informações dadas pelos dados. É claro que não há como um número carregar *toda* a informação dos dados; mas alguns deles podem carregar informação suficiente para muitos propósitos.

4.1.1 Valores Médios

Média Aritmética

O número mais simples que pode fazer isso é a MÉDIA ARITMÉTICA. A interpretação para ela é bem simples: fazendo uma medida várias vezes, a média é uma boa estimativa para o valor “real” da grandeza medida. Ou, no caso de uma pesquisa, a média é (às vezes) uma boa estimativa para a opinião do grupo como um todo. Como exemplo, vejamos uma tabela de notas de uma turma do Clube de Caça às Doninhas (CCD), em uma prova de Taxidermia (Tabela 4.1).

Tabela 4.1: Notas da Prova de Taxidermia, em ordem de entrega.

NOME	NOTA
William O’Connell	10,0
Phillipe Lhunnan	8,7
Vinícius Grimmer	6,5
Felipe Niquelm	4,8
Rael Erkirion	4,4
Paul It’Mann	8,8
Cláudio Ohmara	5,1
Thomas Bleu	5,6
Carlos Lorem	9,7
Alce Barbuda	6,3
Orosimbo Maia	7,4
Agatha Köhler	8,5
June Clark	5,5
James Kathmandu	1,2
Protógenes	7,0
Racione Ragnar	5,6
Foca Bilota	0,2
Antonio D. Vagar	7,5
Adam Borda Bunda	5,3
Adelícia de Carvalho	6,6
Sansão Chazan	8,5
Gilberto Créa	4,1
Eu Matei um Nome	2,0
Airotiv A. D. Atlov	9,2

Temos o costume de pensar que, se a média das notas for um valor alto, então a turma foi bem na prova; se a média for baixa, a turma foi mal. Neste caso, a média foi 6,19, o que foi um valor bem médio. Essa média poderia ser calculada manualmente, na forma:

$$\frac{10 + 8,7 + 6,5 + \dots + 2,0 + 9,2}{24} = 6,19$$

Sua calculadora científica deve ter uma maneira esperta de fazer isso; consulte um manual ou alguém próximo. Além disso, você pode usar programas como Excel ou algum genérico, ou mesmo usar alguma linguagem de programação. No Excel, a função que calcula média aritmética chama-se MEDIA ou AVERAGE.

Mediana

Nem sempre, entretanto, a média é o valor mais expressivo para representar os dados. Imagine, por exemplo, que aplicamos uma prova de recuperação aos que tiveram nota abaixo de cinco. O resultado da segunda prova foi:

Tabela 4.2: Notas da Prova de Recuperação de Taxidermia.

NOME	NOTA 1	NOTA REC
Felipe Niquelm	4,8	4,7
Rael Erkirion	4,4	4,5
James Kathmandu	1,2	4,1
Foca Bilota	0,2	9,8
Gilberto Créa	4,1	3,8
Eu Matei um Nome	2,0	4,4

Calculando a média das notas na segunda prova, obtemos o valor de 5,22. Mas esse valor não é muito expressivo, porque apenas um aluno teve nota acima de 5! O problema aqui é que, embora quase todos os alunos tenham tido a mesma nota, a Foca Bilota foi absurdamente melhor na prova; isso puxou a média para um valor mais alto do que todas as outras notas. A média, sozinha, não diz nada sobre esse curioso comportamento da turma.

Aqui alguém pode argumentar que, se quisermos ter uma noção de uma nota “típica” desta prova, é só calcularmos a média sem a nota da Foca Bilota. Mas o fato é que só notamos a disparidade porque eram cinco provas e conseguimos olhar individualmente todos os dados. Mas peguemos um exemplo parecido: a renda média da população da sua cidade. É bastante provável que este valor seja muito mais alto que o salário da maior parte das pessoas. Conhecendo a população, você pode justificar dizendo que existem poucas pessoas na cidade, fazendeiros ou empresários, que têm uma renda muitas vezes maior que quase todos os outros; essas rendas muito altas puxam pra cima as rendas médias. Como fazer então: calcular a renda tirando os valores de renda muito altos? Neste caso, você não tem acesso aos valores de renda de todas as pessoas da cidade, e mesmo que tivesse, seria uma quantidade grande demais para olhar um por um!

Uma maneira simples de encontrar um valor típico, neste caso, é usando a MEDIANA, que é o valor “do meio”: o valor que tem tantos valores maiores quanto valores menores que ele. Em outras palavras: coloque todos os dados em ordem crescente (ou decrescente); se o número de dados for ímpar, a mediana é o dado central; se for par, é a média aritmética dos dois dados centrais. Ela também pode ser calculada automaticamente no Excel, com a função MEDIANA ou MEDIAN. Assim, na nossa prova de recuperação, a mediana foi 4,45 (a média das notas de Rael

Erkírión e de Eu Matei Um Nome); na primeira prova, a mediana foi 6,4, um pouco acima da média.

Embora tenha sido útil neste caso, a mediana possui uma grande deficiência. Como a mediana é apenas um dos dados escolhidos, ela não carrega nenhuma informação sobre os outros dados, além da simples informação de se os dados são maiores ou menores que ela. Na primeira prova, se todos que tiveram nota menor que 6 tivessem tido nota zero, a mediana ainda teria o mesmo valor, enquanto a média (e nossa noção intuitiva do comportamento da turma) cairia drasticamente. A média aritmética (e as demais médias) normalmente são uma operação matemática que inclui todos os dados – ou seja, seu valor muda com a mudança de qualquer dado.

Média Geométrica

Enquanto a média aritmética é, em geral, uma boa maneira de resumir valores que se combinam linearmente, é errado usá-la para proporções, porcentagens e coisas que se comportam exponencialmente. Para estas, usamos a MÉDIA GEOMÉTRICA. Para aqueles que não lembram, a média geométrica é uma média multiplicativa (em contraste com a média aritmética, que é aditiva); em outras palavras, dados valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, a média geométrica entre eles é

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

O nome da média provavelmente vem de sua interpretação geométrica simples: tomem um retângulo com lados a e b ; sua área (ab) é a mesma área de um quadrado cujo lado seja $\sqrt{ab}$, a média geométrica entre os lados do retângulo. Além disso, existe uma analogia direta das médias com as séries: a progressão aritmética e a progressão geométrica. De fato, enquanto a progressão aritmética é uma soma de valores, a geométrica é uma multiplicação, ou seja uma progressão por proporções (o valor fica x vezes maior que o anterior, em cada passo). Uma P.G. é uma série que cresce sempre na mesma proporção; ela é uma versão, com valores discretos, da função exponencial.

Para clarear o assunto, vamos a um exemplo: um pequeno pomar de laranjeiras. Suponha que, no seu primeiro ano, você tenha colhido 100 laranjas nele; no segundo 180, no terceiro 210 e no quarto 300 laranjas. Então as taxas de crescimento são de 80% do primeiro para o segundo ano, depois 16,7% e 42,8%. Então nos perguntamos: qual foi a média de crescimento na produção de laranjas? A resposta

$$\frac{80\% + 16,7\% + 42,9\%}{3} = 46,5\%$$

é errada, pois um crescimento anual de 46,5% vai levar a um valor final de $100 \cdot 1,465 \cdot 1,465 \cdot 1,465 = 314$ laranjas no quarto ano, maior do que os 300 que foram alcançados. A questão é que estamos lidando com proporções, não com valores independentes; uma proporção é um valor que se aplica a outro, que diz que algo é tantas vezes maior que outro algo¹. Proporções servem para serem multiplicadas pelos valores iniciais; portanto, querer uma proporção média é querer uma média de multiplicações.

Traduzindo para termos matemáticos mais precisos, crescimento de 80% significa multiplicação por 1,8. Usando então a média geométrica, obtemos

$$\sqrt[3]{1,8 \cdot 1,167 \cdot 1,429} = 1,443$$

fornecendo um valor médio de 44,3%. De fato, podemos mostrar que essa taxa de crescimento faz a produção passar de 100 a 300, ou seja, triplicar em três anos.

¹Se valores simples forem como substantivos, as porcentagens e proporções são como adjetivos.

Assim, quando formos fazer médias de dados, precisamos conhecer a natureza dos dados e a sua distribuição, antes de escolhermos qual média será mais significativa. É fácil imaginar, por exemplo, que não é muito significativo tomar a média aritmética entre magnitudes de estrelas. Se quisermos uma média de brilhos, na verdade queremos a média aritmética entre os fluxos. Assim, a média adequada para as magnitudes seria algo como

$$\frac{F_1 + F_2 + \dots + F_n}{n} = \frac{\exp m_1 + \exp m_2 + \dots + \exp m_n}{n}$$

ajustando-se as constantes. Poderíamos chamar isso, digamos, de *média das exponenciais*.

Média Harmônica

Outra média frequentemente aprendida na escola, mas menos utilizada, é a MÉDIA HARMÔNICA. A média harmônica dos valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ é

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Dado um número x , dizemos que o seu recíproco (ou inverso) é o número $\frac{1}{x}$. Assim, a média harmônica é a recíproca da média aritmética dos recíprocos. Em outras palavras: levamos todos os dados para o espaço dos seus inversos, fazemos lá a média aritmética, e trazemos de volta o resultado, invertendo de novo. De fato, a média harmônica tem uma relação especial com a média aritmética: no caso de dois valores a e b , a média harmônica H fica:

$$\frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow H = \frac{2ab}{a+b}$$

E, portanto, a média geométrica G dos dois valores é também a média geométrica entre as outras duas médias, a aritmética (A) e a harmônica (H):

$$G = \sqrt{A \cdot H}$$

Podemos fazer a mesma construção geometricamente, como na figura 4.1.

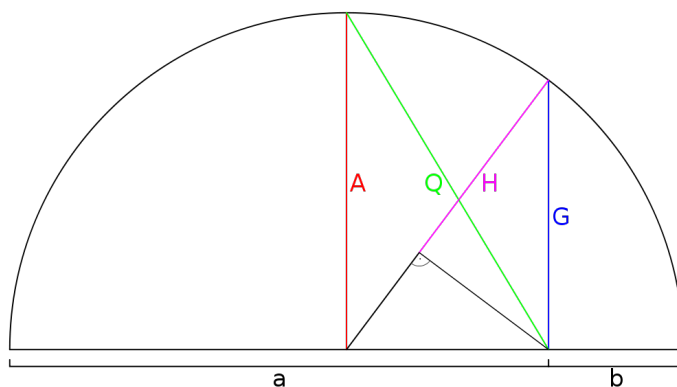


Figura 4.1: Construção geométrica para as médias conhecidas como *médias pitagóricas*. Dados dois valores a e b , a média aritmética entre eles é A , a média geométrica é G , a média harmônica é H , a média dos seus quadrados é Q . A validade dessas construções pode ser mostrada usando algumas semelhanças de triângulos. ☺

Outra propriedade importante é que, para qualquer número de dados, a média harmônica é sempre a menor das três médias discutidas. Isso tem a ver com o fato de que a média harmônica

é muito sensível a valores pequenos, mas pouco sensível a valores grandes. Afinal, os inversos de números muito grandes são números muito pequenos, e vice-versa. Imagine, por exemplo, que você faça três provas, tirando 7 em duas das provas e 10 em uma terceira. A média aritmética seria $24/3 = 8$, mas a média harmônica vale:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10}} = \frac{3}{0,143 + 0,143 + 0,1} = \frac{3}{0,386} = 7,77$$

Se a nota mais alta tivesse sido 7,5 em vez de 10, a média cairia para $3/0,419 = 7,15$, pouco diferente. Mas substituir o 10 (três pontos mais alta que os 7) pelo 4 (três pontos mais baixa), diminui a média para $3/0,536 = 6$, um ponto mais baixa. Pior ainda: se a terceira nota for substituída por 0,5, então a média despenca para 1,3! Se a terceira nota for 0,2, a média vai para 0,362! Dando um exemplo mais dramático: Se as três notas forem 0,5, 0,5 e 8, a média aritmética daria 3, enquanto a harmônica dá 0,7.

Assim, a média harmônica dá pouca importância às notas muito altas, mas penaliza severamente as notas muito baixas. Por isso alguns vestibulares a preferem, em vez da média aritmética: segundo eles, essa média garantiria alunos mais equilibrados, privilegiando alunos que sejam razoáveis em todas as matérias, em detrimento dos que sabem muito de uma matéria e muito pouco das outras.

Mas essa média também pode ser importante em algumas situações físicas, em especial as que envolvem frações. Por exemplo, se um carro viaja durante uma hora a uma velocidade de 60 km/h e depois mais uma hora à velocidade de 100 km/h, a velocidade média é a distância total percorrida pelo tempo levado, isto é, $(60 \frac{km}{h} \cdot 1h + 100 \frac{km}{h} \cdot 1h)/2h = (60 \frac{km}{h} + 100 \frac{km}{h})/2$, a média aritmética das velocidades em cada etapa. Agora, digamos que o carro tenha viajado 1.000 km à velocidade de 60 km/h e depois outros 1.000 km à velocidade de 100 km/h. Aqui a velocidade média é

$$\frac{2000km}{\frac{1000km}{60km/h} + \frac{1000km}{100km/h}} = \frac{2}{\frac{1}{60km/h} + \frac{1}{100km/h}},$$

a média harmônica, que vale 75 km/h.

4.1.2 Valores de Desvio

Os valores de média, embora importantes, não são suficientes. Basta ver os histogramas de notas das duas provas:

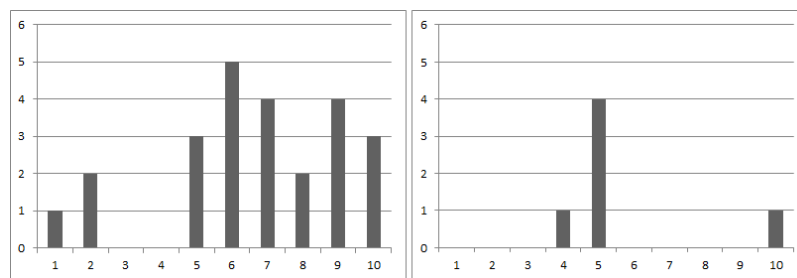


Figura 4.2: Histogramas das notas na primeira prova (esquerda) e na recuperação (direita) do curso de taxidermia. Cada coluna mostra o número de provas até um ponto abaixo do valor mostrado abaixo da coluna. Assim podemos ler, por exemplo, que cinco provas tiveram notas entre 5 e 6 na primeira prova.

Nos histogramas vemos que, embora as notas tenham ficado razoavelmente distribuídas na primeira prova (excetuando o “buraco” entre 2 e 4), elas ficaram muito concentradas na recuperação: excetuando a proeza de Bilota, todas as notas caíram entre 3 e 5. Para nos informar sobre

esse tipo de comportamento, precisamos de um jeito de saber o quanto os dados se desviam da média, se eles são muito concentrados ou espalhados. São o que chamamos de *valores de desvio*.

Amplitude

Um valor de desvio bastante simples é a AMPLITUDE. No caso da tabela 4.1 da prova de taxidermia, a amplitude foi enorme: a nota mais alta foi um 10 de William O'Connell; a mais baixa foi o 0,2 da Foca Bilota. Isso dá uma amplitude de $10 - 0,2 = 9,8$ pontos. Já a recuperação foi um pouco mais homogênea; a amplitude foi de $9,8 - 3,8 = 6$ pontos.

Mas não é difícil ver os problemas que surgem com a amplitude. Ela é, como a mediana, exageradamente sensível a poucos dados. Por isso, é preferível usar um quantificador que mede a média dos desvios de cada dado.

Desvio-Padrão

Para isso, podemos calcular o quanto cada valor se desvia da média, fazendo então uma média dos desvios. Com alguns aperfeiçoamentos, essa é a ideia do DESVIO-PADRÃO, representado por σ , que pode ser calculado por

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - x_m)^2}$$

Onde x_i representa cada dado e x_m é a média aritmética dos dados: $\frac{1}{N} \sum x_i$. Agora vamos explicar nossos aperfeiçoamentos.

A primeira delas é que somamos os quadrados dos desvios de cada dados ($\sum (x_i - x_m)^2$), não os desvios em si. A razão é que, por definição, a média dos desvios será sempre zero (do contrário, a média não seria a média). Então percebemos que, na verdade, não queríamos fazer as médias dos desvios, mas dos “tamanhos” dos mesmos. De fato, como $x^2 \geq 0$ para todo x , nossa soma sempre gerará um número positivo, que será tão maior quanto mais distantes os dados estiverem de seu valor médio. Depois tiramos a raiz quadrada para manter a dimensão correta.

Entretanto, alguém poderia questionar a escolha: em vez dos quadrados dos desvios, por que não usar seus módulos ($\sum |x_i - x_m|$)? Há duas razões principais. A primeira é que, para análises de dados mais refinadas, costuma-se usar cálculo e expansões em série para deduzir propriedades, para as quais é ruim usar o módulo, que é uma função com derivada descontínua. A segunda está relacionada à distribuição mais comum de probabilidades, chamada *distribuição normal* ou *gaussiana*. O desvio-padrão é um dos parâmetros dessa distribuição, como veremos logo à frente.

Uma segunda provável causa de estranheza é a existência de um $N - 1$ denominador. Em uma média, é natural esperarmos que a soma seja dividida pelo número N de dados, já que a soma é tanto maior quanto mais dados tomamos. Mas neste caso devemos lembrar que, embora tenhamos N dados independentes, temos apenas $N-1$ desvios independentes (os N desvios são restritos pela regra que diz que a soma de todos eles é zero). Em outras palavras, os dados são contados duas vezes: como eles mesmos e como parte da média. Ao compo-la, cada dado colabora com $\frac{1}{N}$ de seu valor; isso significa que cada termo da soma é $\frac{1}{N}$ menor do que deveria; logo, ao final da soma dos N dados, temos 1 dado “faltando”, o que é compensado subtraindo-se um do número de dados².

²Rigorosamente falando, esse argumento só é válido para calcular desvios de amostras, isto é, de quantidades de dados que representam apenas uma parcela do todo. Pense, por exemplo, em uma pesquisa de intenções de voto, ou nas medidas de uma grandeza física. Nestes casos, a média é uma estimativa. Mas em nosso exemplo de taxidermia, as notas das provas são todas as que existem, são a população inteira de dados sob análise. Neste caso, devemos calcular o desvio dividindo por N . Por razões de clareza, entretanto, escolhemos usar apenas o fator $N-1$, em todos os casos.

No caso da primeira prova, o desvio-padrão de 2,61. Isso deve significar que, mesmo com o 10 do William O'Connell e o 0,2 da Foca Bilota, a maior parte das pessoas ficou com notas um pouco mais de pontos acima ou abaixo da média. Veremos um significado mais preciso disso mais à frente, com relação à distribuição normal.

4.1.3 Outros Valores

É importante lembrar que os estimadores citados são apenas os mais usados, mas de jeito nenhum são tudo o que é necessário. A análise de que números de resumo usar dependerá sempre de uma análise prévia ou de ideias teóricas sobre como se comportam seus dados, bem como do seu propósito com o resumo.

Por exemplo, digamos que o centro de controle de tráfego urbano (CET) da sua cidade queira saber em que ruas ou semáforos os carros passam mais rápido. Tomar a velocidade média dos carros é inútil, pois não é interessante contar todos os senhores de idade que dirigem a 30 km/h. Tomar o maior ou os maiores valores medidos também não é bom, pois alguém maluco que passe uma vez a 200 km/h estragaria todo o estudo. Uma ideia melhor seria usar o TERCEIRO QUARTIL, que é uma extensão da ideia de mediana: ele é o dado que tem três quartos (75%) dos dados abaixo dele, ou um quarto (25%) acima. Ou, dependendo dos valores encontrados, é possível usar o 85-percentil, que vocês supõem o que seja³.

Por outro lado, se a CET quiser verificar o cumprimento dos limites de velocidade em partes diferentes da cidade, ela pode usar a média e o desvio-padrão das velocidades acima do limite, ou a porcentagem do total de veículos que estas representam.

Outro exemplo: digamos que você acabou de se mudar para uma cidade diferente e quer comprar um ar-condicionado para o verão, mas não sabe que potência escolher. Para tanto, não é útil saber a temperatura média do verão, pois o aparelho serve para os dias mais quentes! Por outro lado, tomar a temperatura máxima do verão também é ruim: por que pagar mais caro para um ar-condicionado cuja potência máxima será usada apenas durante um dia? Neste caso, é mais útil saber o número de dias em que a temperatura estará acima de um valor T .

4.2 Normalização

Dados numéricos podem facilmente nos enganar. Ter tirado 7 em uma prova tem significados diferentes se a média da turma foi 9 ou se ela foi 2. Da mesma maneira, ter um 7 em uma prova em que a média foi 5 tem significados diferentes se o desvio padrão for 1 ou for 4. Assim, aqui também é útil normalizar.

O jeito mais comum de normalizar os dados consiste em mudá-los de forma que a média seja igual a 0 e o desvio-padrão igual a 1. Assim, o sinal do número indica se ele está acima ou abaixo da média, enquanto seu módulo indica a quantos desvios-padrão ele está da média. Para fazer isso, precisamos deslocar todos os dados até que sua média caia no zero; em outras palavras, precisamos conhecer o valor médio dos dados brutos, subtraindo-o de cada dado. Da mesma forma, precisamos comprimir os dados até que seu desvio-padrão fique de tamanho 1; em outras palavras, precisamos dividir todos os dados pelo desvio dos dados brutos. Deste modo, para um dado x_k pertencente a um conjunto de média μ e desvio-padrão σ , seu valor normalizado $\check{x}_k$ pode ser calculado como

$$\check{x}_k = \frac{x_k - \mu}{\sigma}$$

Voltemos ao exemplo da prova de taxidermia. Nesse caso, a nota normalizada daria, sobre cada aluno, a informação de seu desempenho relativo aos outros – razão pela qual muitos

³repare que, de acordo com essa nomenclatura, a mediana pode ser chamada de *segundo quartil* ou *50-percentil*

vestibulares normalizam as notas. A desvantagem de ver notas neste formato é que elas não parecem com notas; para isso, é só ajustar a normalização para algo mais amigável. Uma forma usual é colocar a média em 50 e o desvio em 10. Assim, as notas ficarão entre 0 e 100. As duas normalizações (média 0, desvio 1; média 50, desvio 10) aparecem na tabela 4.3.

Tabela 4.3: Notas da Prova de Taxidermia, incluindo as duas normalizações.

NOME	NOTA	NOTA NORM 1	NOTA NORM 2
William O'Connell	10,0	1,46	64,58
Phillipe Lhunnan	8,7	0,96	59,60
Vinícius Grimmer	6,5	0,12	51,17
Felipe Niquelm	4,8	-0,53	44,66
Rael Virtössen	4,4	-0,69	43,13
Paul It'Mann	8,8	1	59,98
Cláudio Ohmara	5,1	-0,42	45,81
Thomas Bleu	5,6	-0,23	47,72
Carlos Lorem	9,7	1,34	63,43
Alce Barbuda	6,3	0,04	50,41
Orosimbo Maia	7,4	0,46	54,62
Agatha Köhler	8,5	0,88	58,84
June Clark	5,5	-0,27	47,34
James Kahmandu	1,2	-1,91	30,86
Protógenes	7,0	0,31	53,09
Racione Ragnar	5,6	-0,23	47,72
Foca Bilota	0,2	-2,30	27,03
Antonio D. Vagar	7,5	0,50	55,00
Adam Borda Bunda	5,3	-0,34	46,57
Adelícia de Carvalho	6,6	0,16	51,56
Sansão Chazan	8,5	0,88	58,84
Gilberto Créa	4,1	-0,80	41,98
Eu Matei um Nome	2,0	-1,61	33,93
Airotiv A. D. Atlov	9,2	1,15	61,52

Nesta tabela podemos ver que a nota 10 de William O'Connell ficou apenas um desvio-padrão e meio da média (nota 65), mas que a Foca Bilota ficou mais de dois desvios-padrão abaixo, com nota 27. Vemos também que a nota normalizada da Foca na recuperação seria 2,21 ou 72,14, o que significa dois desvios acima da média e que seu 9,8 foi algo mais destacado do que o 10 de William na primeira rodada.

4.3 Distribuições

Ao lidar com muitos dados, precisamos ter uma ideia mais clara sobre como dados se distribuem em geral. Quando pensamos em coisas que não seguem regras bem definidas, costumamos encará-las como coisas que não possuem ordem alguma – e para elas usamos adjetivos como “caótico”, “aleatório”, etc. Pensamos que qualquer coisa pode acontecer, todas com igual probabilidade. Com essa intuição, podemos dizer frases como “Se você se jogar do prédio, tem a chance de morrer ou de não morrer: 50% de chance para cada”.

Ocorre que os dados analisados por um cientista experimental quase nunca são totalmente determinados (um número segue-se rigorosamente a outro, uma causa e uma consequência) nem

totalmente aleatório (todos os valores ocorrem com igual frequência). Precisamos explorar os casos intermediários, de ocorrências um pouco fortuitas mas que exibem uma ordem ou um padrão. Para isso, precisamos conhecer as DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE.

As distribuições de probabilidade são curvas que indicam que situações são mais prováveis de ocorrer. Isso pode ser interpretado como: repita o fenômeno várias vezes e aqueles que estão na zona mais provável ocorrerão mais. Existem, entretanto, outras interpretações, algumas das quais são discutidas no capítulo de física quântica do Volume IV.

O caso “totalmente aleatório” tem o nome técnico de DISTRIBUIÇÃO UNIFORME: todos os valores possíveis tem chances iguais. É o caso de um lançamento de dados ou um sorteio da loteria. Os gráficos da figura 4.3 são exemplos de distribuições uniformes: uma com cinco resultados possíveis, outra contínua, com chances iguais dentro de um intervalo. Para distribuições uniformes, é fácil escrever uma expressão matemática que a represente, bem como é fácil ver que a média é o valor “do meio”.

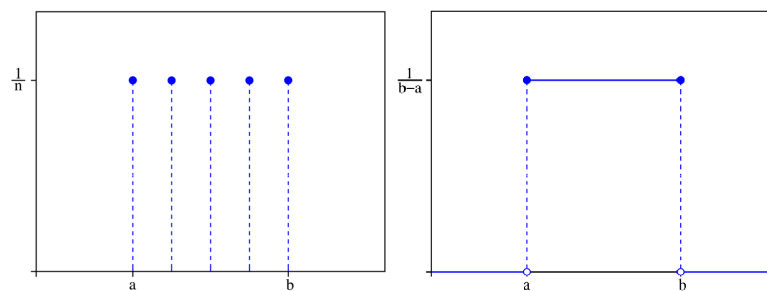


Figura 4.3: Distribuições uniformes discreta e contínua. No primeiro caso, se existem N valores possíveis, a probabilidade para cada um é $1/N$, de forma que a soma das probabilidades seja 1. No segundo caso, como existem infinitos pontos em um segmento de reta, não faz sentido perguntar a probabilidade de cada valor; em vez disso, temos uma *densidade de probabilidade* que, essa sim, é uniforme.

A distribuição mais comum, entretanto, é a já citada DISTRIBUIÇÃO NORMAL OU GAUSSIANA. Sua expressão é: para cada número x , a densidade de probabilidade $\rho(x)$ naquele ponto é:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

Onde x_0 é o valor médio e σ o desvio-padrão. Essa equação pouco amigável gera as muito mais amigáveis curvas da figura 4.4.

A distribuição normal é muito útil pelas seguintes características:

- Ela tem um valor máximo (mais provável) e decresce para os dois lados. Por exemplo, se eu estiver medindo uma mesa de cerca de um metro de comprimento, pode que a medida encontrada seja 10 cm maior ou menor, mas é muito improvável que eu encontre o valor de 3 m;
- Ela é simétrica em torno do centro, isto é, as probabilidades para mais e para menos são iguais. Em particular, isso significa que a média é igual à mediana, que é igual ao valor mais provável;
- Seus parâmetros naturais são muito intuitivos: as já discutidas média μ e desvio-padrão σ ;

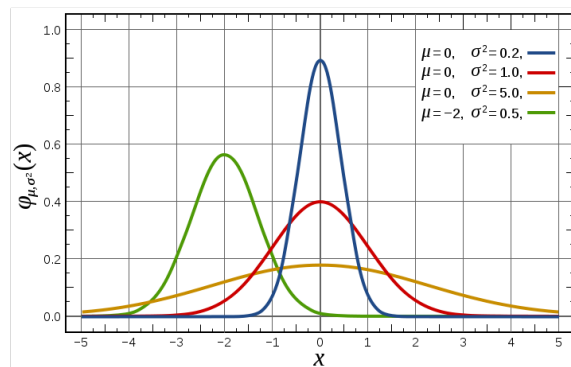


Figura 4.4: Quatro curvas de distribuição normal com diferentes parâmetros. Podemos ver que o parâmetro μ dá a posição do pico da curva, enquanto o σ indica sua largura.

- Ao realizarmos vários experimentos mutuamente independentes, a soma normalizada dos resultados tende a ter uma distribuição normal. Pense, por exemplo, no lançamento de dados: cada lançamento tem probabilidade uniforme, mas a soma normalizada dos números tirados em muitas jogadas tem probabilidades dadas por uma distribuição normal. Isso é resultado do famoso *Teorema Central do Limite*.

Agora podemos descobrir um segredo de quando usamos médias e desvios-padrão para resumir dados de uma tabela: quando fazemos isso, estamos supondo que a distribuição dos dados é normal. Na ausência de outras informações, essa é a suposição mais razoável. Por outro lado, quando *normalizamos* dados, estamos transformando-os em algo que se distribui gaussianamente. Finalmente, nos exemplos em que a média não é um bom resumo, constatamos apenas que a distribuição normal não é uma boa aproximação para aqueles dados (isso acontece, por exemplo, sempre que temos dados muito assimétricos).

Embora as distribuições normal e uniforme sejam mais comuns, existem inúmeras distribuições de probabilidade, cada uma útil para um tipo de fenômeno. Dê uma olhada na Wikipedia. Como exemplo, citamos mais duas. Uma é a LOG-NORMAL: a distribuição dos dados cujos logaritmos têm distribuição normal. O gráfico está na figura 4.5. O tamanho de unhas e garras, bem como a altura, largura, etc. de seres vivos e tecidos biológicos se distribui dessa maneira.

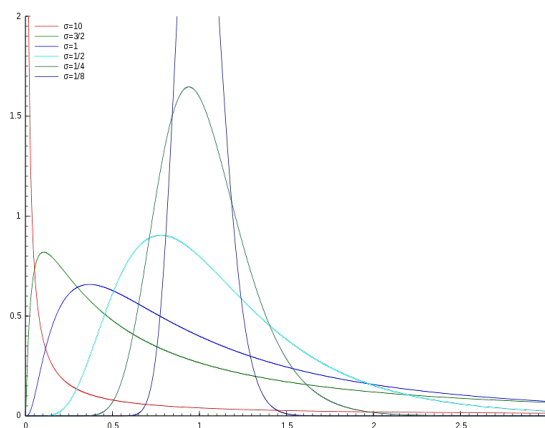


Figura 4.5: Seis curvas de distribuição log-normal. Os parâmetros aqui ainda são a média e o desvio-padrão, mas as curvas em geral são assimétricas.

Outra distribuição interessante é a DISTRIBUIÇÃO BETA, mostrada na figura 4.6. Uma característica interessante delas é que, para alguns valores de parâmetros, a distribuição é simétrica mas crescente para os extremos, isto é, a média é igual à mediana mas ambas correspondem ao valor de probabilidade mínima.

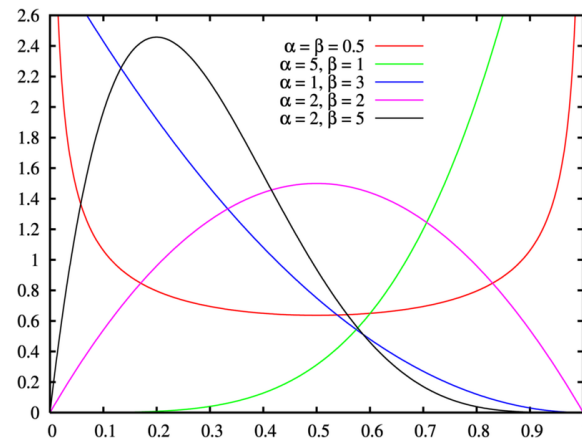


Figura 4.6: Cinco curvas de distribuição beta. Seus dois parâmetros, α e β , não possuem um significado intuitivo especial.

Capítulo 5

Incertezas

O resultado das medições é inacreditável, tenho que contar para alguém. Logo após lançar esta frase, ainda encarando o complexo e cuidadosamente montado arranjo experimental, ao lado das pilhas de papel usadas para fazer todo o tratamento de dados ensinado acima, você conta pesaroso o resultado das medições para seu amigo. Ele, extremamente chocado com seus resultados, decide repetir a experiência. Após refazer a experiência, revoltadíssimo, ele lhe manda de volta um e-mail dizendo que você fez tudo errado. Ao se encontrarem para refazer o experimento juntos, cada um tentando provar que o outro estava errado, os dois sacam suas poderosíssimas réguas plásticas de 50 cm e percebem, chocados, que uma das réguas é 5 cm maior que a outra. E agora? Qual dos dois será que está com a régua defeituosa? Ou serão ambas defeituosas?

Esta anedota, apesar de exagerada, reflete um problema real. Em toda medição existe um processo de comparação intrínseco – seja uma comparação do comprimento de um objeto com o número de marcas numa régua ou da conversão do número de ciclos de um cristal de quartzo para uma escala de tempo. Porém não basta comparar; geralmente precisamos que nossa comparação tenha relevância para outras pessoas. De que adianta contar para alguém que sua mesa tem 15,7345 dedos mindinhos de comprimento? Ou que a gravidade é $3,125 \times 10^{-2}$ (dedos)/(Batidas do coração)^{2?1}.

Logo, precisamos de equipamentos que nos forneçam uma escala. Mas, para isso, é necessário que eles sejam calibrados, e toda calibração envolve fazer medições, que estão sujeitas a erros como qualquer outra medição.² O erro de calibração, contudo, tem uma propriedade bastante especial: ele afeta todos os seus dados da mesma maneira, por isso é chamado de ERRO SISTEMÁTICO. Ou seja, ao comparar sua régua com um equipamento de alta precisão, se você descobre que ela é 1% menor, basta multiplicar todos os seus dados tal que esse 1% seja corrigido.

Mas a vida não é tão fácil quanto parece. Nem sempre (e nas situações importantes, quase nunca) temos um instrumento muito mais preciso que outro para fazer a correção sistemática dos dados. Em nossa história, temos apenas duas réguas de plástico; mesmo se comprarmos uma terceira régua, ainda não saberemos em que régua confiar. Além disso, muitos erros costumam aparecer juntos: a pintura dos números na régua nunca é totalmente perfeita; o que você e seu amigo consideram o início e o fim do objeto pode variar também, graças a uma lasca ou uma ponta; o jeito que você olha para a régua varia a medida: a paralaxe dos seus olhos e da posição da sua cabeça pode adicionar ou subtrair alguns milímetros; variações ambientais de temperatura, umidade, etc. podem afetar tanto o objeto quanto a régua.

Tudo isso impõe um limite a qualquer medida que fizermos. Nunca é possível fazer uma

¹mais discussões sobre sistemas de unidades podem ser vistos no capítulo 3

²Obviamente o erro dessa escala está relacionado com o cuidado que se teve ao fazer o equipamento e o rigor dos testes de qualidade, o que costuma ser fortemente correlacionado com o preço do equipamento. Em outras palavras: não confie muito nas suas réguas de plástico de cinquenta centavos.

medida perfeita, então nunca é possível encontrar a medida perfeita e verdadeira de nada. Ao lidar com qualquer experimento, é importante ter essa consciência para não ser enganado pelos números. Isso quer dizer: ao estimar o resultado de qualquer experimento, é igualmente importante estimar o quanto esse resultado é incerto, ou qual o tamanho do seu erro. Podemos fazer isso de duas maneiras.

5.1 Incertezas Estimadas

A primeira delas é admitir que existem muitas variáveis envolvidas e é impossível controlar todas, ou mesmo a maior parte delas. Mas é possível saber que as incertezas causadas por elas têm um alcance limitado. Se você estiver usando uma régua para medir, por exemplo, o comprimento de uma mesa, sabe que o resultado deve ser de poucos metros. Mas você sabe também que todos os efeitos acima podem adicionar ou subtrair alguns milímetros, nunca um ou dois metros no resultado. Assim, você pode *estimar* a incerteza da sua medida, levando em conta esses fatores.

Uma boa estimativa depende de um conhecimento profundo do seu sistema experimental, além de um cuidado especial para evitar erros muito grosseiros (como não anotar errado os números, ou evitar grandes paralaxes, ou, para instrumentos mais precisos, evitar grandes variações de temperatura e umidade da sala). Como regra geral, para instrumentos analógicos (régua, relógios de ponteiro, etc.) o erro é metade da menor divisão do instrumento (para uma régua comum, isso é $0,5\text{ mm}$; para instrumentos digitais (relógios, balanças e outros dispositivos eletrônicos), é o último algarismo.

A razão para isto pode ser explicada. Digamos que você meça cuidadosamente o comprimento de um lápis, de forma que a extremidade fique mais ou menos entre $15,3$ e $15,4$ cm. Tudo o que é possível dizer é que o valor está entre esses dois. Então diga que o lápis possui $15,35 \pm 0,05$ cm, pois meio milímetro é a margem mínima que você pode fornecer. Agora suponhamos que você vá pesar o lápis em uma balança eletrônica e o leitor forneça o valor de $8,346$ g. Nesse caso, você não tem como saber se o valor é próximo de $8,345$ ou $8,347$, pois não tem a noção geométrica que possui na régua; tudo o que você tem é o último número de um visor. Então o melhor é escrever o peso do lápis como $8,346 \pm 0,001$ g.

5.1.1 Propagação de Erros

Estimar o erro de grandezas medidas parece simples; mas como estimar seu erro de uma grandeza composta por outras grandezas medidas? Para isso, precisamos rastrear como o erro se propaga de uma grandeza para outra.

Para dar um exemplo, suponhamos que alguém quebrou seu lápis e que agora você medirá separadamente cada pedaço dele, afinal um lápis é um objeto muito grande para tentarmos juntar as duas partes. Uma parte dele dá uma medida de $9,25 \pm 0,05$ e a outra, de $6,15 \pm 0,05$. A soma dos valores dá $15,4$, mas quanto é a incerteza total neste caso? Uma maneira de lidar com isso é estabelecer o máximo e o mínimo: com esses erros individuais, a menor soma possível é $9,2 + 6,1 = 15,3$ e a maior é $9,3 + 6,2 = 15,5$. Assim vemos que a incerteza é de $0,1$ para mais ou para menos (e o resultado é $15,3 \pm 0,1$). O mesmo argumento vale para subtrações (confira você mesmo): $(9,25 \pm 0,05) - (6,15 \pm 0,05) = 3,1 \pm 0,1$.

O problema de usar esse método é que ele superestima um pouco os erros. Repare que, fazendo isso, estamos supondo que a incerteza se distribui uniformemente no intervalo fornecido; como já dissemos, entretanto, a suposição mais razoável é a de que as medidas possuem distribuição normal. Então é como se cada erro fosse o desvio-padrão de uma gaussiana. Com essa

suposição, a maneira mais adequada de lidar com os erros é somando-se os seus quadrados (e extraindo a raiz no final). Em outras palavras:

$$\sigma_{a+b}^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2$$

, o mesmo valendo para a subtração. Em nosso caso, o erro total seria $\sqrt{2 \cdot 0,0025} = 0,07$, um pouco menor que o 0,1 suposto inicialmente.

Para variáveis que se combinam de maneiras mais complicadas, o raciocínio é análogo: temos que saber de que forma cada variável medida afeta o resultado final. Com isso, podemos supor que os erros se distribuem uniformemente, calculando o menor e o maior dos valores possíveis, ou, o que é melhor, que eles se distribuem gaussianamente. Neste último caso, podemos calcular uma forma geral para o erro propagado:³. Seja $x = f(a, b, c)$, uma grandeza que é uma função das grandezas a , b e c . Se cada uma dessas grandezas possui um erro σ_a , σ_b e σ_c , o erro de x é dado por

$$\sigma_x^2 = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right|^2 \sigma_a^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right|^2 \sigma_b^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right|^2 \sigma_c^2$$

A tabela abaixo mostra alguns tipos especiais de relação entre variáveis e os erros correspondentes.

FUNÇÃO	ERRO
$x = a + b$	$\sigma_x^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2$
$x = a - b$	$\sigma_x^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2$
$x = a \cdot b$	$\left(\frac{\sigma_x}{x} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b} \right)^2$
$x = \frac{a}{b}$	$\left(\frac{\sigma_x}{x} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b} \right)^2$
$x = e^{ka}$	$\sigma_x = xk\sigma_a$
$x = \log a$	$\sigma_x = \frac{\sigma_a}{a}$
$x = \cos a$	$\sigma_x = \sin a \cdot \sigma_a$

Com isso podemos revelar um dos motivos pelos quais é bom repetir as medidas em um experimento. Digamos que façamos uma medida com erro σ , mas que repitamos N vezes a medida. Se considerarmos erros uniformes, a média das medidas terá o mesmo erro de uma só medida; entretanto, se considerarmos erros gaussianos, mais medidas vão melhorando a precisão, afinando a curva. Assim o erro da média ficaria:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma_1^2}{N^2} + \frac{\sigma_1^2}{N^2} + \dots = N \frac{\sigma^2}{N^2} \Rightarrow \sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

, tanto menor quanto mais medidas fizermos.

5.2 Incertezas Estatísticas

Outra maneira de lidar com erros é transforma-los em estatística: no experimento inicial, você e seu amigo poderiam ter usado várias régua de diferentes marcas e modelos, tomando depois a média dos valores. Assim, teríamos uma tabela de dados, à qual poderíamos aplicar todas as técnicas estatísticas do capítulo anterior. Essa é a chave da estatística dos experimentos: tratamos cada grandeza como se fossem muitas.

³Essa fórmula inclui derivadas; sua dedução vem de considerar qualquer função como uma função linear usando a expansão em primeira ordem de uma Série de Taylor. Se você não conhece esses termos, leia o apêndice de funções do Volume III.

Mas esse método não é perfeito porque, como dissemos, é impossível controlar todas as variáveis. Mas podemos “controlar” as que geram erros maiores ou as que são mais interessantes, randomizando-as. Quanto à temperatura da sala de medição, por exemplo, podemos usar equipamentos para mantê-la constante ou realizar medidas em diferentes dias e diferentes horas de cada dia. Novamente, a escolha de quais variáveis randomizar dependem da montagem experimental; sempre sobrarão um conjunto de incertezas que terá que ser estimado.

Digamos então que fizemos várias medidas, cada uma com um erro σ . Tendo a tabela de dados, podemos calcular sua média que, pela propagação das incertezas, terá um erro σ_m . Além disso, a própria tabela de dados terá um desvio-padrão s . Temos que unir ambos os erros, lembrando que a suposição mais natural é que tanto os erros quanto o conjunto de dados possuem distribuição normal. Assim, o erro final será:

$$S = \sqrt{\sigma_m^2 + s^2}$$

Um exemplo: na VII Escola de Astronomia, em 2007, os estudantes se dividiram em grupos para medir a aceleração da gravidade a partir do período de um pêndulo. A tabela 5.1 mostra os períodos medidos pelos diferentes grupos, com um pêndulo de 90 cm de comprimento.

Tabela 5.1: Medições do período de um pêndulo em segundos.

1,816
1,724
2,038
1,868
2,014
2,040

Sabemos que o período era medido com cronômetros digitais que acompanhavam as oscilações. Assim, como erro estimado, consideremos apenas a incerteza-limite do cronômetro: 0,01 s. O erro da média será então $\frac{0,01}{\sqrt{6}} = 0,04$. Além disso, podemos calcular a média dos dados, 1,917 e o desvio-padrão, 0,13. A incerteza total será então $\sqrt{(0,13)^2 + (0,04)^2} \approx 0,13$. Poderíamos mesmo ter desprezado o erro propagado, já que, neste caso, ele é uma ordem de grandeza menor que o desvio-padrão. Assim, ajustando os algarismos significativos⁴ e sem esquecer da unidade, temos que nosso resultado foi:

$$1,92 \pm 0,13 \text{ s} \quad \text{ou} \quad 1,92(13) \text{ s}$$

⁴O resultado e sua incerteza devem ter o mesmo número de casas decimais e a incerteza pode ter no máximo dois algarismos significativos.

- 21- **(IOAA 2008)** O Aglomerado de Galáxias de Virgo é o mais próximo dos grandes aglomerados de galáxias, estendendo-se por cerca de 10 graus no céu e abrigando diversas galáxias brilhantes. É interessante encontrar nossa distância ao aglomerado e deduzir disso certas informações cosmológicas. A tabela 5.2 fornece estimativas de distância obtidas de vários indicadores diferentes de distância (listados na coluna à esquerda). A coluna da direita mostra a distância média d_i com o desvio-padrão s_i .

Tabela 5.2

I	INDICADOR DE DISTÂNCIA	DISTÂNCIA MÉDIA (Mpc)
1	Cefeidas	$14,9 \pm 1,2$
2	Novas	$21,1 \pm 3,9$
3	Nebulosas Planetárias	$15,2 \pm 1,1$
4	Aglomerados Globulares	$18,8 \pm 3,8$
5	Flutuações de Brilho Superficial	$15,9 \pm 0,9$
6	Relação Tully-Fischer	$15,8 \pm 1,5$
7	Relação Faber-Jackson	$16,8 \pm 3,4$
8	Supernovas Ia	$19,4 \pm 5,0$

- (a) Aplicando a média ponderada abaixo, compute a distância média do Aglomerado de Virgo.

$$d_m = \frac{\sum_i d_i \cdot s_i^{-2}}{\sum_i s_i^{-2}}$$

onde o índice i percorre todas as estimativas de distância, como mostrado na tabela.

- (b) Qual a incerteza nessa estimativa?
- (c) Espectros das galáxias de Virgo indicam uma velocidade média de afastamento de 1136 km/s para o aglomerado. Com isso, você pode estimar a constante de Hubble⁵, com sua incerteza?
- (d) Qual é o Tempo de Hubble (idade do universo) usando o valor da Constante de Hubble que você encontrou?
- 22- **(IAO 2005) Refração.**⁶ A distância zenital (Z) de um objeto celeste é definida como sua distância angular do zênite do observador (para um objeto sobre o zênite, $Z=0^\circ$ e sobre o horizonte $Z=90^\circ$). Contudo, o efeito de refração atmosférica reduz a distância zenital medida (Z_m) em comparação com a distância zenital real (Z_i), por uma quantidade R (medida em segundos de arco). A tabela 5.3 pode ser utilizada para observações ao nível do mar, à temperatura de 10°C :

Para distâncias zenitais menores que um certo limite Z_F , uma fórmula aproximada para o cálculo é:

$$R = 60,25'' \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{273}{273 + T} \cdot \tan Z_m$$

onde B é a pressão atmosférica em milímetros de Mercúrio (mmHg), e $T(^{\circ}\text{C})$ é a temperatura em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$).

⁵A Lei de Hubble é uma relação linear entre velocidades de afastamento de objetos e suas distâncias, da forma $v = H_0 \cdot d$, onde H_0 é a Constante de Hubble. Se supusermos que essa constante sempre teve o mesmo valor e extrapolarmos para o passado, para um instante em que todas as galáxias estivessem juntas, temos que a Idade do Universo vale $T = 1/H_0$

⁶Caso sinta necessidade, leia o capítulo 12 deste Volume antes de fazer esta questão.

Tabela 5.3

Z_m	R	Z_m	R
0°	0"	82°	394"
10°	10"	83°	444"
20°	21"	84°	509"
30°	34"	85°	593"
40°	49"	86°	706"
50°	70"	87°	863"
60°	101"	88°	1103"
70°	159"	89°	1481"
80°	319"	89° 31'	1760"
81°	353"	90°	2123"

- (a) Encontre o intervalo de valores para Z_m em que é possível utilizar a fórmula acima com uma precisão de 1" – isto é, encontre o valor de Z_F .
- (b) Quando o Sol está em seu ponto mais alto do céu de junho, em um certo local, sua distância zenital observada é de $16^\circ 34,4'$. Calcule a latitude do sítio de observação com uma precisão de $0,1'$. Considere $\epsilon = 23^\circ 26,4'$.
- (c) Calcule, também com precisão de $0,1'$, a distância zenital verdadeira do centro do Sol no momento em que o disco solar desaparece no horizonte, durante o pôr-do-sol.
- (d) Utilizando as informações acima, faça os cálculos necessários e desenhe o formato do Sol quando ele é visto tocando o horizonte. Se possível, use um papel quadriculado, em que cada quadradinho equivale a $2'$.

Obs: Em todos os itens, considere o diâmetro angular do Sol $32,0'$, já corrigido pela refração atmosférica.

Capítulo 6

Gráficos

Agora que já vimos como lidar com grandezas, quantidades e incertezas, precisamos de uma última ferramenta teórica: a habilidade de transformar números em desenhos. Às vezes nosso raciocínio fica bastante facilitado se as conclusões que procuramos se tornam algo que precisamos apenas, literalmente, ver. Essa lição já deve ter sido aprendida no Volume I; vejamos agora como fazer isso para dados de experimentos.

No presente caso, os desenhos (doravante chamados de *gráficos*) terão um papel similar ao dos dados-resumo: resumir massas incompreensíveis de dados. Vejamos os principais tipos.

6.1 Barras

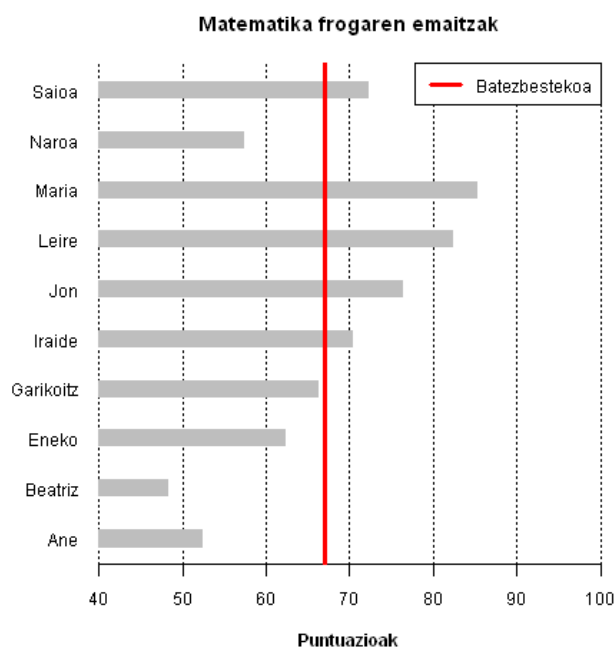


Figura 6.1: Diagrama de barras em língua basca. O título diz *Resultados do teste de matemática*; no eixo vertical há os nomes dos alunos e no eixo horizontal, a pontuação. A linha vermelha é a nota média da turma. Fonte: Euskarazko Wikipedia.

O tipo mais simples de gráfico que temos é o GRÁFICO DE BARRAS, para dados categóricos. Ele é realmente simples: conta-se quantos dados existem em cada categoria e faz-se uma barra de tamanho proporcional. Poderíamos, por exemplo, fazer um gráfico de número de alunos deste curso que está em cada série escolar. Ou então, como no exemplo 6.1, a nota de cada aluno em um teste. É possível construir muitas variações: as barras podem ser verticais ou horizontais, para baixo ou para cima, com mais de uma categoria empilhada em uma barra, com barras paralelas agrupadas, com sub-barras, etc.

Dados numéricos também podem ser representados por barras, se forem divididos em categorias. Esses gráficos recebem o nome especial de HISTOGRAMAS. Nós fizemos um deles na seção sobre números de desvio para representar as notas em categorias de um ponto. Como novo exemplo, o gráfico 6.2 mostra alturas de pés de amora negra, agrupados em faixas de cinco pés de altura.

Naturalmente, a escolha do tamanho dos intervalos de agrupamento influenciará muito na visualização. Se os intervalos forem muito grandes, você terá blocos monolíticos com pouca resolução; se forem muito pequenos, terá barras pequenas sem nenhum padrão aparente. Novamente, a escolha dependerá da natureza dos dados e do que você procura. Na falta de ideia melhor, um método simples e que dá mais ou menos certo é escolher intervalos tais que o número de barras seja $\sqrt{N}$, sendo N o número total de dados da sua amostra. Essa é a escolha padrão de alguns programas, como o Excel.

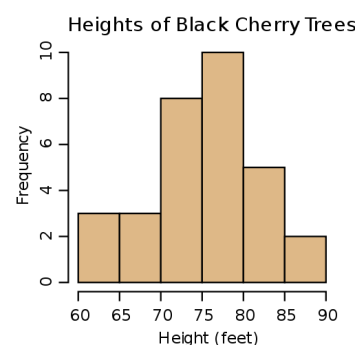


Figura 6.2: Altura de árvores de amora negra de uma fazenda, em grupos de cinco pés.

Além disso, não é necessário (embora seja comum) que todas as barras tenham a mesma largura. O gráfico 6.3 mostra uma pesquisa feita nos Estados Unidos sobre o tempo médio de voo dos passageiros em aeroportos. Como a quantidade de pessoas por vôos curtos era muito maior que nos longos, e provavelmente o interesse neles é maior, para reduzir tempos de voo etc., as barras dos vôos curtos são mais estreitas, mostrando mais detalhes.

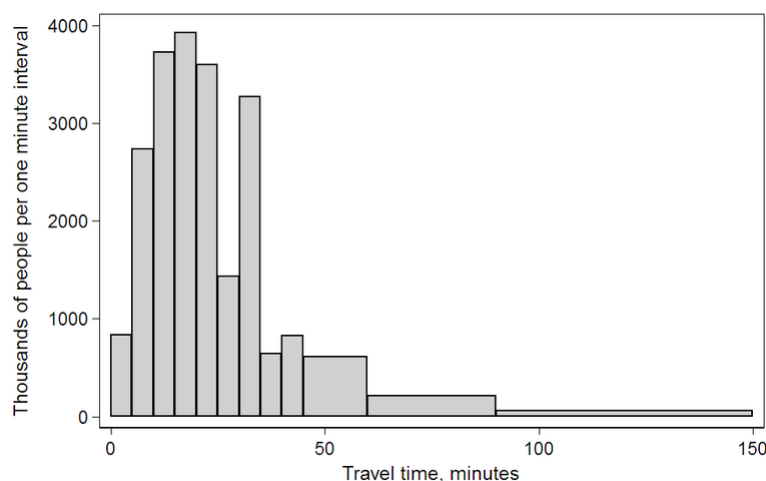


Figura 6.3: Tempo médio de viagens de avião, em minutos. O eixo vertical mede em unidade de milhares de pessoas por minuto. As barras são mais finas para os valores baixos que interessam mais.

6.2 Pizza

Da mesma forma que os números-resumo, as barras podem facilmente nos enganar. É fácil manipular a escala do gráfico para mostrar todas as barras pequenas, ou todas muito grandes, ou mesmo aumentando ou diminuindo a diferença entre barras para, por exemplo, exagerar ou esconder o crescimento de um dado com o tempo. Para isso serve aqui o mesmo artifício que usamos com os números: a normalização.

Os GRÁFICOS DE PIZZA já são automaticamente normalizados, pois cada dado é apresentado como uma fatia do todo. Você já deve ter visto muitos deles em jornais, revistas e nessas piadinhas inúteis frequentemente compartilhadas pelo Facebook. Sem nos delongarmos aqui, deixamos dois exemplos¹.

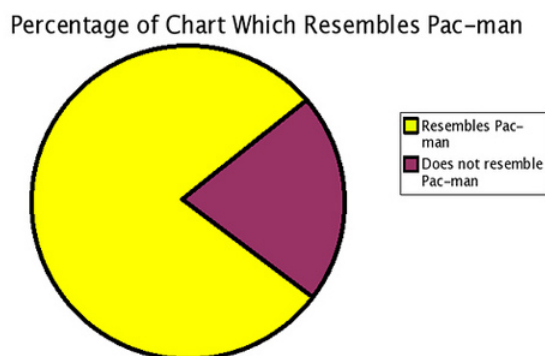


Figura 6.4: Gráfico de pizza que mostra a porcentagem do gráfico que lembra o Pac Man.

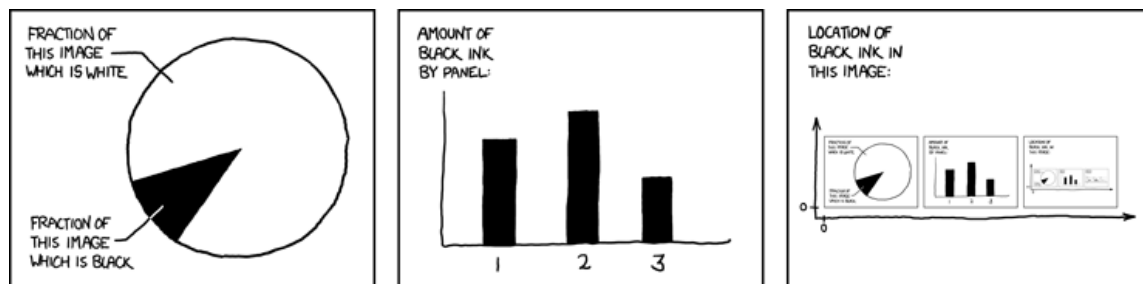


Figura 6.5: Tirinha auto-descritiva. Fonte: <http://xkcd.com/688/>

6.3 Dispersão

Entretanto, o tipo de gráfico mais usado para representar experimentos é o GRÁFICO DE DISPERSÃO. Sua vantagem é o poder de correlacionar dados visualmente. Funciona assim: tome vários “pares ordenados” da sua tabela (isto é, pares de valores que se correspondam) e represente suas posições em um plano cartesiano. O exemplo astronômico mais clássico é o Diagrama HR. Um belo dia, dois astrônomos, independentemente um do outro, resolveram representar todas as estrelas conhecidas em um gráfico de suas luminosidades pelas suas temperaturas de corpo negro. Surpreendentemente, as estrelas só ocupavam alguns pedaços bem definidos desse

¹Para outros gráfico engraçadinhos, ver <http://www.graphjam.com>

diagrama; motivados por esse interessante padrão, surgiram os primeiros modelos termodinâmicos dos interiores estelares e, assim, as teorias de evolução estelar. Mais detalhes no Volume IV.

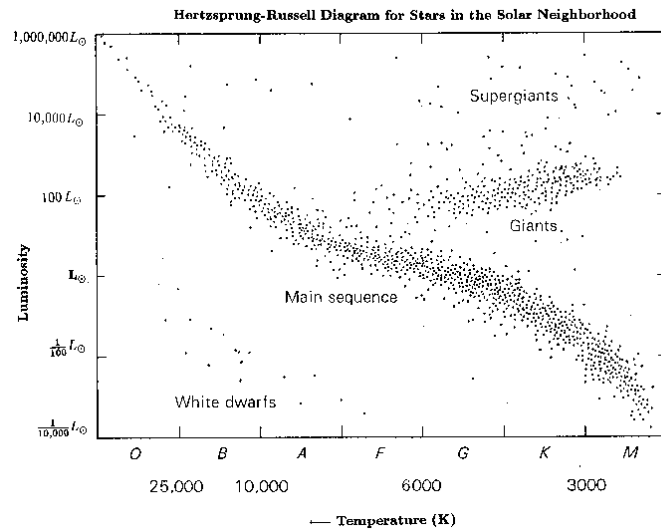


Figura 6.6: Diagrama HR para as estrelas na vizinhança solar. No eixo vertical, luminosidade em unidades de Luminosidade Solar; no eixo horizontal, temperatura em Kelvin. No diagrama aparecem também os nomes dos grupos identificados: Sequência Principal, Anãs Brancas, Gigantes e Supergigantes. Fonte: www.ucsd.edu/archive/public/tutorial/HR.html

Claro que o grau de correlação pode variar muito. A figura 6.7 mostra quatro graus de correlação diferentes, desde uma reta perfeita até nenhuma correlação. Naturalmente, existem índices estatísticos para medir numericamente a correlação entre dados; o mais famoso deles talvez seja a COVARIÂNCIA. Não vamos explorá-los aqui.

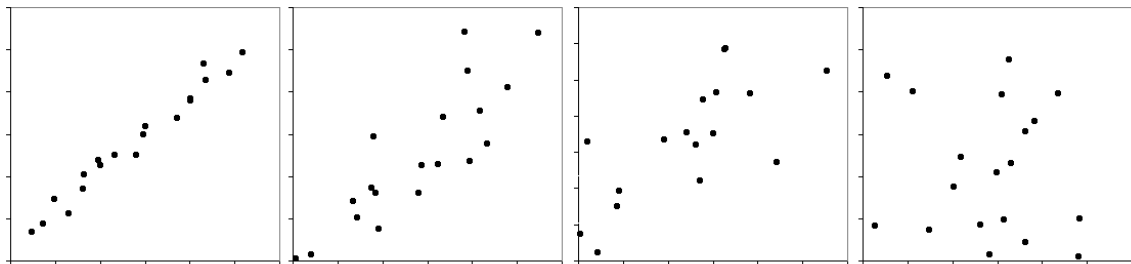


Figura 6.7: Quatro graus diferentes de correlação.

O tipo mais comum de correlação é, naturalmente, a correlação linear. Quando isso acontece, temos que encontrar a melhor reta que ajusta os pontos. No primeiro dos gráficos acima isso é fácil de fazer, mas com dados mais dispersos pode ser mais complicado. O método mais comum é o chamado MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS. Não vamos explorar quantitativamente, mas ele funciona assim: para cada reta traçada, podemos medir a distância de cada ponto a essa reta. A melhor reta possível é a que faz o quadrado dessas distâncias (e, portanto, as próprias distâncias) ser o menor possível. As razões para usarmos os quadrados são similares às apresentadas para o desvio-padrão.

- 23- Os dados a seguir foram obtidos originalmente por Edwin Hubble. Eles mudaram para sempre a cosmologia, levando à conclusão de que o universo está em expansão.

Tabela 6.1

NOME	DISTÂNCIA (Mpc)	VEL. RADIAL (km/s)
Pequena Nuvem de Magalhães	0,032	170
Grande Nuvem de Magalhães	0,034	290
NGC 6822	0,214	-130
NGC 498	0,263	-70
NGC 221	0,275	-185
NGC 224	0,275	-220
NGC 5457	0,45	200
NGC 4736	0,5	290
NGC 5194	0,5	270
NGC 4449	0,63	200
NGC 4214	0,8	300
NGC 3031	0,9	-30
NGC 3627	0,9	650
NGC 4826	0,9	150
NGC 5236	0,9	500
NGC 1068	1,0	920
NGC 5055	1,1	450
NGC 7331	1,1	500
NGC 4258	1,4	500
NGC 4151	1,7	960
NGC 4382	2,0	500
NGC 4472	2,0	850
NGC 4486	2,0	800
NGC 4649	2,0	1090

Na tabela, velocidades positivas indicam afastamento e negativas, aproximação.

- Hubble percebeu que as velocidades das galáxias estavam relacionadas a sua distância até nós. A partir desses dados, ele elaborou a famosa Lei de Hubble. Construa um gráfico e verifique qual o tipo de relação entre a velocidade e a distância. Escreva sua expressão matemática.
- Existe uma constante de proporcionalidade nessa lei, a Constante de Hubble. Estime seu valor a partir do gráfico.
- Digamos que foi encontrada uma nova galáxia a uma distância de 2,5 Mpc. Em torno de qual valor você espera que esteja sua velocidade radial?
- Pesquise na internet os valores mais acurados para a constante de Hubble. Talvez ela esteja um pouco diferente da conclusão a que você chegou; tente entender o motivo desta diferença.
- Apesar de a lei dizer que todas as galáxias estão se afastando, algumas não estão. O que elas têm em comum, além da ausência de afastamento? Como explicar esse fenômeno?

- 24- **(IAO 2007) Monitoramento de uma Estrela.**² Uma estrela brilhante foi monitorada em Mumbai durante uma noite inteira, com um telescópio de 14" em três bandas: B, V e R. Suponha que os comprimentos de onda observados possam ser aproximados por λ efetivos de 450 nm, 550 nm e 700 nm para a estrela observada. À medida que a noite passa, a estrela é vista sob diferentes ângulos zenitais e, como consequência, a luz da estrela passa por diferentes espessuras da atmosfera terrestre. Assim, a extinção atmosférica varia, sendo mínima no zênite e máxima quando a estrela está nascendo ou se pondo. Uma amostra dos dados é dada na tabela anexa. A massa de ar na segunda coluna é a massa de ar efetiva normalizada da atmosfera, considerando igual a 1 a massa de ar num ângulo zenital zero. Magnitudes estão corretas até 0,05m.

Tabela 6.2

DIST. ZENITAL (°)	MASSA DE AR	MAG B	MAG V	MAG R
15	1,035	2,80	0,85	-1,00
30	1,154	2,85	0,85	-1,00
45	1,412	3,00	0,95	-0,90
60	1,991	3,20	1,10	-0,85
69	2,762	3,50	1,30	-0,75
75	3,785	3,90	1,55	-0,55
81	6,053	4,90	2,15	-0,25

- (a) Faça um gráfico apropriado e encontre a magnitude aparente da estrela nos três comprimentos de onda, na ausência de atmosfera terrestre.
- (b) O satélite Hipparcos mediu uma paralaxe de 0,0076" para essa estrela. Marque a posição da estrela no diagrama HR.
- (c) O índice de cor pode ser calibrado em termos da temperatura estelar. Um ajuste empírico (para a região do diagrama HR em que a estrela se encontra) é dado por

$$B - V = -3,68 \log T + 14,55$$

onde T é a temperatura absoluta. Estime a temperatura da estrela.

- (d) Se essa estrela estivesse na constelação de Órion, qual seria a candidata mais provável, dentre as 4 estrelas mais brilhantes da constelação? Escreva o nome da estrela (ex.: γ *Ursae Minoris* ou *Polaris*).
- (e) Em Mumbai, suponha que a extinção varie como $\lambda^{1-\alpha}$, em que λ é o comprimento de onda. A partir dos dados, estime α .

²Caso não conheça bem os conceitos de magnitude e de paralaxe, leia os capítulos da Unidade 2 antes de fazer esta questão.

Unidade II

Medidas

Capítulo 7

Medidas de Brilho

O Capítulo 1, Volume 1, verso 1, diz: “A primeira coisa que os antigos povos viram ao olhar para o alto foi o céu”. Eles olharam o céu e viram as estrelas. Não as ouviram, não sentiram seu cheiro, não as tocaram; apenas as viram, pois isso é tudo o que se pode fazer com uma estrela. E é de se assustar quanta coisa se consegue saber de um astro a partir de meras ondas eletromagnéticas: tamanho, massa, temperatura, campos magnéticos, rotação, composição química e quase todas as características físicas e químicas que conhecemos atualmente das estrelas. Se vamos discutir como se mede coisas na investigação astronômica, começar pelas medidas de luz parece bastante indicado.

7.1 Luminosidade e Fluxo

Como vamos falar de medições de quantidade de luz, precisamos de algumas grandezas físicas que bem representem a noção intuitiva de receber mais ou menos luz de um determinado corpo. Quando falamos de objetos que podemos pegar, parar, a pergunta “quanto disso existe” é fácil de ser respondida: Podemos contar o número de maçãs, bolinhas ou ornitorrincos que temos. Ou podemos pesá-los, e dizermos “tenho 12 quilos de ornitorrincos”.

Desde o início do século XX, sabemos que a luz é emitida sempre em pequenos pacotes, os *fótons*.¹ Poderíamos, a princípio, portanto, contar o número de fótons que recebemos, tal como contamos as maçãs. Uma medição em Física, porém, é sempre feita a partir dos efeitos que o ente a ser medido causa em nossos instrumentos de medida – ou, com maior precisão de linguagem, da interação do ente com nossos instrumentos de medida. Então, as maçãs interagem com nossas mãos e olhos e sabemos, por observá-las e tateá-las, que cada uma compõe um objeto único, e podemos contá-los sem problemas. Os ornitorrincos mais calminhos também podem ser contados assim. São objetos grandes e facilmente identificáveis como unidades. A luz, porém, só é facilmente medida em unidades de fótons quando a quantidade que chega ao instrumento é suficientemente pequena, permitindo ao instrumento identificar a quantidade que chega por tempo. Se tivermos um fluxo intenso de luz (por exemplo, da lâmpada da sua casa, ou da tela do seu computador), então a medida da quantidade de fótons por tempo é inviável.

Em vez de contar objetos separáveis então, talvez seja melhor uma medida de tipo contínuo, tal como faríamos se quiséssemos medir uma certa quantidade de água, por exemplo. Se fosse uma quantidade de água que pudéssemos parar e armazenar em um recipiente, poderíamos medir o volume (que é o volume do recipiente, digamos, em litros) ou o peso (em quilos) da amostra. Mas luz não pode ser armazenada como água em um jarro; precisamos medir a luz em seu movimento. Estamos acostumados a fazer isso com água, através da idéia de *vazão*:

¹ Para a discussão mais completa sobre a natureza da luz, veja o capítulo “Luz” do Volume 4

quando discutimos quantos litros saem da boca da torneira por hora. De forma mais abstrata, precisamos apenas imaginar uma superfície (no caso, uma superfície perpendicular à saída da torneira) e medir quantas partes de água, ou quanta massa de água, passa ali a cada unidade de tempo. A isso chamamos FLUXO.

Podemos assim medir o fluxo de qualquer coisa, através de qualquer superfície: fluxo de partículas, de quantidade de matéria, de massa, de carga elétrica, de calor. . . Podemos até medir o fluxo de objetos separáveis, como os ornitorrincos: em uma debandada de ornitorrincos numa praia, quantos deles entram no mar por segundo? Ou, dando um exemplo menos esdrúxulo, podemos medir o fluxo de carros na cidade grande: quantos carros passam por aquele cruzamento em um minuto? A idéia de fluxo parece ideal para medir luz. De fato é o que é feito com ela, é o princípio de funcionamento do filme fotográfico: uma superfície que intercepta a luz, de forma que, quanto mais luz o intercepta, mais ele fica queimado. Diante de situações com diferentes quantidades de luz no ambiente, o que o fotógrafo pode regular é o tempo de exposição do filme, o tempo que fica aberto o diafragma da sua máquina fotográfica.

Bem estabelecida a idéia de fluxo, vamos ao passo seguinte. Precisamos explicitar uma idéia mais ou menos intuitiva que temos: *medir fluxo de luz é medir fluxo de energia*. Qualquer um que já usou seu corpo como uma superfície para medir fluxo (quando se esparramou na praia ao meio-dia ou quando colocou a mãozinha no fogo) concorda que é uma idéia intuitiva, embora nem sempre tenha sido assim. Tanto que, como já vimos, o Sistema Internacional de Unidades ainda possui uma unidade específica para medir fluxo luminoso, embora ninguém mais a use.

Fazendo outra rápida digressão sobre a natureza da luz, sabemos que ela também é entendida como onda eletromagnética se propagando pelo espaço, ao mesmo tempo que é entendida como fóton; sabemos também que essa onda carrega energia, de forma que cada fóton corresponde a uma quantidade limitada de energia, dada por $E = hf$, sendo f a frequência da onda (e h uma constante). Portanto, contar o número de fótons ou medir a energia são duas formas análogas de efetuar a mesma medição. Sendo mais explícitos, vamos dizer que estamos interessados em medir energia luminosa, ou, ainda mais explicitamente, um *fluxo de energia luminosa*.

Pensem em uma lâmpada, daquelas amarelas em forma de pêra que todos nós temos.² Definimos sua LUMINOSIDADE (L) como sendo a quantidade de energia emitida, por unidade de tempo:

$$L = \frac{E}{\Delta t}$$

Dessa forma, a luminosidade é a potência de um corpo luminoso: quanto maior, maior sua taxa de emissão de energia, mais energia por tempo o corpo emite. No SI, a luminosidade seria medida em Joules por segundo (J/s), ou em Watts (W).

Sabemos que essa quantidade de energia emitida por segundo se espalha no ambiente, de forma que uma parte dessa luminosidade eventualmente cruza a superfície que queremos (seja um filme fotográfico ou os nossos olhos). A princípio, parece algo complicado de medir, mas fica muito simples com o auxílio da figura 7.1. Ela é muito útil para nos lembrar que, livre de obstáculos, a luz se espalha igualmente em todas as direções, ou em outras palavras: a luz se propaga esfericamente. Repare também que, quanto mais distante você está de uma lâmpada, menos brilhante ela parece. Isso pode ser facilmente explicado com o vocabulário que construímos até aqui: a luz da lâmpada, propagando-se esfericamente, fica diluída em uma esfera cada vez maior; assim, o fluxo, a quantidade de luz passando por unidade de área, é menor quanto mais longe você está. Assim, quanto mais longe, menor o fluxo luminoso que atravessa seus olhos.

² Comentário inútil: esse tipo de lâmpada, em alemão, recebe o nome de *glühbirne*, que significa, literalmente, pêra incandescente

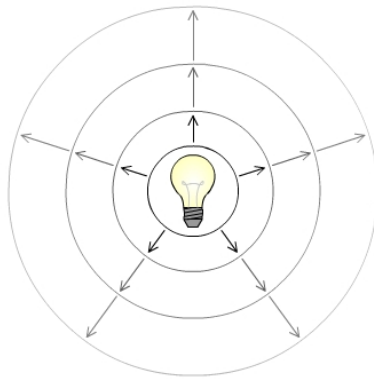


Figura 7.1: Emissão de luz pra todas as direções por uma lâmpada.

Falando em termos algébricos: Seja uma fonte com luminosidade L , cuja luz se propague esfericamente; e seja uma superfície voltada para a fonte (perpendicular aos raios luminosos) a uma distância D da fonte. A luz da fonte se propaga esfericamente, ou seja, se espalha em uma área de $4\pi R^2$. Assim, o *fluxo luminoso* F nesta superfície é dado por:

$$F = \frac{L}{4\pi D^2}$$

Essa é uma forma bem simples de calcular fluxo, com luz se propagando esfericamente (sem obstáculos) e com superfícies perpendiculares aos raios. Mas este é justamente o caso, para estudarmos objetos astronômicos! Estrelas são aproximadamente esféricas, propagam sua luz sem obstáculos, e sempre recebemos seus raios de forma perpendicular (quando apontamos nossos telescópios na direção do pequeno ponto luminoso que corresponde a ela).

- 25- Nem sempre é verdade, entretanto, que a luz se propague esfericamente. Seja, por exemplo, uma lanterna com abertura de 30° . Podemos considerar que a luz aqui se espalhe como um cone (o ideal seria uma calota esférica, mas um cone é uma boa aproximação). Imagine que a lâmpada tenha 5 W de potência.
- Qual é o fluxo luminoso na saída da lâmpada?
 - Se você segura a lâmpada perpendicular a um muro que esteja a uma distância D , em metros, qual é o fluxo na superfície do muro?
 - Agora, apontando a lanterna para baixo, digamos que exista uma xícara de café a 20 cm da saída da lanterna. Supondo que você precise de 0,06 J de energia para esquentar o seu cafezinho, quanto tempo você precisa segurar a lanterna para tanto? Faça as suposições que desejar sobre o formato da xícara. Ignore a perda de calor para o ambiente.
- 26- Imagine um tipo de luz que se propague em linha reta, ou seja, não sofra nenhum espalhamento. Mostre que esse tipo de luz mantém o mesmo fluxo a qualquer distância. Este tipo de luz é o que chamamos de laser. Usando um laser de 1 mW ($10^{-3}W$) no problema anterior, calcule o tempo para esquentar seu cafezinho.
- 27- Voltemos à propagação esférica. Sua lâmpada fluorescente tem potência de 20 W. Se você está a uma distância de 2 m, qual o fluxo que você percebe dessa lâmpada?

- 28- Podemos também calcular o fluxo luminoso na superfície de uma determinada estrela. Considerando uma estrela esférica (o que é uma excelente aproximação) com raio R , e uma luminosidade L , calcule seu fluxo superficial.
- 29- Se o fluxo médio do Sol medido daqui da Terra, quando este está no zênite, é $f = 1400 \text{ W/m}^2$, e a distância entre a Terra e o Sol é dada por $d = 1,5108 \text{ km}$, qual a luminosidade do Sol? Quantas vezes essa luminosidade é maior do que a luminosidade da lâmpada do exercício anterior?
- 30- Mercúrio, quando está no afélio, se encontra a 77 milhões de km do Sol; no periélio, a 46 milhões. Quantas vezes ele recebe mais energia no afélio do que no periélio?
- 31- Lembre-se, entretanto, que o fluxo em uma superfície depende também da inclinação da superfície em relação à fonte. Seja F o fluxo de uma dada fonte, a uma certa distância da fonte, em uma hipotética superfície perpendicular. Se a superfície estiver inclinada de um ângulo θ , de quanto será o fluxo nesta superfície?
- 32- Qual o fluxo solar no solo quando a altura do Sol é de 45° ?
- 33- Calcule o fluxo solar no solo, ao meio-dia do solstício de verão da sua cidade. Quantas vezes esse fluxo é maior que o fluxo ao meio-dia do solstício de inverno?
- 34- **(Olimpíada de Moscou, 2004)** O estudante de Moscou Vanya decidiu ir a São Petersburgo durante um feriado no fim de Março (*São Petersburgo fica bem mais ao Norte que Moscou, numa latitude de aproximadamente 60° N*). É muito prazeroso visitar esta bonita cidade e admirar suas paisagens. Tendo descido até o rio Neva, próximo à Fortaleza Petro-Pavlov, Vanya andou ao longo da parte sul da fortificação. Em alguns pontos, o Neva estava coberto por uma fina camada de gelo, e havia neve por todo o chão. Mas então Vanya tem uma surpresa: muitas pessoas estavam próximas ao muro, com roupas de banho, tomando banho de sol! E essas pessoas não estavam sentindo frio, mas diziam estar a uma temperatura amena, apesar na neve sob seus pés. Mas estava frio demais para que eles sentassem. Explique o porquê de tudo isso.
- 35- **(Olimpíada Nacional Russa)** Existe um ditado popular que diz: *“A grama é sempre mais verde do outro lado da cerca”*. Esse ditado tem alguma validação científica (excluindo fatores psicológicos)?

7.2 Sistema de Magnitudes

Mas existe ainda uma maneira que é quase sempre mais intuitiva de medir coisas: comparando-as, criando uma escala. É assim que tradicionalmente se mede o brilho das estrelas. Isso remonta à Grécia Antiga, à ESCALA DE MAGNITUDES popularizada por Ptolomeu e geralmente creditada a Hiparco de Nicéia.

Segundo sua escala, as estrelas mais brilhantes do céu seriam chamadas de “estrelas de primeira magnitude”; depois, as que tinham um brilho um pouco menor, um brilho de segunda categoria, de “estrelas de segunda magnitude”; assim sucessivamente, até as estrelas mais fracas do céu, que eram de sexta magnitude. Assim, as estrelas foram divididas em classes de brilho. Uma escala contínua de brilho só surgiria muito mais tarde, com a Ciência Moderna. Com os telescópios usados regularmente para a astronomia (já bem depois do uso “espontâneo” de Galileu), e com instrumentos mais refinados associados àqueles, é que passou a se conseguir medir, numericamente, o fluxo das estrelas na Terra. Passamos, então, a ter duas escalas: a das magnitudes gregas, usadas por astrônomos amadores, e a de fluxos medidos por chapas fotográficas e

depois por aparelhos eletrônicos. É razoável supor que exista alguma correspondência entre as duas escalas. Como associá-las?

Uma distinção importante é que os fluxos são baseados nas nossas interpretações dos objetos físicos e da natureza da luz de forma abstrata, enquanto a escala de magnitudes foi fundamentada diretamente na nossa visão (afinal, as estrelas foram divididas em classes da forma como nós a vemos). Portanto, precisamos de uma teoria de como funciona a percepção humana. Daqui saltamos então ao século XIX, às pesquisas de Hermann von Helmholtz. Ele estabeleceu que a nossa percepção pode ser bem descrita por uma escala logarítmica³. Vejamos melhor como isso opera.

Se você estiver na frente de um daqueles espelhos de camarim, com vinte lâmpadas em volta, e uma delas de repente queimar, o impacto será muito menor do que se você estiver em um quarto com duas lâmpadas e uma der defeito. A diminuição na luminosidade foi a mesma nos dois casos, mas, para o seu olho, a diferença foi muito maior no segundo. Suponhamos que os nossos sentidos realmente funcionem logaritmicamente e digamos que cada lâmpada dos exemplos acima tivessem uma luminosidade L . No segundo caso, a diferença sentida pelo olho no segundo caso seria:

$$\log 2L - \log L = \log 2 \approx 0,3$$

Mas no primeiro caso, apagando uma de 20 lâmpadas, teríamos

$$\log 20L - \log 19L = \log \frac{20}{19} \approx \log 1,05 \approx 0,02$$

Uma diferença cerca de dez vezes menor. Por outro lado, para gerar o mesmo efeito perceptivo, basta que apagássemos metade (dez) das vinte lâmpadas, já que $\log 20 - \log 10 = \log 2$. É como se nosso olho trabalhasse com porcentagens: a diferença de percepção será sempre a mesma quando apagarmos metade das lâmpadas, ou 37% delas, ou 95%, não importa qual seja a quantidade absoluta delas⁴. Em termos biológicos, podemos explicar da seguinte forma: quanto maior a luminosidade, mais saturadas ficam as células nervosas do olho, e menos sensível elas ficam a aumentos ou diminuições dessa luminosidade; portanto, a função logarítmica é uma aproximação muito melhor para nossa percepção do que a função linear. Se quisermos assustar uma pessoa que esteja debaixo de um holofote, da mesma forma que assustaríamos uma acendendo uma segunda lâmpada num banheiro que só tenha uma, precisaríamos acender outro holofote; acender uma lâmpada, ao lado do holofote, não fará nenhuma diferença.

Assim, poderíamos fazer a seguinte escala de intensidade luminosa: tomamos uma lâmpada como unidade, e ela teria intensidade 1. Daí, se dobrássemos a luminosidade (pegando duas lâmpadas-padrão, por exemplo), teríamos intensidade 2. Quatro lâmpadas, intensidade 3; oito, intensidade 4; 2^{10} lâmpadas, intensidade de $\log_2 2^{10} = 10$.

Mas a escala do Hiparco era para estrelas e não lâmpadas. Em meados do século XIX, o astrônomo inglês Normam Pogson formalizou a escala de magnitudes estelares determinando que uma estrela típica de primeira magnitude (dentre as mais brilhantes do céu) é cerca de 100 vezes mais brilhante que uma estrela típica de sexta magnitude (as mais fracas que conseguimos ver a olho nu). Como podemos ver estrelas ainda menos brilhantes com o telescópio, podemos então estender a escala de magnitudes, de forma que, cada vez que o número da magnitude aumenta

³ Para entender melhor como funciona a função logarítmica, veja o apêndice de funções, no Volume 2

⁴ É importante notar que nossos outros sentidos também funcionam assim. Se alguém gritar com você num campo vazio, o efeito será muito diferente de um grito em meio ao ruído de uma multidão; precisaríamos de duas multidões para ausar o mesmo impacto de dobrar o volume de voz. Da mesma forma que a escala de magnitudes, existe uma *escala de intensidade sonora* que mede, em decibéis, nossa percepção de som. Algo similar pode ser dito para o olfato e para o paladar

em cinco unidades, a luminosidade aumenta cem vezes. Uma estrela de sexta magnitude seria então cem vezes mais brilhante que uma de magnitude 11; esta, por sua vez, também teria um fluxo cem vezes maior que uma de magnitude 16.

Fazendo uma construção mais formal: temos que a escala de magnitudes se relaciona à escala de fluxo da seguinte forma:

$$m = k \log F + C$$

onde k e C são constantes de ajuste. A primeira constante determina o tamanho dos intervalos da escala, que podemos saber usando a relação definida por Pogson ali em cima:

$$m_1 - m_6 = k \log \frac{F_1}{F_6} \Rightarrow 5 = k \log 100 \Rightarrow k = 2,5$$

A segunda constante determina o ponto zero da escala. O padrão estabelecido por Pogson foi de forma a definir o brilho de *Polaris* como de magnitude 2.⁵ Mas depois descobriu-se que o brilho dela era levemente variável, então o padrão foi transferido para Vega, a estrela mais brilhante do céu do norte, definida como a magnitude 0. Repare que, como Vega é a quinta estrela mais brilhante do céu, as outras quatro mais brilhantes possuem magnitude negativa!

Assim, definimos a escala contínua de MAGNITUDE APARENTE dos astros como:

$$m = -2,5 \log \frac{L}{4\pi d^2} + C$$

onde L é a luminosidade do astro e d é sua distância até nós. Não colocamos propositalmente um valor para C , pois é chato ficar decorando isso. Uma maneira mais esperta de resolver o problema é sempre calcular magnitudes de estrela comparando com outras, digamos, duas estrelas em um mesmo problema, ou conhecendo os dados de alguma estrela-padrão. Assim:

$$m - m_* = -2,5 \log \frac{F}{F_*} = -2,5 \log \frac{L \cdot d_*^2}{L_* \cdot d^2}$$

Um fato que costuma nos confundir, ao lidarmos com escalas de magnitude: As estrelas mais brilhantes têm uma magnitude menor. Isso porque Hiparco, em sua escala, deu o número 1 à estrela mais brilhante do céu e, às outras menos brilhantes, associou números maiores. Algebricamente, isso se traduz como um valor negativo de k , como de fato concluímos.

Veja, por fim, alguns exemplos de magnitudes aparentes na tabela 7.1:

- 36- Estime, a olho nu, as magnitudes das cinco estrelas mais brilhantes do céu (não considere o Sol).
- 37- Qual o fluxo da estrela Sirius? Sua magnitude está na tabela.
- 38- Quantas vezes o Sol é mais brilhante que a Lua?
- 39- Quantas estrelas de magnitude 0 têm o mesmo brilho que as $4,4 \cdot 10^8$ estrelas que tem magnitude aparente entre 19 e 20?
- 40- **(IAO 1997)** Durante uma guerra estelar, uma civilização maluca cortou uma estrela em duas metades (sem variar a densidade e a temperatura). De que forma este feito altera a magnitude da estrela? Qual a magnitude da estrela dupla resultante, comparada com a estrela original?

⁵ No colégio costumamos ver um exemplo interessante disto, com a escala de temperaturas. As escalas *Celsius* e *Kelvin* só se diferenciam pela sua origem, ou por uma translação: um grau Celsius é o mesmo intervalo de um grau Kelvin. Mas a escala *Fahrenheit* tem a largura diferente das outras duas, de forma que são 180 graus entre fusão e ebulição da água, contra 100 na Celsius. Assim, para passar de uma para outra, precisamos de uma contração na escala, multiplicando-a por um valor k .

Tabela 7.1

ASTRO	MAGNITUDE
Sol	-26,7
Lua Cheia	-12,6
Supernova de 1054	-6
Vênus (max)	-4,7
ISS (max)	-4,5
<i>mag. limite no céu diurno</i>	-4
Vênus (min)	-3,8
Júpiter(max)	-2,8
Sírius	-1,3
Canopus	-0,7
Vega	0
Aldebaran	0,8
mag. limite na cidade grande	3
Gal. Andrômeda	4
Vesta (max)	5,1
Urano (max)	5,5
<i>mag. limite em condições perfeitas</i>	6,5
Netuno (max)	7,7
Plutão (max)	13,5
Éris \o/ (atual)	18,7
<i>mag. limite dos telescópios de 8m</i>	27
<i>mag. limite do Hubble no visível</i>	30

- 41- Calcule a diferença de magnitudes aparentes de Marte em oposição e em conjunção. Faça o mesmo para Júpiter. Qual dos dois tem a magnitude mínima mais baixa? Qual dos dois apresenta maiores variações de brilho?

7.3 Magnitude Absoluta

A magnitude aparente de uma estrela é uma medida de seu fluxo, ou seja, de seu brilho *aparente*, como o próprio nome diz. A princípio, medindo fluxos ou magnitudes de estrelas, não sabemos nada sobre suas luminosidades. Uma estrela ter a magnitude maior ou menor que outra não significa que ela seja mais ou menos luminosa que outra; podemos ter uma estrela menos luminosa muito mais próxima de nós do que outra mais luminosa e, assim, sua magnitude pode ser menor (isto é, mais brilhante). Assim, pelo vício da escala de magnitudes e, ao mesmo tempo, a necessidade de se comparar os brilhos *intrínsecos* dos objetos, criou-se a ESCALA DE MAGNITUDE ABSOLUTA. Para estrelas e galáxias, a magnitude absoluta M é definida como a magnitude que o corpo teria se estivesse a 10 parsecs de distância. Assim, colocadas a uma mesma distância, temos um padrão para comparar as luminosidades verdadeiras das estrelas. Numericamente, fazemos

$$\begin{aligned}
 M &= -2,5 \log \frac{L}{4\pi \cdot (10)^2} + C \\
 &= -2,5 \left(\log \frac{L}{4\pi} - \log 100 \right) + C \\
 &= -2,5 \log \frac{L}{4\pi} + (C + 5)
 \end{aligned}$$

Da mesma forma que fazíamos antes, entretanto, calculamos sempre a diferença entre duas magnitudes absolutas, para eliminar o desconforto das constantes excessivas. Assim:

$$M - M_* = -2,5 \log \frac{L}{L_*}$$

Nessa fórmula, as magnitudes absolutas das duas estrelas são agora relacionadas pelas luminosidades, e não pelos fluxos medidos na Terra. Como antes, também, as magnitudes e luminosidades de qualquer estrela podem ser relacionadas se soubermos a luminosidade e a magnitude absoluta de uma estrela conhecida, por exemplo o Sol.

Dentro do Sistema Solar, utiliza-se outra forma para magnitudes absolutas: a magnitude absoluta H de um corpo do Sistema Solar é o seu brilho hipotético a 1 UA do Sol, 1 UA do observador, e visto com ângulo de fase nulo (isto é, em oposição, ou em fase cheia). Repare que isto é geometricamente impossível a menos que o observador esteja no centro do Sol. Mas como é uma definição abstrata, não precisamos nos preocupar com isso; a definição é ainda muito útil para comparar os brilhos “intrínsecos” dos objetos (mesmo que a maioria deles não emita luz própria). Na verdade, a comparação entre diferentes valores de H para os asteróides, por exemplo, é um ótimo indicativo de seus tamanhos e albedos.

Para converter uma magnitude absoluta estelar M em uma planetária H , basta subtrair 31,57.

42- Prove isto.

Voltemos às magnitudes estelares. A diferença fundamental entre a magnitude absoluta de uma estrela e sua magnitude aparente é dada pela sua distância até nós. Então podemos inverter o problema: dado que conhecemos a magnitude absoluta de uma estrela (porque vimos em uma tabela), podemos medir sua magnitude aparente e, assim, descobrir a distância da estrela até nós. Assim

$$\begin{aligned}
 m - M &= -2,5 \left(\log \frac{L}{4\pi d^2} - \log \frac{L}{4\pi} \right) + C - C - 5 \\
 &= -2,5 \log \frac{1}{d^2} - 5 \\
 &= 5 \log d - 5
 \end{aligned}$$

Como veremos no próximo capítulo, boa parte das técnicas de medição de distância se reduzem a técnicas para estimar a magnitude absoluta de astros.

- 43- Uma estrela tem luminosidade 10 vezes maior que outra. Qual a diferença entre suas magnitudes absolutas?
- 44- Uma estrela tem o triplo do fluxo de outra, quando medido aqui na terra. Considerando que ambas tenham a mesma luminosidade, qual a razão das distâncias das duas estrelas? Qual a diferença das magnitudes aparentes? E absolutas?

- 45- Calcule a magnitude absoluta M do Sol.
- 46- Calcule a magnitude absoluta H da Lua e de Marte. Compare com suas respectivas magnitudes aparentes de oposição (fase cheia).
- 47- **(IAO 2000)** Jovens cientistas do território da República do Komi (da Federação Russa) registraram, há poucos dias, um novo objeto aparentando ser uma estrela binária eclipsante. Entretanto, o período desta estrela não era estável: a magnitude estelar do objeto é atualmente de 24,32. Uma vez a cada 7 a 11 segundos esta magnitude aumenta para 24,52 durante 0,2 a 0,3 segundo. Após análises ficou claro que este objeto pisca-pisca representa olhos de um grupo de gatos absolutamente negros, sentados sobre um pequeno corpo absolutamente negro, no nosso sistema solar e que estão olhando na direção do Sol! Um dos gatos está piscando os olhos! Calcule o número de gatos, deste grupo de gatos, sentados no pequeno corpo e olhando para o Sol. Considere que todos os gatos tenham o mesmo tamanho.
- 48- Sejam os gatos do exercício anterior. Se o corpo onde os gatos estão sentados fosse levado a uma distância de 4 vezes a distância atual desse corpo até nós, calcule a magnitude máxima e mínima que veríamos. (Considere que esses gatos são especiais, e seus olhos não são refletores de luz mas *emissores* e, portanto, emitem sempre a mesma quantidade de luz! Pode não ser realista, mas pense na poesia presente na imagem, gatos com pequenas estrelas nos olhos. . . *-*)

Capítulo 8

Medidas de Distância

Por muito tempo pensou-se que as estrelas fossem corpos pontuais e que estivessem presas a uma esfera cristalina que gira em torno da Terra. Ainda hoje nós usamos o conceito de Esfera Celeste, porém desde a Revolução Copernicana a nossa compreensão sobre o céu mudou drasticamente e, como dito no último capítulo, é impressionante a quantidade de informações que podemos obter de uma estrela apenas com a sua luz que chega até nós, sendo que a obtenção da sua distância a nós é importantíssima para a determinação de suas propriedades. A partir de agora nós também devemos enxergar a Esfera Celeste em profundidade, realizando nossa própria Revolução Renascentista (caso você goste de pintura e perspectiva!) e estudaremos alguns dos métodos usados pelos astrônomos para essa tarefa.

8.1 Medidas na Terra

Antes de aprendermos a medir distâncias universo afora, precisamos entender um pouco como fazemos isso aqui, no nosso planeta. Para isso, nada mais razoável que recorremos à nossa tradição de “medidas na terra”, a *geometria*. De fato, a utilidade original da geometria é que, usando relações entre retas, pontos e ângulos, sabendo os tamanhos de algumas coisas, podemos conseguir tamanhos de outras coisas. É assim que, sabendo o tamanho do diâmetro de um círculo, podemos conhecer seu perímetro, multiplicando pelo número mágico π . Ou, conhecendo o lado de um quadrado, obtemos a distância que é a sua diagonal, multiplicando por $\sqrt{2}$.

Também para saber longas distâncias, podemos usar a geometria. Digamos, por exemplo, que você tem uma fazenda e deseja vendê-la. Sua fazenda é realmente grande, de forma que não dá para medir suas dimensões contando passos ou usando uma trena¹. É importante saber o tamanho da fazenda para vendê-la, já que o preço é por hectare (por unidade de área).

Digamos que haja uma árvore ou uma haste na fronteira em que sua fazenda acaba. Se você souber a altura da árvore ou da haste, fica fácil: basta comparar a altura da árvore com a altura que você vê; com isso, usando uma simples semelhança de triângulos, você consegue a distância. Dá pra fazer algo parecido na horizontal, usando as distâncias entre duas árvores. Ou, em vez de comparar com o comprimento aparente, você pode usar diretamente a abertura, vendo o ângulo que compreende a distância entre as árvores.

Vamos visualizar geometricamente a situação: você está alinhado com uma das árvores, numa linha aproximadamente perpendicular à linha que liga as árvores. Assim, existe um triângulo

¹De fato, essa é a maneira mais simples de fazer medidas: estabelecer um padrão, e comparar os objetos a serem medidos com o objeto-padrão. No caso das distâncias, isso significa, por exemplo, estabelecer o tamanho de “um metro” e, na hora de medir algo, colocar esse metro ao lado do objeto, contando quantos metros (ou quantas frações de metro) dão o tamanho do objeto.

retângulo cujos vértices são você e as duas árvores. Você conhece o tamanho da base do triângulo (a distância entre as árvores, d_{arv}), e conhece também o ângulo oposto à base (é o ângulo de abertura ϕ com que você vê as árvores). Assim, é fácil descobrir a altura do triângulo, d_{voce} :

$$d_{voce} = d_{arv} \cdot \tan \phi$$

Esse método, e todas as suas variações, são chamados de TRIANGULAÇÃO, pois a idéia é que, montando grandes triângulos horizontais e manipulando suas propriedades, podemos encontrar as medidas que quisermos.

Um problema de medir distâncias da maneira descrita é que nem sempre temos dois objetos de referência e, quando temos, raramente sabemos a distância entre eles (não é razoável pensar, afinal, que você soubesse a distância entre duas árvores quaisquer). Mas existe uma maneira esperta de resolver esse problema: fazendo o triângulo ao contrário, fazendo a base na extremidade em que você está em vez da extremidade do ponto distante.

Na fazenda, faríamos o seguinte: fincaríamos duas hastes a uma distância razoável, e observaríamos uma árvore dos dois marcos. Faça essa experiência com o seu dedo, abrindo e fechando um dos olhos; ele muda de posição, com relação aos objetos de fundo. Da mesma maneira, a árvore mudaria de posição com relação a, digamos, as montanhas ao fundo (veja figura). Esse método é conhecido como PARALAXE.

Assim, em vez da distância entre as árvores lá, usamos a distância entre as hastes aqui; em vez de usar o ângulo de abertura, usamos o ângulo de paralaxe, segundo o qual a árvore se desloca. Fazendo essas substituições, as relações trigonométricas são as mesmas.

É claro que as montanhas também sofrem paralaxe quando as observamos de posições diferentes. Mas o importante é que as montanhas estejam pelo menos uma ordem de grandeza mais distantes que a árvore; assim, na medida da distância à árvore, a paralaxe das montanhas é desprezível, e podemos considerá-las “fixas” no fundo. Poderia até ser que estivéssemos em uma grande planície na savana africana, tendo somente árvores isoladas em diferentes distâncias para medir. O método da paralaxe ainda seria em essência o mesmo, só que um pouco mais complicado (compararíamos dois triângulos com dois diferentes ângulos de paralaxe). Mas, em geral, é fácil conseguir uma referência fixa de fundo.

A paralaxe é um método muito importante; sem saber, você a usa todos os dias! De fato, uma das formas usadas pelo cérebro humano para estimar distâncias é essa: comparar o mapa gerado pelo olho direito com o gerado pelo olho esquerdo; quanto maior for a discrepância na posição dos objetos, mais próximos eles estão. É assim que você, olhando para os objetos, sabe se eles estão próximos ou distantes². Os óculos 3D seguem o mesmo princípio.

8.2 Paralaxe no Espaço

Depois de ter revisto os métodos da geometria, nos perguntamos como medir distâncias no espaço. A resposta imediata que vem à mente é: vamos estender a paralaxe para o espaço! Para as grandes distâncias do espaço, precisaremos de linhas de base bem maiores. Não podemos ficar caminhando tanto para fixar marcos, mas podemos usar os movimentos naturais do sistema: a rotação da Terra e sua revolução em torno do Sol. No primeiro caso, a linha de base é o raio da Terra; nós esperamos seis horas (um quarto de dia) entre as medidas e chamamos o método de *paralaxe geocêntrica*. No segundo, a linha de base é a distância Terra-Sol; esperamos três meses (um quarto de ano) entre as medidas e chamamos o método de *paralaxe heliocêntrica*.

²Na verdade, embora a paralaxe seja realmente importante, existem outras maneiras para o cérebro estimar distâncias CITAAAAAAR.

O que estamos fazendo implicitamente é estender a geometria terrestre para o espaço. Em outras palavras, quando acreditamos que o método vale para medir distâncias aos astros, estamos supondo que a geometria da Terra é igual à geometria do espaço (ou falando melhor, que a geometria é também uma *astrometria*). Repare que essa não é uma suposição automática: os Céus são diferentes da Terra em quase todos os aspectos, porquanto não há razão para supor que as medidas na Terra funcionem no Céu. Historicamente, entretanto, isso não foi um problema; já para os gregos, a geometria, vinda do Egito como um conjunto de técnicas agrimensoras, já havia ascendido às categorias metafísicas mais universais³. Os astrônomos de Alexandria (Hiparco, Ptolomeu, etc.) usavam abundantemente os métodos geométricos para cálculos astronômicos. A paralaxe de planetas, sei lá! Hoje em dia mesmo, entretanto, não acreditamos mais que a geometria euclidiana possa ser expandida pelo universo; em vez disso, acreditamos nos espaços curvos da Relatividade Geral. Assim, a paralaxe não poderia ser usada para distâncias muito grandes, em que efeitos relativísticos se sobressaíssem (não que isso faça diferença na prática, já que o método geométrico perde sua validade em distâncias bem menores que esse limite).

Hoje é mais raro fazermos cálculos geométricos; em vez disso, usamos a geometria para realizar cálculos algébricos. No nosso caso, esses cálculos serão especialmente simples. A razão é que, na maioria dos casos (incluindo todos os desse curso), estaremos interessados na paralaxe heliocêntrica das estrelas. Acontece que todas as estrelas estão muito distantes de nós: enquanto nós estamos a 8 minutos-luz do Sol, a estrela mais próxima (Proxima Centauri) está a mais de 4 anos-luz! Assim, o ângulo de paralaxe heliocêntrica de todas as estrelas é menor que um segundo de arco.

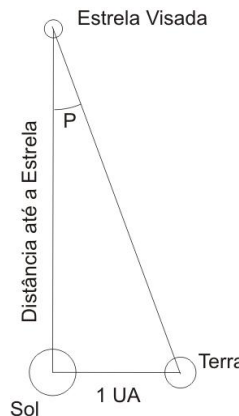


Figura 8.1: Triângulo formado pela Terra, Sol e estrela visada (com um dos lados exageradamente pequeno, para facilitar a visualização).

Veja a figura 8.1. Uma vez tendo o ângulo de paralaxe, podemos usar a definição de tangente para descobrir a distância:

$$\tan \pi = \frac{1}{D(\text{UA})}$$

Onde π é a paralaxe (que aqui não tem nenhuma relação com o número $\pi = 3,1415\dots$) e D é a distância, em Unidades Astronômicas, da estrela ao Sol. Mas para ângulos muito pequenos, o valor da tangente - se expressado em radianos - tem um valor muito próximo do valor do

³Na filosofia de Platão, por exemplo, as Idéias eram superiores às coisas materiais, e mesmo entre as idéias havia uma hierarquia; as formas geométricas, por sua simplicidade e pureza, ocupavam as mais altas camadas desta hierarquia. A idéia suprema, entretanto, era a idéia de Bem, que funcionava como um lumiar para o mundo.

ângulo⁴. Com isso, nossa fórmula fica assim:

$$\pi(\text{rad}) = \frac{1\text{UA}}{D(\text{UA})}$$

Há ainda outro incômodo de ordem prática: usar o ângulo em radianos e as medidas em unidades astronômicas é desconfortável: como o ângulo sempre vai ser muito menor que um radiano, a distancia será um número muito grande de unidades astronômicas. Logo, convertamos de radianos para segundos de arco⁵:

$$\pi('') \approx \frac{206265}{D(\text{UA})}$$

Mas, o problema da distancia persistiu, além de ter desaparecido o conveniente 'um' do numerador da fração. Para isso, criamos uma nova unidade de distância: o PARSEC. Por definição, um parsec é a distância de uma estrela que tem paralaxe de 1'' de arco. Com isso, ficamos com a fórmula:

$$\tan \pi('') \approx \frac{1}{D(\text{pc})}$$

Graças à sua conveniência, o parsec é a unidade de distância mais usada em astronomia - mesmo para distâncias muito maiores que o alcance do método da paralaxe e mesmo sabendo que hoje as distâncias são calculadas por computadores e satélites. Em segundo lugar vem o ano-luz, muito comum em textos de divulgação e de interpretação bastante intuitiva (submetendo medidas espaciais às medidas temporais). Já no sistema solar, também por conveniência, impera a Unidade Astronômica.

- 49- Revendo os últimos passos, calcule quanto vale um parsec em UA.
- 50- Calcule o comprimento de um ano-luz em metros. Sabendo que a distância média da Terra ao Sol é de aproximadamente 150 000 000 km, calcule quanto vale um parsec em anos-luz.
- 51- Faça uma tabela de conversão entre parsec, anos-luz e UA.
- 52- Calcule a distância das seguintes estrelas:
 - (a) Alfa Centauri ($\pi = 0,76''$), a estrela mais próxima do Sol.
 - (b) Sirius ($\pi = 0,37''$), a estrela mais brilhante do céu noturno.
 - (c) Antares ($\pi = 0,009''$), a estrela mais vermelha do céu.
- 53- Se a paralaxe de uma estrela é $0,312'' \pm 0,006$, qual o erro no valor da sua distância?

8.3 Outras Paralaxes

Como saber a distância de uma estrela, quando esta tem paralaxe (o ângulo) muito pequena, a ponto de não conseguirmos medi-la e não conseguirmos usar a paralaxe heliocêntrica? Para esses casos nos restam métodos menos diretos de se calcular a distância da estrela. Esses outros métodos, por analogia, acabaram recebendo também o nome de paralaxe, apesar de usarem pouca ou nenhuma geometria; por oposição a eles, a paralaxe tradicional ficou conhecida como *paralaxe trigonométrica*. Vamos a eles:

⁴Ver apêndice de Trigonometria. Em todo caso, vocês também podem testar numa calculadora científica, com ângulos menores que 1 rad

⁵Para essa conversão, basta saber que $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$, e que $1^\circ = 60' = 3600''$.

8.3.1 Paralaxe Espectroscópica

A PARALAXE ESPECTROSCÓPICA consiste, basicamente, de obter o tipo espectral da estrela, e a partir do tipo espectral estimar sua magnitude absoluta, a partir do diagrama HR. Com posse da magnitude aparente e da estimativa da magnitude absoluta, pode-se estimar a distancia da estrela usando a fórmula:

$$m - M = 5 \log(d) - 5$$

Onde m é a magnitude aparente, M a magnitude absoluta e d a distância (como deduzimos no capítulo 7).

Vocês devem estar pensando: “Nossa, que método mais impreciso! É quase um chute”. Bem se você for estimar a distancia de uma estrela, solitária, realmente este método não é nem um pouco preciso. Porém, quando se vai medir a distancia de aglomerados abertos (grupos de estrelas com mais ou menos a mesma distancia de nós), por exemplo, este método se mostra bastante eficiente, pois é possível criar um diagrama HR a partir das estrelas deste aglomerado.

8.3.2 Paralaxe Dinâmica

Este método usa estrelas binárias para estimar a distância. Isso é feito medindo o brilho aparente das estrelas, seu período e seu semi-eixo maior angular⁶. Com essas medidas, usa-se Terceira Lei de Képler generalizada:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$$

Como já medimos T , se soubermos as massas podemos obter o semi-eixo maior real; comparando-a com o semi-eixo maior angular, sabemos a distância. Para conseguirmos a massa, usamos a magnitude aparente e a relação massa-luminosidade. A magnitude aparente é proporcional à luminosidade sobre a distância ao quadrado; a luminosidade, por sua vez, é proporcional à massa. Assim, temos duas equações (a Lei de Kepler Generalizada e a Equação da Magnitude Aparente) e duas incógnitas (a massa do sistema e sua distância). Basta então resolver o sistema.

Ocorre que nem sempre é fácil resolver o sistema; assim, muitos preferem usar um método iterativo: primeiro eles supõem massas quaisquer para a estrelas (por padrão, uma massa solar) e encontram com isso um valor para a distância. Daí, usando esse valor de distância, calcula-se ao contrário e encontra-se uma nova estimativa para a massa. Essa nova estimativa para a massa dá uma nova estimativa para a distância, que dá uma estimativa mais nova para a massa, e assim sucessivamente. Depois de muitas iterações (um computador pode fazer esse trabalho monótono em pouco tempo), consegue-se acurácias tão boas quanto 5%, na medida da distância.

8.3.3 Paralaxe Rotacional

Nesse, usamos galáxias espirais próximas. A idéia é sempre comparar duas grandezas, uma que depende da distância com outra que não depende. No caso, são o movimento próprio de alguma estrela de uma galáxia, que tem que fornecer uma velocidade compatível com as velocidades radiais nas bordas do disco. Tudo isso corrigido pela inclinação da galáxia.

8.4 Velas Padrão

Os métodos de velas-padrão se baseiam na seguinte suposição: existem objetos iguais espalhados por aí. A idéia é que existem objetos conhecidos, com luminosidades conhecidas e bem

⁶O semi-eixo maior angular é o semi-eixo maior contado em unidades de angulo visto da Terra, que é proporcional ao semi-eixo maior e a distância, no caso: $\alpha = \frac{a}{R}$, para α medido em radianos.

determinadas; encontrando um desses objetos, podemos medir seu brilho aparente e, com isso, conhecer sua distância. Neste sentido, a *paralaxe espectroscópica* é um tipo, rudimentar, de método de vela-padrão.

8.4.1 Cefeidas

As estrelas cefeidas têm um período de variação de brilho bastante regular, variando seu brilho entre 0,3 e 3,5 magnitudes, com um período de 1 a 100 dias. Mas o mais importante – o que foi descoberto pela Leavitt – é que existe uma relação clara entre o período de sua pulsação e sua luminosidade. É essa relação que permite que as usemos para medir distâncias. Medindo o período, descobre-se a luminosidade e, com ela, sabendo a magnitude aparente (que é só medir), temos a distância. A relação período-magnitude absoluta para essas estrelas é a seguinte:

$$M = -2,81 \cdot \log P - 1,43$$

onde M é a magnitude absoluta e P é o período, em dias. Podemos ver essa relação na figura 8.2

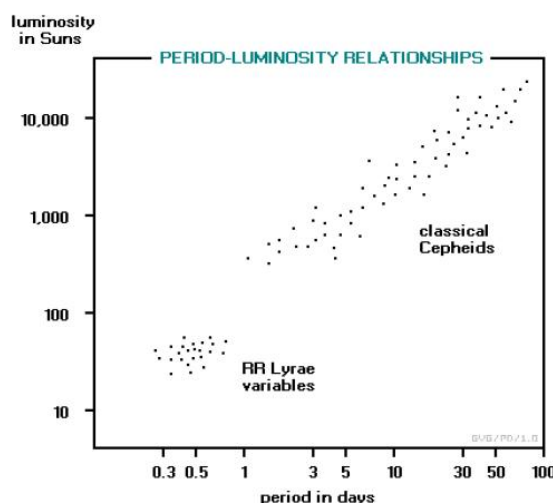


Figura 8.2: Gráfico mostrando a relação período-luminosidade para as Cefeidas e RR Lyrae.

8.4.2 RR Lyrae

As RR LYRAE são as primas menores das cefeidas, com período em geral menor que um dia. Elas são suficientemente menos brilhantes para que não as consigamos distinguir em galáxias; mas justamente por serem menores, são mais abundantes e, portanto, mais fáceis de se achar em objetos um pouco mais próximos. Enquanto as cefeidas costumam ser usadas para indicar distâncias de galáxias autônomas, as RR Lyrae, são o principal marcador para os aglomerados globulares.

8.4.3 Supernovas Ia

As supernovas de tipo Ia, que são associadas com a queima explosiva do carbono, ocorrem em sistemas binários, quando uma estrela anã branca com massa próxima ao *limite de Chandrasekhar*⁷

⁷O colapso definitivo da anã branca, devido à sua autogravidade, é impedido devido à *pressão de degenerescência dos elétrons* que é característica da matéria degenerada. Entretanto, existe um valor-limite para a massa da anã branca,

recebe massa de sua companheira e ultrapassa esse limite . Isso provoca um colapso gravitacional que em alguns segundos deflagra a fusão nuclear do seu carbono degenerado em uma explosão extremamente energética e tão violenta que pode não sobrar remanescente. Tendo em vista as altíssimas e consistentes luminosidades desses fenômenos, os astrônomos consideram as supernovas tipo Ia como velas padrão e suas observações tem sido muito utilizadas na determinação de distâncias para a cosmologia.

A tabela 8.1 mostra métodos para determinar distâncias, e seus respectivos alcances⁸:

Tabela 8.1: Métodos para determinar distâncias e seus respectivos alcances.

Método	Distância de Alcance
Radar	10 UA
Paralaxe Heliocêntrica	1000 pc
Paralaxe Espectroscópica	10 Kpc = 10 000 pc
Estrelas Variáveis	4 Mpc = 4 000 000 pc

- 54- Porque não se medem distâncias também com os outros tipos de estrelas variáveis?
- 55- Calcule a distância e o diâmetro da galáxia espiral do Triângulo, que aparece no céu com 1° de diâmetro. Nela foi observada uma cefeida de magnitude 19,8 e período de 13 dias.
- 56- Se a amplitude de variação de brilho de uma cefeida é igual a 2,0, qual a variação de seu raio? Quando o brilho é máximo, a temperatura da Estrela é 9.000 K; quando é mínimo, 7.000 K.

acima do qual ela não é mais sustentada pela pressão de degenerescência de elétrons. Essa massa chama-se *limite de Chandrasekhar* para anãs brancas, que é cerca de 1,4 massas solares.

⁸A técnica de radar consiste no seguinte: miramos no objeto (planeta, asteróide), atiramos um feixe de radar em sua direção, esperamos o feixe refletir no objeto, e o captamos na volta. Como a velocidade da luz é constante, sabendo o tempo que as ondas de radar demoraram a fazer seu percurso, calculamos a distância.

Unidade III

Telescópios

“E o senhor”, gritei num ímpeto de rebelião, por que não toma posição, por que não me diz onde está a verdade?

Guilherme permaneceu um tempo em silêncio, levantando em direção à luz a lente na qual estava trabalhando. Depois abaixou-a sobre a mesa e me mostrou, através da lente, um instrumento de trabalho: “Olha”, disse-me, “o que está vendo?”.

“O instrumento, um pouco maior.”

“É isso, o máximo que se pode fazer é olhar melhor.”

Umberto Eco, O Nome da Rosa

Capítulo 9

O Telescópio

Na astronomia se trabalha com objetos muito distantes, tornando-os muito pequenos visualmente e com brilho muito pequeno. Isso faz com que só consigamos ver apenas uma minúscula parte do que está acima das nossas cabeças¹.

Com o que vemos a olho nú, a Astronomia conseguiu se desenvolver por muitos séculos. Mapeamos o que víamos, estabelecemos um sistema para classificação do brilho das estrelas, notamos muitos movimentos que ocorriam no céu, organizamos nosso tempo e os calendários, e propomos modelos de universo. Mas, nossos sistemas de universo eram apenas baseados no movimento dos planetas, da Lua e do Sol, e pouco conseguiam afirmar sobre a natureza dos corpos celestes.

Para conseguir afirmar mais sobre a natureza dos corpos, era necessário que investigássemos essa natureza, e para isso precisaríamos de um contato mais próximo com os corpos. Então surgem 3 soluções para o problema:

- Viajar para o corpo para o estudarmos;
- Laçar o corpo com uma corda gigante e pucha-lo para mais perto;
- Usar algum instrumento para aproximar a imagem, torná-la mais forte e brilhosa.

Não é necessário que sejam citados argumentos que tornam as duas primeiras ideias implausíveis, restando portanto apenas a última como solução plausível para esse estudo.

Pegamos então um instrumento ótico bem comum e simples, que serve para aproximar a imagem de objetos no nosso cotidiano: a LUPA². Em uma noite apontamos essa lupa para o céu e o que vemos? NADA! Aproximamos a lupa de nosso olho, e o que vemos? NOTHING! Afastamos a lupa de nosso olho e o que vemos? PAGH!³ Apontamos a lupa para a Lua e vemos um borrão brilhante, mas nada que nos ajude. Apontamos para o Sol e queimamos nossa retina.

Todo esse problema para ver esse objetos é porquê nosso olho não consegue formar imagens vindas de qualquer instrumento ótico em qualquer condição. No caso a lupa tem uma certa faixa de distância, do olho e do objeto, que ela consegue trabalhar bem. Fora desta faixa, não conseguimos ver muita coisa, e o que vemos estará totalmente borrado.

Mas vamos estudar um pouco a lupa primeiro antes de propor outra solução.

Ao queimar sua retina você ficou com raiva da natureza e decidiu queimar o olho de algumas formigas do mesmo jeito que você queimou o seu. Você então coloca a lupa entre a formiga e o Sol. Colocando a lupa muito distante da formiga, infelizmente nada aconteceu. Mas conforme

¹E abaixo dos nossos pés, e bem à frente do nosso peito, atrás de nossas costas e ao lado de nossos braços, já que a Esfera Celeste é uma esfera.

²Se não tiver uma, assalte os óculos de sua tia e tente fazer a experiência.

³Pagh significa Nada na língua Klingon.

quando você aproxima a lupa da formiga, nota que se forma um círculo brilhante, que reduz de tamanho conforme você aproxima a lupa da formiga, até que a imagem atinge um tamanho mínimo e para distâncias menores que a distância em que ocorre o mínimo, o círculo luminoso volta a crescer. E você nota que é justamente na distância em que a imagem é mínima que a formiga pega fogo. Quando você deixava a lupa muito perto ou muito longe disso não funcionava.

- 57- Por que a formiga pega fogo apenas quando o círculo brilhante atinge seu tamanho mínimo (ou próximo disso)? E porque isso não funciona para posições da lupa muito diferentes da posição em que se formou o círculo mínimo?

Notamos então o seguinte. A luz que passa pela lupa é concentrada na forma de um cone. Na ponta do cone é onde a luz está mais concentrada, e é o lugar que chamaremos de **FOCO**. Observe a figura a seguir.

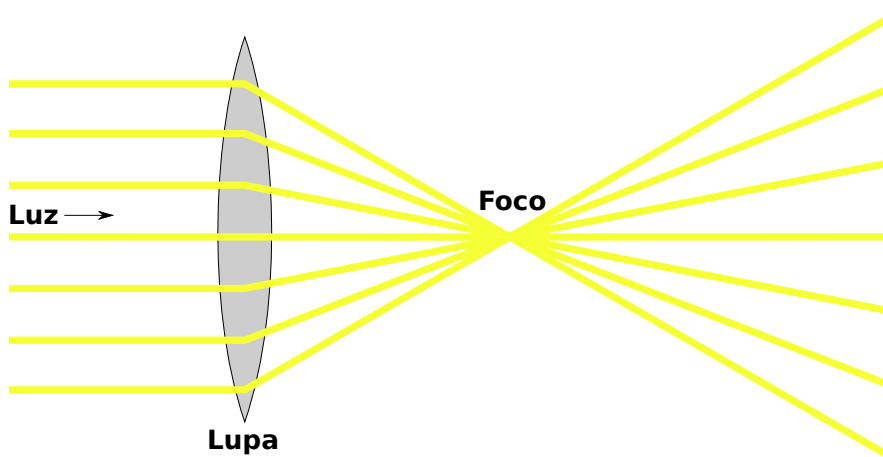


Figura 9.1: O foco de uma lente é definido como sendo o ponto de encontro dos raios de luz que chegam até a lente paralelos e em seguida sofrem desvios. Lembrando que o desenho é bi-dimensional, e o nosso mundo é tri, o triângulo formado pelos raios de luz, na verdade é um cone.

Neste caso a luz é concentrada pela lente da nossa lupa. Quando isso acontece, chamamos a lente de **CONVERGENTE**.

Pronto. Quem roubou os óculos da tia, pode ter conseguido queimar formigas, mas pode não ter conseguido realizar bem a experiência. Em vez de formar um círculo brilhante, a lente fazia uma espécie de sombra no chão! Então você se pergunta, como pode um objeto transparente fazer uma sombra no chão?

Você então bate no gordinho nerd da sua sala (caso ele não seja você, lógico, o que é provável...) e pega os óculos dele para tentar a experiência. No caso, o problema ocular mais comum dentre os nerds é a miopia. E você nota que as lentes dos óculos continuam fazendo uma espécie de sombra no chão, cuja intensidade depende da distância da lente ao chão. Quanto mais distante, maior e mais intensa a sombra.

WFT?

Pois bem, e se existir uma lente que no lugar de concentrar a luz, ela acaba por espalhar ainda mais os raios? O fluxo luminoso acaba por cair conforme nos afastamos da lente, já que a luz vai sendo cada vez mais espalhada. A esse tipo de lente daremos o nome de lente **DIVERGENTE**⁴. Qual a diferença na estrutura dessas duas lentes?

Todos, quando pensam em lentes pensam em uma lente neste modelo:

⁴Por que o míope não vai ao zoológico? Porque ele usa lente divergente :p.

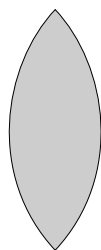


Figura 9.2: Corte transversal de uma lente bem conhecido.

Mas podem existir várias outras lentes, e é a diferença na forma das faces que gera a convergência ou divergência da luz. Em si podemos agrupar as lentes em BORDOS GROSSOS e BORDOS FINOS. Observe abaixo:

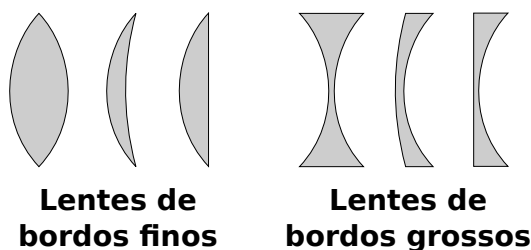


Figura 9.3: Lentes de bordos finos e bordos grossos.

No ar as lentes convergentes são as de bordos finos, e as divergentes são as de bordos grossos. Isso porém varia com o meio em que a lente se encontra, por exemplo na água essas características se invertem.

Agora que você conhece um pouquinho mais sobre lentes, gastou o resto do dia estudando, virou noite, e você está com muita vontade de colocar fogo em formigas. O que fazer se você não tem mais a luz do Sol? Simples, você usa duas lâmpadas pontuais!

Você então posiciona as duas lâmpadas, a lupa e a formiga, e o que você vê? Você verá a formiga rindo da sua cara pois ela não está pegando fogo. E por que isso não aconteceu? Porque a luz de cada lâmpada convergiu em um ponto diferente. Assim, o ponto de convergência da luz depende da posição da fonte, no caso pontos a uma mesma distância convergem em um plano paralelo à lente, e distâncias diferentes convergem a diferentes distâncias.

Outra coisa interessante: se considerarmos um corpo como vários pontos emissores, a luz de cada ponto vai convergir de um jeito diferente, mas no final a imagem do corpo é projetada depois da lente!⁵

Legal, conciliando isso a um pouquinho de biologia chegamos a uma explicação para a formação de imagem no olho! O cristalino de nosso olho é uma lente convergente e a distância onde as imagens se formam é justamente o fundo do nosso olho, onde estão os CONES e os BASTONETES⁶. Para ver imagens a diferentes distâncias nosso olho se deforma, trazendo o fundo do olho para o ponto onde se forma a imagem.

58- Explique o que provoca e como se comporta a formação de imagens nos casos de quem tem:

⁵Lembre-se que aqui estamos falando de lentes convergentes! Lentes divergentes não fazem isso!

⁶São as células do nosso olho que transformam a luz em sinais nervosos para nosso cérebro.

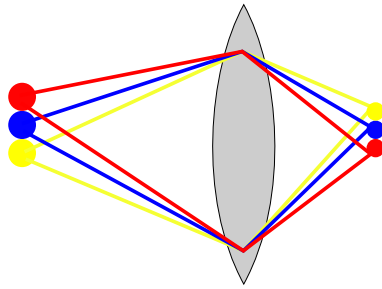


Figura 9.4: Esquema da formação de imagens em uma lente convergente. Imagine que cada uma das bolinhas é um ponto de um corpo. No final das contas, uma imagem do corpo vai se formar no ponto em que os raios de luz de cada ponto se cruzarem com outros raios de luz originados no mesmo ponto.

- (a) Miopia;
- (b) Hipermetropia;
- (c) Astigmatismo;

Agora que sabemos como funciona nosso olho, voltamos à discussão sobre o problema de se estudar a natureza dos corpos celestes. Como você deve ter notado, nosso olho vai funcionar melhor quando os raios de luz chegam paralelos. No caso de uma lente apenas, como os raios estão convergindo ou divergindo, nosso olho não consegue se deformar a ponto de formar a imagem no fundo do olho⁷. Precisamos, portanto, de alguma outra lente então que corrija a direção dos raios de luz para que eles voltem a ficar paralelos antes do nosso olho. E qual o benefício primário disso? Nossa pupila tem aproximadamente 6 mm de diâmetro, supomos que nossa primeira lente tenha 50 mm. Estão teremos uma área maior captando luz e concentrando em nosso olho, assim nosso olho conseguirá ver objetos que são muito apagados para vermos a olho nú.

Colocamos então em um tubo de PVC duas lentes, uma grande convergente e uma pequena divergente. A grande converge a luz, e a pequena pega a luz que está sendo convergida e a torna paralela novamente. Logo após a lente divergente você coloca seu olho, como no esquema abaixo:

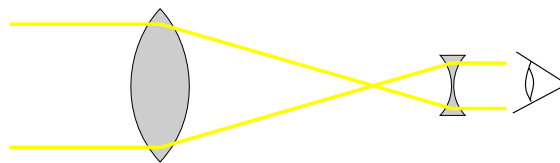


Figura 9.5: Esquema de como você pode arranjar 2 lentes de forma que seja formada uma imagem no seu olho.

Apontamos o tubo para um objeto, e o que vemos? Além de mais luminosos, os objetos parecem mais próximos!

Parece uma coisa simples, não? Mas isso foi um grande marco na história da ciência.

⁷Só consegue em determinadas configurações e faixas de operação, onde por exemplo atuam as lupas.

Em 1608 o físico, matemático e astrônomo florentino Galileu Galilei montou uma LUNETAS⁸ para fins astronômicos. Ele porém não foi o inventor da tecnologia. Antes dele o holandês *Hans Lippershey* (1570-1619) já havia construído instrumentos dessa natureza, usados principalmente como brinquedo. Apenas com o que Galileu ouviu sobre a invenção de Hans, ele criou seu instrumento e o apontou para o céu. As descobertas de Galileu foram publicadas em seu livro “*SIDEREUS NUNCIUS*”, em 1609, e foram partes importantes da *Revolução Copernicana*. Elas ajudavam a por abaixo a já decadente física aristotélica e eram extremamente favoráveis ao modelo de universo proposto por Nicolau Copérnico.

O episódio da utilização da luneta em observações astronômicas foi tão importante que é considerado como o nascimento da astronomia moderna. Foi por causa dele que 2009 foi decretado como ANO INTERNACIONAL DA ASTRONOMIA pela UNESCO, uma comemoração pelos 400 anos da publicação do *Sidereus Nuncius*.

A luneta utilizada por Galileu seguia o mesmo modelo da luneta que propomos acima, com uma lente convergente e uma divergente. Para dar nome aos bois, a lente maior (convergente, que fica apontada para o objeto) foi chamada de LENTE OBJETIVA, e a outra, menor (divergente e que fica próxima ao nosso olho) foi chamada de LENTE OCULAR. Justamente por ser o modelo utilizado por Galileu, que esta luneta foi chamada de LUNETAS GALILEANA.

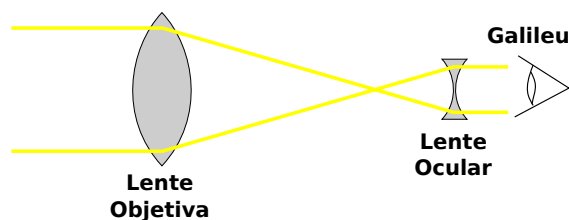


Figura 9.6: Esquema da luneta Galileana.

Embora Galileu tivesse construído sua luneta, ele não possuía uma teoria ótica. Ele não sabia explicar o funcionamento de sua luneta, tendo inclusive iniciado uma tentativa de explicação no *Sidereus Nuncius*, com promessa de aprofundar a explicação em outra oportunidade, coisa que jamais foi feita. Isso dificultou um pouco a aceitação de suas teorias, juntamente com as várias anomalias na imagem observada, ficava difícil convencer as pessoas de que o que elas estavam observando era realmente o que ele acreditava ver e não defeitos do próprio equipamento.

Quem estava começando a construir uma teoria ótica na época era o polonês *Johanes Kepler*. Kepler e Galileu costumavam trocar cartas e, ao ficar sabendo do invento de Galileu, Kepler pediu um exemplar para estudar a ótica da luneta. Galileu, camarada como ele só, envia um modelo errado para Kepler, tendo trocado a lente ocular divergente por uma convergente.

Para a sorte de Kepler e azar de Galileu, o modelo enviado funcionava melhor que o modelo inicial, apresentando apenas um pequeno problema de ficar com a imagem invertida. Kepler explicou satisfatoriamente o funcionamento dessa luneta e esse modelo passou a ser chamado de LUNETAS KEPLERIANA. No caso, a lente ocular convergente é posicionada após o foco da lente objetiva, e sua convergência atua de forma a deixar paralelos os raios que se espalham após a passagem pelo foco.

As lunetas recebem também o nome de TELESCÓPIO REFRACTOR por usarem a *refração* como principal agente. Como já notamos, as principais funções dos telescópios são *concentrar a luz recebida* e *aumentar o tamanho angular* dos objetos observados.

⁸Para quem não sabe, luneta é este tubo com lentes.

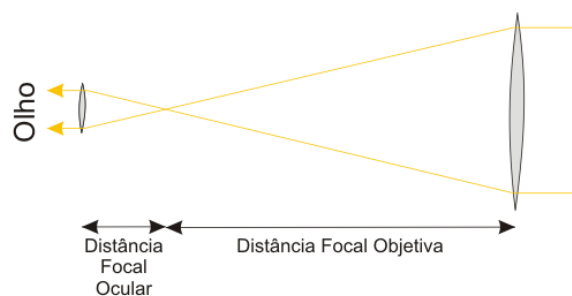


Figura 9.7: Esquema da Luneta Kepleriana. Os raios de luz chegam até a lente objetiva paralelos, são convergidos duas vezes até saírem paralelos novamente pela lente ocular e então chegam ao nosso olho.

Acontece que o telescópio utilizado por Galileu, como qualquer instrumento ótico baseado em lentes apresenta um sério problema: a ANOMALIA CROMÁTICA ou ABERRAÇÃO CROMÁTICA. Para cada comprimento de onda a luz apresenta uma velocidade diferente, decrescendo do vermelho ao violeta. Isso faz com que uma luz policromática (composta por vários comprimentos de onda), ao atravessar de uma superfície para outra, sofra um desvio diferenciado para cada comprimento de onda. Nas lentes esse desvio diferenciado implica que cada comprimento de onda vai convergir ou divergir de uma forma diferente no instrumento. Em imagens mais precisas isso significa um sério problema para a focalização (quando você focaliza um certo comprimento de onda, acaba desfocalizando outro, e assim por diante), impossibilitando a observação.

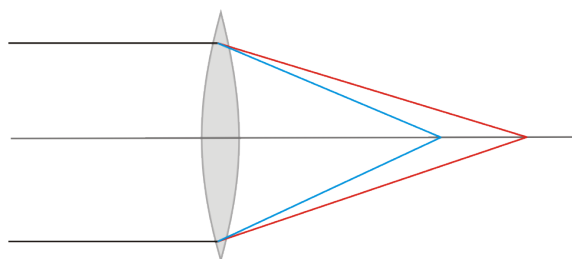


Figura 9.8: Anomalia cromática em uma lente convergente.

Esse problema gerou algumas observações engraçadas, como por exemplo a atmosfera na Lua que Galileu observou, e que não passava da aberração cromática nas observações com a luneta.

Para corrigir este problema passaram a ser utilizados *espelhos esféricos* no lugar das lentes objetivas nos telescópios, eliminando boa parte do problema da anomalia cromática. Outra vantagem da utilização de espelhos é a possibilidade construirmos telescópios menores, mas com poder de aumento muito superior aos refratores. Nasceram assim os *telescópios refletores*.

O modelo mais simples é o NEWTONIANO. Neste modelo a luz, após ser refletida no ESPELHO PRINCIPAL⁹ é refletida novamente em um espelho plano em diagonal que desvia a luz (sem alterar a distância focal na qual os raios estão se propagando) para que a imagem possa ser focalizada na lente ocular.

A necessidade de telescópios mais potentes levou a construção de telescópios cada vez maiores. Neste ponto os telescópios newtonianos eram desfavoráveis pois para um grande espelho o telescópio ficava extremamente comprido e de difícil manuseio. Foi quando surgiu um novo arranjo chamado CASSEGRAIN.

⁹ Espelho Principal é aquele que faz a mesma função da lente objetiva

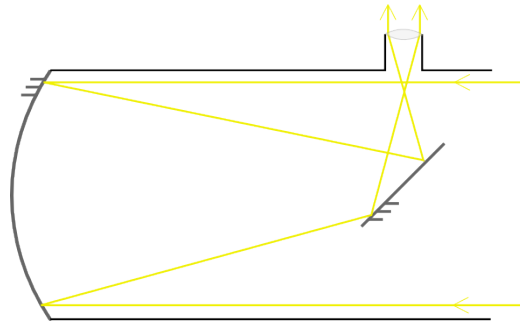


Figura 9.9: Telescópio Newtoniano, modelo mais simples de refletor.

Neste arranjo a luz, após incidir sobre o espelho primário côncavo, incide sobre um secundário convexo, que muda as características de propagação, fazendo com que a distância focal resultante seja bem maior do que a obtida por um telescópio newtoniano de mesmo comprimento, permitindo a construção de telescópios mais potentes e menores. Atualmente este é o arranjo mais utilizado em grandes observatórios.

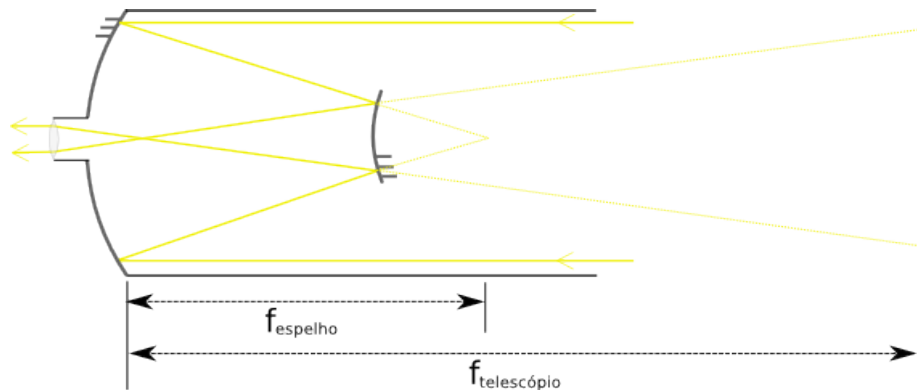


Figura 9.10: Telescópio refletor em arranjo Cassegrain. Repare o como a distância focal final do telescópio é grande, mesmo que o tubo seja pequeno.

Alguns telescópios Cassegrain usam uma lâmina plana corretora, chamada de LÂMINA CORRETORA SCHMIDT, uma espécie de “lente” sem aumento cuja função é corrigir a aberração cromática e eliminar as varetas que sustentam o espelho secundário (já que este pode ir preso diretamente na lâmina). Isso ajuda muito na qualidade da imagem final.

Mas a combinação de superfícies dificulta um pouco a construção dos Cassegrain. A dificuldade de se produzirem espelhos elipsóides, hiperbólicos, parabólicos, etc., foi um obstáculo para a construção dos Cassegrain. Mas em 1941 o russo *Dmitri Maksutov* propôs um modelo em que a lâmina corretora Schmidt e o espelho principal possuem superfícies esféricas e parte da própria lâmina é espelhada e usada como espelho secundário. Esse telescópio recebeu o nome de **MAKSUTOV** e é um dos melhores modelos para telescópios portáteis (e um dos mais caros também).

Hoje, porém, já são produzidas lentes chamadas de **ACROMÁTICAS**, as quais não possuem aberração cromática na imagem. Elas são constituídas basicamente de uma junção de duas lentes, uma convergente biconvexa acoplada a uma divergente plano-côncava que corrige a anomalia cromática da lente convergente. A segunda lente (divergente) deve também ser mais densa que a primeira para que a correção ocorra. Devido ao formato e a maior densidade da segunda lente, as

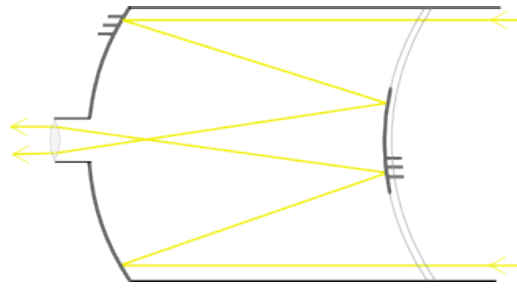


Figura 9.11: Telescópio em arranjo Maksutov (como os pequenos do Canalle). Pelo fato de que as superfícies da lâmina e dos espelhos serem esféricas, a construção desse telescópio é facilitada.

cores voltam a sofrer um desvio diferenciado para cada comprimento de onda, porém desta vez o desvio vai fazer com que diferentes cores se interceptem no mesmo ponto, reduzindo bastante a anomalia cromática.

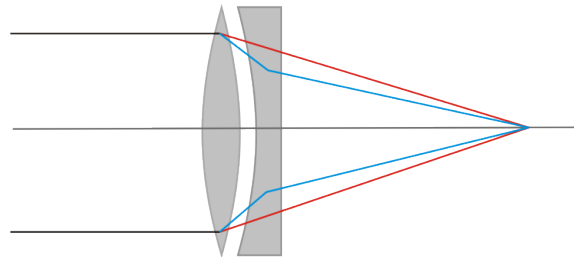


Figura 9.12: Esquema de uma lente acromática.

Em geral, os telescópios cobrem em seu CAMPO DE VISÃO¹⁰ uma área muito pequena do céu, tornando difícil a busca visual de um objeto. Por causa disso hoje uma das peças indispensáveis de um telescópio que não seja controlado por computador é a chamada LENTE BUSCADORA. Ela na verdade é uma minúscula luneta, com aumento muito pequeno e grande campo de visão que serve para “mirarmos” mais facilmente o objeto a ser observado.

¹⁰Campo de visão é o tamanho da região do céu observável de um telescópio.

Capítulo 10

Óptica

Como os telescópios na astronomia possuem várias finalidades (técnicas de imageamento, fotometria, espectroscopia, em vários comprimentos de onda e sob várias resoluções angulares) é natural supor que instrumentos destinados a diferentes usos possuam propriedades diferentes. Mas como alterando as propriedades dos elementos óticos do telescópio mudamos as características finais do instrumento? Para responder a essa pergunta vamos seguir o caminho tradicional de equacionar as propriedades de um telescópio e a partir disso estudar seu comportamento.

Como foi dito, as duas funções básicas de um telescópio são concentrar a luz do objeto observado e aumentar seu tamanho angular:

O AUMENTO é definido como a relação entre o *tamanho da imagem* i observada e o *tamanho do objeto real* o . Como geralmente trabalhamos com tamanhos angulares muito pequenos, podemos definir o aumento como a relação entre os tamanhos angulares, também chamados de i e o , pelo fato de que para $\theta \ll 1 \rightarrow \sin \theta \approx \theta$. Assim, pela definição, temos:

$$A = \frac{i}{o}$$

Para telescópios, o aumento também pode ser dado pela relação entre a distância focal f da lente objetiva e da ocular. Assim:

$$A = \frac{f_{\text{objetiva}}}{f_{\text{ocular}}}$$

Mas além de aumentar o tamanho visível do objeto, o telescópio também aumenta o fluxo luminoso do objeto que é captado por nosso olho. Essa propriedade se chama de PODER DE CONCENTRAÇÃO DE LUZ (*Pgl*). Esta propriedade está ligada ao quanto o telescópio consegue concentrar a luz. Basicamente, quanto maior o diâmetro da Objetiva, mais luz o telescópio consegue captar e maior o PGL, e quanto maior o aumento, mais a luz fica espalhada na imagem e menor o PGL.

Além do que foi citado acima podemos ainda substituir a lente ocular e o olho humano por uma *placa fotográfica*, um anteparo ou um CCD (*Charged Couple Device*; uma placa eletrônica conectada a um computador que é colocada no foco do telescópio, para gravar a imagem e passar os dados ao computador)¹. Neste caso o aumento angular da imagem não é importante, mas sim o tamanho I da imagem formada no anteparo. Novamente como trabalhamos com ângulos muito pequenos temos na figura 10.1:

onde α o tamanho angular do objeto. Isso também é válido quando trabalhamos com imagens formadas por uma fenda. Quando os raios de luz atravessam um pequeno buraco, eles formaram

¹ Os CCDs são usados nas máquinas digitais que todos temos em casa. (e também nos cursos de astronomia! \o/)

$$I = f_{\text{objetiva}} \cdot \tan \alpha$$

$$\tan \alpha \simeq \alpha$$

$$I = f_{\text{objetiva}} \cdot \alpha$$

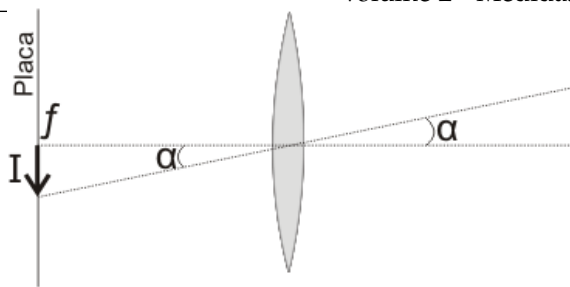


Figura 10.1: Esquema de formação de imagem em um anteparo.

uma imagem do objeto invertida cujo tamanho será dado pelo produto do tamanho angular do objeto e da distância do anteparo em que a imagem se forma.

Note que eliminamos a lente ocular. Por quê? Simples, a lente ocular tem a função de tornar os raios paralelos novamente, então para que a imagem se formasse na placa precisaríamos de outra lente que convergisse os raios novamente para que uma imagem se formasse na placa, função executada no nosso olho pelo cristalino. Como podemos formar a imagem na placa diretamente com os raios de luz que vêm da objetiva, não precisamos mais da ocular e da outra lente!

Em imagens, uma outra coisa importante também que precisamos saber é quanto uma medida angular no céu corresponde em escala linear no plano da imagem, ou simplesmente qual arco cabe em uma unidade de medida na placa. Essa é a chamada **ESCALA DE IMAGEM** ou **ESCALA DE PLACA** (e).

$$\tan e = \frac{1}{f_{mm}}$$

$$\tan e \approx e$$

$$e = \frac{1}{f_{mm}} [\text{arcrad/mm}]$$

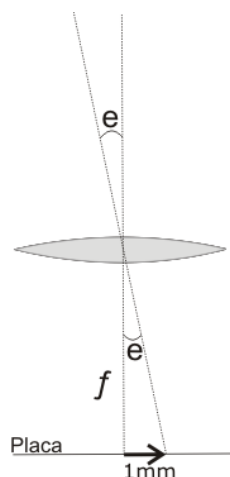


Figura 10.2: Escala de Placa.

Para o caso de um CCD, no lugar de utilizarmos a escala em metros ou milímetros, é mais interessante sabermos qual o ângulo correspondente a um pixel na placa, assim substituímos o 1 mm da relação acima pelo valor do lado do pixel no CCD, assim obtemos:

$$e = \frac{l_{mm}}{f_{mm}}$$

Uma propriedade extremamente importante para a caracterização de um telescópio ainda é a chamada **RAZÃO FOCAL** (n). Esta propriedade é a razão entre a distância focal da objetiva ou espelho primário e seu diâmetro. Ela, juntamente com o diâmetro do espelho, dá a caracterização geral do telescópio. Sabendo estas duas características você pode facilmente saber as outras.

$$n = \frac{f}{D}$$

A indicação da razão focal é dada da seguinte maneira: um telescópio com razão focal de 9,5, por exemplo, é nomeado por $f/9,5$. As razões focais mais indicadas hoje estão entre 8 e 10,

porém isso depende da finalidade do telescópio. Telescópios com razão focal menor (entre 4 e 6 recomendável) apresentam grande poder de ganho de luz (a luz é mais concentrada) mais pouco aumento, indicado para objetos grandes e fracos, como nebulosas. Razões focais maiores (entre 10 e 12) não conseguem ter tanto ganho de luz, mas apresentam bom aumento, indicado para a observação de objetos pequenos e brilhantes, como planetas.

Porém o comportamento da luz em um telescópio não é tão perfeito quanto foi considerado até agora. Quando um raio de luz passa por um instrumento ótico de foco positivo, como um telescópio, ela sofre um processo de difração, chamado de DIFRAÇÃO DE FRAUNHOFER, que faz com que a imagem formada por esse raio não seja apenas um ponto como era de se esperar, mas que seja um conjunto de pequenos círculos concêntricos, formando um pequeno disquinho, chamado de DISCO DE AIRY.

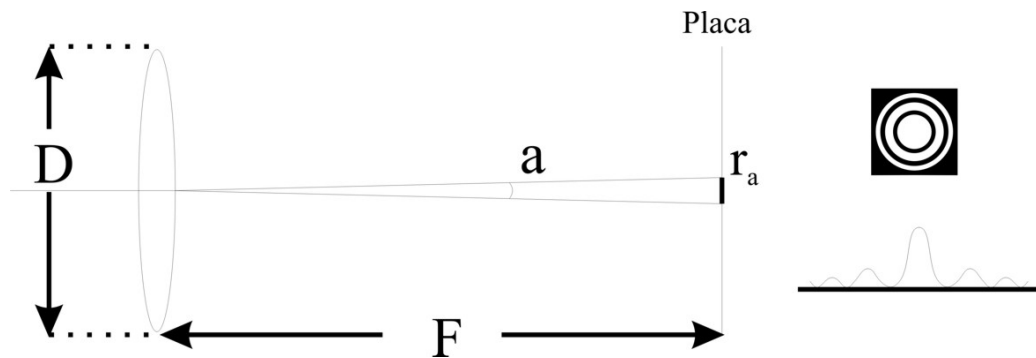


Figura 10.3: Esquema da difração de Fraunhofer para uma lente de diâmetro D .

O diâmetro (r_a) do disco formado é dado pelo produto do ângulo (a) em radianos e da distância focal da lente ou espelho, pelo fato de trabalharmos com ângulos extremamente pequenos. Este ângulo será dado pela seguinte relação:

$$a_{rad} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \Rightarrow a'' = 2,51 \cdot 10^5 \frac{\lambda}{D}$$

Com λ e D na mesma unidade de medida. Esses 1,22 saem da primeira raiz da equação de Bessel. Perceba que isso depende do comprimento de onda a ser considerado. Um mesmo telescópio formará discos de diferentes tamanhos dependente do comprimento de onda considerado. Um caso particular que nos interessa muito é o caso particular do visível ($\lambda = 0,55\mu m$), onde temos:

$$a'' = \frac{14}{D_{cm}}$$

Agora com o valor deste ângulo podemos definir uma das propriedades mais importantes de um telescópio, o PODER RESOLUTOR. Veja a figura 10.4:

Se dois objetos estão separados por uma distancia angular (Δh) maior que $2R$, ou seja, maior que r_a , eles serão observados como dois objetos independentes através de um telescópio. Porém, se esta distância for menor que r_a , eles serão observados como dois objetos unidos na imagem. Com isso temos que a menor distância angular para que dois objetos sejam vistos como separados em uma imagem é o próprio diâmetro do disco de difração, assim podemos definir o poder resolutor (p'') de um telescópio por:

$$p'' = 2,51 \cdot 10^5 \frac{\lambda}{D}$$

No caso do visível, como geralmente aparece descrito, temos:

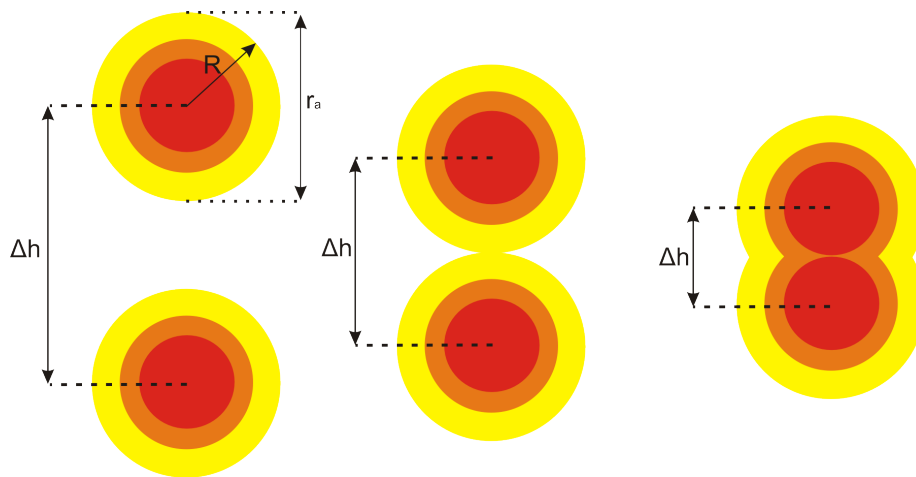


Figura 10.4: Imagens de dois objetos pontuais separados por diferentes distâncias Δh em um telescópio.

$$p'' = \frac{14}{D_{cm}}$$

Porém, existe a dependência do comprimento de onda, o que faz com que telescópios que operem na faixa do visível possam ser pequenos e ainda assim ter boas resoluções; telescópios que operam em rádio (λ da ordem de centímetros) precisam ser extremamente grandes e mesmo assim não apresentam um bom poder resolutor.

- 59- **(IAO 1996)** Uma pequena mosca pousou na objetiva de um telescópio de 5 cm. O que um observador verá olhando a Lua através desse telescópio?
- 60- Qual aumento se deve conferir a Júpiter ($\alpha = 40''$) para que ele possa ser observado do tamanho da Lua ($\alpha = 30''$) através de um telescópio?
- 61- Você possui dois telescópios: um refrator com uma objetiva de 160 cm de distância focal e um refletor f/9,5 com diâmetro de 30 cm. Porém você possui apenas uma ocular, e sabe que quando você a usa no seu refrator consegue um aumento de 200 vezes. Qual é o aumento que você conseguirá quando utilizar essa ocular no seu refletor?
- 62- Qual diâmetro terá uma imagem do Sol ($\alpha = 32'$) projetada no plano focal de uma lente f/7 com distância focal de 40 cm? Qual será o fluxo luminoso na imagem?
- 63- Seu CCD possui pixels de $22 \mu m$ de lado. Quando Marte está em sua aproximação máxima da Terra, seu diâmetro angular é de $25''$. Quantos pixels de lado terá uma foto de Marte obtida pelo seu CCD no plano focal de uma lente com distância focal de 80 cm?
- 64- **(IAO 2000)** Uma Câmara Schmidt de 1,2 metro tem um campo de visão de $6^\circ \times 6^\circ$. Calcule aproximadamente quantas fotografias você teria que fazer para cobrir todo o céu. (faça uma estimativa dos números máximo e mínimo de fotos). Onde você teria que colocar o telescópio para ser capaz de fazer esse trabalho?
- 65- Sabe-se que o olho humano só consegue observar até a sexta magnitude. Com um telescópio, contudo, esse limite aumenta um pouco. Calcule a magnitude-limite possível de se observar com um telescópio, em função do diâmetro da sua objetiva.

- 66- (IAO 1996) De uma estrela da quinta magnitude, caem 10000 fótons por segundo por cm^2 na superfície de Plutão. Quantos fótons, vindos de uma estrela de magnitude 20, serão captados em meia hora pelo telescópio BTA (que tem um espelho principal de 6 m de diâmetro)?
- 67- Mantendo a tradição de ajudar VOCÊ a resolver seus problemas cotidianos: Imagine que você esteja trabalhando no telescópio Bolshoi (BTA) de 6 m, na Rússia. Seu chefe foi a uma reunião (vodka!) com Michail Gavrilov (supremo-guru da IAO), e pediu pra você esquentar um cafezinho para ele. Porém, quando você vai cumprir a ordem, a cafeteira quebra. Como não tem ninguém usando o telescópio, você tem uma idéia: apontar para Sírius, e esquentar o cafezinho com o brilho da estrela. Qual o tempo mínimo de duração da reunião para que o seu chefe ache você um bom empregado?
- 68- Qual o tamanho mínimo de um objeto na Lua (cuja distância é 384 000 km) para que ele possa ser percebido pelo seguinte telescópio?
- (a) Olho (6 mm de pupila)
 - (b) Observatório Nacional (46 cm)
 - (c) LNA (1,6 m)
 - (d) Gemini (8 m)
 - (e) Keck (10 m)
- 69- (IAO 1998) É possível distinguir, a olho nu, o Mare Crisium lunar, cujo diâmetro é de 520 km?
- 70- (IAO 2000) Um cosmonauta em uma nave está passando, na órbita da Lua, sobre o Mare Frigoris, a uma altitude de 100 km. Nesse momento, há um astronauta caminhando nesse local, e é dia aí (o Sol está brilhando). Pode o cosmonauta no espaço observar o astronauta na superfície, usando binóculos com um aumento de 20 vezes? Considere todas as possibilidades.
- 71- (IAO 1996) Por que algumas estrelas se apresentam duplas quando as observamos em azul mas não são resolvidas quando as observamos em vermelho?
- 72- Qual a menor distância entre dois objetos para que sejam distinguidos pelo radiotelescópio de Jodrell Bank operando a $\mu = 21cm$? Suponha que os mesmos estão a uma distância de 15 pc do Sistema Solar. O diâmetro do prato do radiotelescópio de Jodrell Bank: $D = 76,2m$. Qual deveria ser o diâmetro de um telescópio óptico com o mesmo poder de resolução?
- 73- Qual o problema de se ter um telescópio muito fino e comprido, como se pretendia até o século XIX?
- 74- Imagine que você seja um eminente pesquisador e vá todos os anos à Reunião Anual da SAB. Em 2024, enquanto se empanurrava de morango, você foi convidado a fazer suas próximas medições no telescópio f/10 de 160 cm do LNA. Seu CCD tem pixels de $22 \mu m$ de lado. Qual a distância mínima no CCD que a imagem de duas componentes do seu sistema binário têm que ter para elas serem separadas?

Capítulo 11

Montagens

Agora vamos para uma parte um pouco mais prática do trabalho com telescópios. Uma coisa importante pra se usar um telescópio é saber como ele é montado. Não, não ensinaremos onde encaixa cada peça. A montagem é o conjunto de eixos e motores que possibilitam o movimento de uma determinada forma do telescópio. Existem varios tipos de montagem, quase todos caindo dentro de duas categorias principais: a montagem ALTAZIMUTAL e a EQUATORIAL.

Na montagem altazimutal o telescópio se move em dois eixos de rotação. Um deles percorre a linha do horizonte, buscando o azimute do astro a ser observado, enquanto o outro se move verticalmente, buscando a altura do astro.

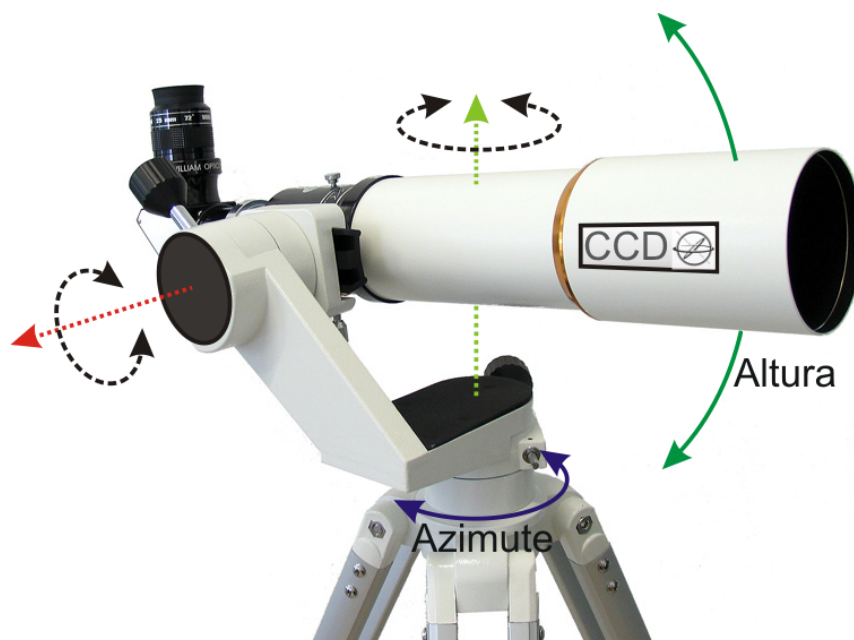


Figura 11.1: Telescópio em montagem altazimutal. Um dos eixos permite o movimento buscando o azimute, o outro a altura do astro.

Essa montagem é extremamente cômoda quando se trata de buscar um objeto sem o auxílio do computador do telescópio; em compensação, ela é bastante inconveniente para acompanhar o movimento de um astro no céu. Como sabemos, os únicos lugares da Terra onde o movimento diurno das estrelas é paralelo ao horizonte são os pólos. Em qualquer outro lugar, o movimento dos astros não será paralelo a nenhum dos movimentos do telescópio; com isso, para acompanhar

qualquer astro, o telescópio altazimutal precisa se mover nos dois eixos.

Além disso, existe outro problema, que afeta principalmente a astrofotografia: conforme passa o tempo, a imagem no céu vai girando em relação à placa ou CCD, impossibilitando a fotografia. Esse efeito é chamado DESVIO DE CAMPO. Observe o esquema abaixo:

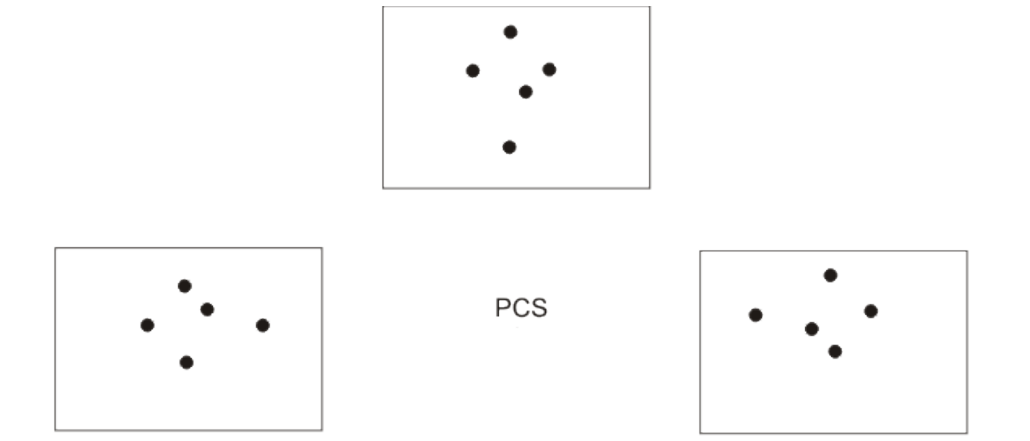


Figura 11.2: Esquema mostrando a imagem observada por um telescópio em montagem altazimutal (campo dentro de cada retângulo) e o Cruzeiro do Sul. Repare que, conforme o Cruzeiro do Sul faz seu movimento em torno do pólo celeste (PCS), ele rotaciona em relação ao observador. Se fosse feita uma foto de longa exposição, cada estrela apareceria como um rastro circular.

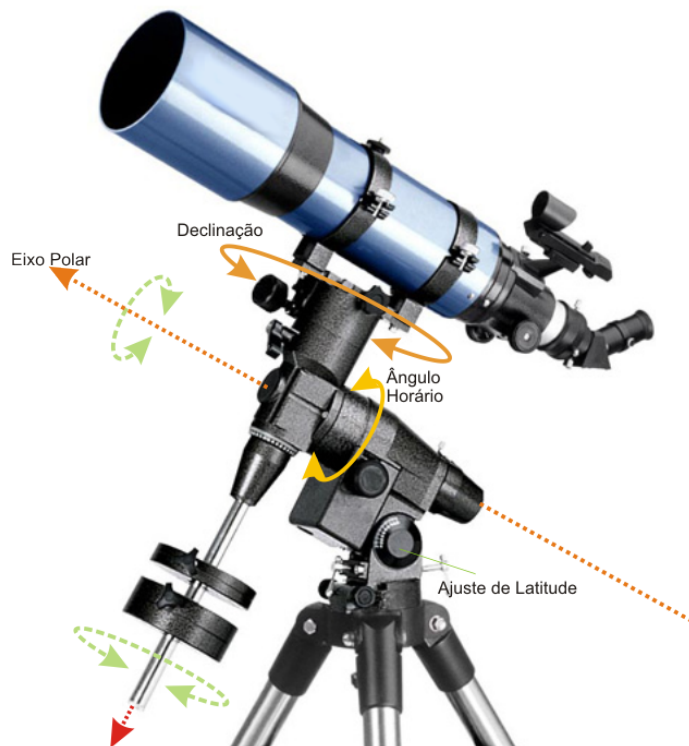


Figura 11.3: Telescópio em montagem equatorial. Um dos eixos, o polar, permite o movimento em ângulo horário, o outro em declinação.

A montagem perfeita para resolver esses problemas é a equatorial. Seu princípio consiste

em inclinar a montagem altazimutal para tal ponto onde, em vez de percorrer o horizonte, o telescópio percorra o equador celeste, buscando o ângulo horário do astro no lugar do azimute, e a declinação no lugar da altura. Assim, o acompanhamento do astro se resume a mover o telescópio na direção do ângulo horário e, além disso, a imagem não gira, pois o telescópio gira junto com ela! Isso permite belas fotos de longa exposição.

Para isso, o primeiro eixo de rotação dele (movimento em ângulo horário) deve estar apontado para o pólo elevado do local – sendo por isso chamado de *eixo polar*. Os telescópios equatoriais portáteis normalmente possuem um sistema para regulagem da latitude do lugar; já os fixos não precisam disso, pois podem ser fabricados especificamente para o local onde serão instalados.

Esses são os modelos básicos de montagem, porém cada um deles possui subclassificações especiais de acordo com sua forma e funcionamento. Vejamos algumas.

Dobsoniana

Tratando de altazimutal, uma montagem muito utilizada é a DOBSONIANA. Ela consiste de uma base de madeira que gira em torno de seu eixo, possibilitando o movimento azimutal do telescópio; além disso, o telescópio é encaixado em dois orifícios nas paredes laterais da base, que permitem o movimento em altura.



Figura 11.4: Telescópios em montagem altazimutal Dobsoniana.

Esta montagem é utilizada em larga escala para grandes telescópios newtonianos, pois, como a base é diretamente ligada ao chão, a posição da ocular fica mais cômoda para observações altas. Outra vantagem é que, dependendo de como for montado, dá pra carregar um telescópio dobsoniano de até 40 polegadas (!) dentro de um automóvel simples ¹.

Forquilha

Outra montagem extremamente usada é a montagem tipo GARFO ou FORQUILHA. Nessa montagem, o telescópio é preso em uma espécie de garfo (com um ou dois braços). Ela é usada para telescópios altazimutais mas também pode ser adaptada para montagens equatoriais: basta inclinar o garfo de forma que seu eixo de rotação aponte para o pólo, em vez de apontar para o zênite. A montagem de garfo permite movimentos mais simples, além de suportar telescópios maiores, como os gigantescos telescópios *Gemini* (norte e sul) e o *SOAR*.

¹ Não iremos entrar em mais detalhes sobre isso agora. Se quiser saber como carregar um grande telescópio dentro de um fusca consulte a internet que você verá boas idéias.

O *Observatório Gemini* é formado por dois telescópios iguais, situados um no Hawaii (Gemini Norte) e um na Cordilheira dos Andes (Gemini Sul). Eles possuem espelho de 8 m de diâmetro, e operam na faixa visível e infravermelho. Sua construção resultou de um consórcio de 6 países, dentre eles o Brasil. Também nos Andes está o *Observatório SOAR* (Southern Observatory for Astrophysical Research), ao lado do Gemini Sul. Possui um espelho primário de 4,1 m e foi construído numa parceria Brasil-EUA.

Outro observatório que é importante destacar é o *W. M. Keck*, no Hawaii. É formado por dois telescópios de 10m de diâmetro cada um! A distância focal destes telescópios é de 17,5m, isto é, eles são $f/1,75$, que operam no visível e no infravermelho próximo.

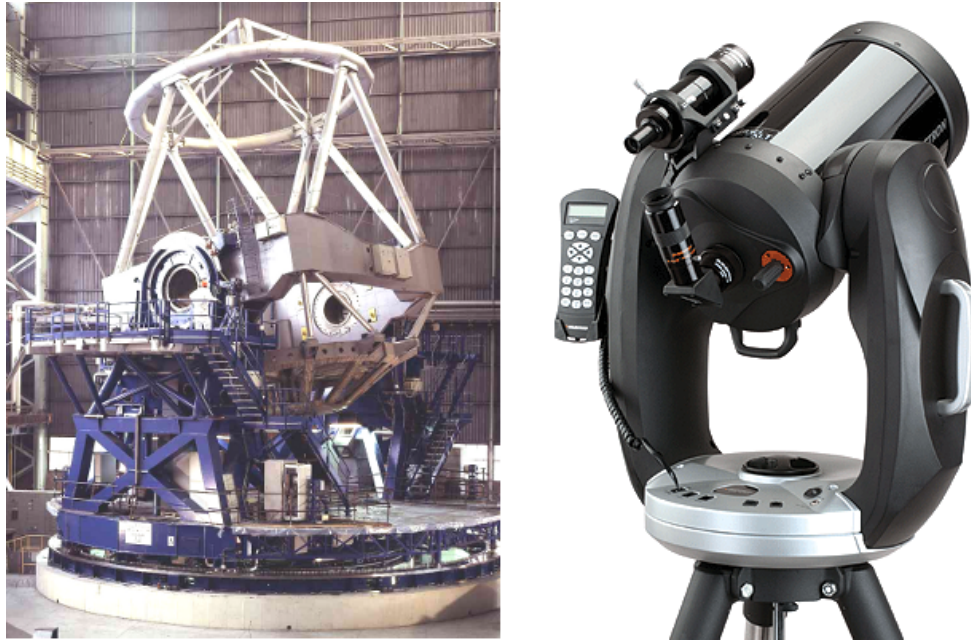


Figura 11.5: Telescópios em montagem tipo Garfo ou Forquilha. À esquerda temos o telescópio VLT (Very Large Telescope) de 8.2 m da ESO; à direita temos um telescópio portátil.

Alemã

Falando em montagens equatoriais, uma das mais usadas é a ALEMÃ. Ela é utilizada para telescópios equatoriais menores, como lunetas e newtonianos, pois é mais facilmente transportada. Seu funcionamento, contudo, é um pouco mais complexo.

A peça responsável pelo movimento em ângulo horário possui a forma de T e é encaixada de tal forma que seu eixo de rotação (base do T) aponte para o pólo elevado do local. De um dos braços do T sai a outra peça, que estará presa ao telescópio e será responsável pelo movimento em declinação. Do outro braço, normalmente sai um apoio para um contra-peso, que serve para equilibrar o telescópio.

Aqui no Brasil, quase todos os telescópios equatoriais, mesmo em observatórios, possuem essa montagem ou variações dela.

Chassi

Além desses, ainda existe a montagem equatorial tipo CHASSI. Nela, o tubo ótico é colocado entre dois braços paralelos, onde ocorrerá o movimento de declinação. Estes braços estão ligados



Figura 11.6: Telescópios em montagem tipo alemã. À esquerda temos o telescópio da UFRN; ao centro, o telescópio de 1,6 m do Observatório Pico dos Dias, do LNA; à direita, um telescópio newtoniano comum.

entre si por duas bases em suas extremidades, cuja rotação leva ao movimento em ângulo horário. As bases, por sua vez, são ligadas à estrutura de sustentação (cúpula, prédio, etc.). Como esta montagem é pesada e complicada, não é muito popular entre telescópios amadores (praticamente não é utilizada), tornando-se usual apenas em grandes observatórios. O exemplo mais comum desta montagem é o telescópio de 2,5 m do *Monte Wilson*, nos EUA. Este telescópio foi utilizado por *Edwin Hubble* quando este fez a famosa descoberta sobre o afastamento das galáxias, que levou à ideia de expansão do universo.

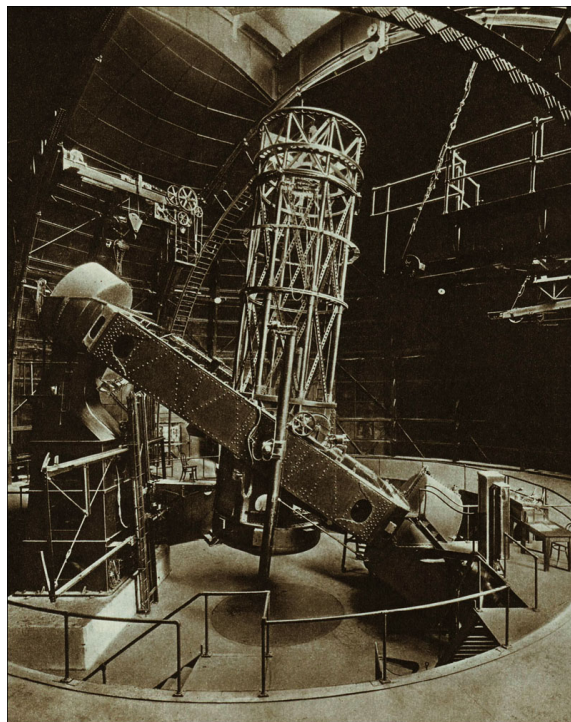


Figura 11.7: Telescópio do Monte Wilson (EUA) onde Edwin Hubble fez suas descobertas.

A montagem de chassi também apresenta um problema referente à área do céu que se pode observar. Uma das bases impede que seja observado algum corpo muito próximo do pólo elevado local. Para sanar este problema, foi desenvolvida a montagem tipo BERÇO, na qual a base superior de sustentação possui uma fenda (ou, se for uma barra, ela é feita em forma de U) que permita apontar objetos também para a região polar. O telescópio mais conhecido com este tipo de montagem é o telescópio *Hale*, do *Monte Palomar* (EUA). Este telescópio também foi utilizado por Hubble mais tarde, para determinar a Constante de Hubble.

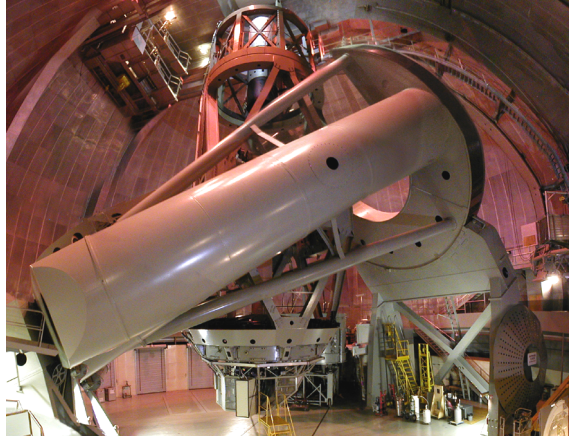


Figura 11.8: Telescópio Hale do Observatório Monte Palomar (EUA).

Capítulo 12

Atmosfera

Tudo o que vimos até agora sobre medidas de luz e sobre telescópios é válido para aparelhos perfeitos e no vácuo. No entanto, telescópios reais têm defeitos (ainda que hoje eles sejam muito pequenos) e limitações (de tamanho, por exemplo; se uma lente for muito grande, ela entorta com seu próprio peso). Além disso, estamos imersos em uma poça de gás: a atmosfera. Isso faz bastante diferença, e cria vários fenômenos que podem fazer os dados observacionais conflitarem com as nossas teorias. Para reconciliar as duas coisas, precisamos de uma teoria (que será uma teoria acessória às nossas teorias astronômicas) que descreva o funcionamento da própria atmosfera. Com isso, podemos distinguir os “fenômenos astronômicos” dos “efeitos atmosféricos”.

Segundo nossa compreensão atual, a atmosfera afeta as medidas astronômicas de três formas: (i) mudando a posição dos objetos, (ii) perturbando as imagens deles, (iii) absorvendo parte da luz que chega a nós. Vejamos como podemos dar conta de cada um dos efeitos.

12.1 Refração

A atmosfera é mais densa quanto mais perto do solo. Por isso, a luz vai sofrendo refrações sucessivas, até que chega no solo com uma inclinação diferente da que entrou. A esse fenômeno chamamos **REFRAÇÃO ATMOSFÉRICA**. Como podemos ver na tabela, quanto mais baixo na atmosfera está o objeto, maior é o desvio da posição original, e maior é a sensibilidade da atmosfera em relação a isso (uma pequena mudança de posição aumenta muito o desvio).

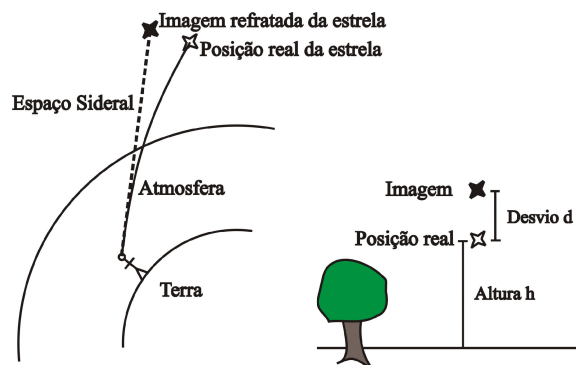


Figura 12.1: Refração atmosférica para uma estrela. Repare que isso muda a posição aparente da estrela observada.

Para boa parte dos efeitos práticos, é suficiente ter em mãos alguma tabela ou gráfico.

distância zenital (Z)	desvio
0°	0
10°	10"
20°	21"
45°	57"
60°	1'40"
70°	2'36"
80°	5'13"
85°	9'40"
88°	17'55"
89°	23'53"
89.5°	28'11"
90°	33'51"

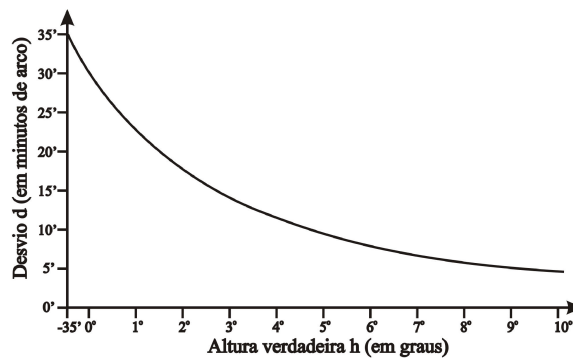


Figura 12.2: Gráfico dos desvios causados pela refração, em função da altura do astro.

Entretanto, uma formulação algébrica da refração atmosférica é algo um pouco mais complicado. Em um local com pressão P em atmosferas e temperatura T em graus celsius, o desvio R da refração é dado por:

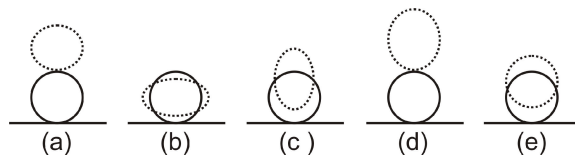
$$R = 60,25'' \cdot P_{(atm)} \cdot \frac{273^{\circ}\text{C}}{273^{\circ}\text{C} + T^{\circ}\text{C}} \cdot \tan Z$$

(a 1 atm e 0°C, isto é, CNTP, a equação fica $r = 60'25'' \tan (z)$). Repare entretanto que esta equação só se ajusta bem aos dados para valores de distancia zenital menores que 70°; perto do horizonte, como já dissemos, a refração é muito sensível a pequenas variações de inclinação da incidência dos raios, bem como a outros parâmetros atmosféricos.

- 75- A duração do dia pode ser alterada pela refração atmosférica? Estime em quanto. Esse valor deve depender da latitude?
- 76- É possível ver ao mesmo tempo acima do horizonte o Sol e a Lua Cheia? Em qualquer latitude?

77- Calcule as dimensões do Sol quando sua borda inferior toca o horizonte.

78- Qual das figuras abaixo melhor representa a deformação do Sol quando ele toca o horizonte?



79- **(Alguma Olimpíada Russa)** Por causa da refração atmosférica, estrelas nunca visíveis em uma dada longitude são circumpolares! Considerando a refração atmosférica como $28'$ para 90° , qual deve ser a declinação de uma estrela para que ela esteja nessa condição?

80- A refração atmosférica pode alterar as duas coordenadas equatoriais de uma estrela, ou só uma? Sempre existe essa dependência?

81- **(IAO 2003)** O Urso Polar da última IAO ainda está sentado no Pólo Norte, mas esse ano ele ganhou um companheiro: um Pingüim sentado no Pólo Sul. Recentemente, após o final da noite polar, o Pingüim viu o nascer do Sol. O que o urso observou nesse mesmo instante? Desenhe o que o Urso Polar estava vendo no instante em que o Pingüim observava exatamente metade do disco solar no horizonte. Suponha que a Terra seja esférica. A resposta deve ser explicada/complementada por um desenho do urso no Pólo Norte. Os tamanhos reais ou angulares devem necessariamente constar na figura. Relembre, na solução, as informações necessárias sobre os animais envolvidos.

82- **(IAO 2005)** A Estrela Polar: É amplamente sabido que a altura da Estrela Polar em relação ao horizonte é numericamente igual à latitude geográfica do local de observação; e que sua direção corresponde à direção Norte. Essa regra possui, contudo, uma certa margem de incerteza. Encontre a incerteza máxima (em graus e minutos) ao se utilizar este método para encontrar a latitude de um lugar ($\delta\varphi$), e a direção Norte ($\delta\beta$). As observações em questão foram feitas no Observatório Xing Long, próximo a Beijing. A declinação da estrela polar é de $89^\circ 10'$. A latitude aproximada de Beijing é $\varphi = 40^\circ$.

12.2 Seeing

Essa dependência de outros parâmetros, que causa variações no índice de refração, acaba por criar um segundo efeito, qualitativamente diferentes. O índice de refração depende da densidade, pressão e temperatura do meio, e a atmosfera possui inúmeras células de densidade, pressão e temperatura, que ficam se criando, desaparecendo e variando suas propriedades. Existem as massas de ar, as ondas de pressão, as células térmicas, as nuvens, o vento ... Isso faz com que a posição das estrelas fique variando, muito rápido - mais rápido que o intervalo mínimo de percepção dos nossos olhos. Isso faz com que vejamos o brilho da estrela se esticando pra um lado e pro outro, como se as estrelas tivessem pontas. É um fenômeno tão bem conhecido pelas pessoas que existe até um verbo para ele: dizemos que a estrela está *cintilando*.

Essas rápidas oscilações também são menores que o tempo usual em que o diafragma de um CCD fica aberto para produzir uma imagem. Claro que podemos fazer imagens com um tempo de exposição suficientemente pequeno; quando fazemos isso, e passamos as imagens como um filminho, vemos os pontos luminoso dançando sobre a superfície do CCD. Com tempos de exposição mais longos, entretanto, o que obtemos é um grande borrão, com um diâmetro muito

maior que o diâmetro físico da imagem da estrela (aquele definido pela difração óptica). Esse efeito é conhecido como *SEEING*. Em locais usuais e para comprimentos de onda no visível, o seeing varia entre 0,8'' e 2,2'' durante a noite, e entre 5,6'' e 11,3'' durante o dia.

Contudo, é possível fazer variar muito esses valores. Em noites com muito vento, muita turbulência e/ou muita umidade, esses valores podem ficar muito altos. As camadas de poluição das cidades (partículas grandes em suspensão) também aumentam muito o seeing. A própria emissão de calor das comunidades humanas causa mais perturbações no ar. É por isso, principalmente, que telescópios profissionais devem ficar distantes dos grandes centros, longe de litorais, em lugares secos, isolados, e de preferência no alto de montanhas (para evitar as camadas mais baixas da atmosfera).

Um último tópico é o da cintilação de planetas. Quando se observa o céu, costuma-se aprender que a distinção básica entre planetas e estrelas no céu é que planetas não cintilam. Isso é verdade na maior parte do tempo (embora seja possível ver planetas cintilando claramente, se as condições de vento e umidade forem adversas), e pode ser explicado de uma forma simples: enquanto planetas aparecem no céu como pequenos disquinho, facilmente reconhecíveis como tal com pequenos telescópios, estrelas são sempre objetos pontuais mesmo para nossos melhores telescópios. Assim, a cintilação dos planetas acontece só nas suas bordas, perturbando muito menos a imagem como um todo. Por isso, normalmente, o brilho dos planetas nos parece bem mais sólido.

- 83- Qual o tamanho mínimo de um objeto na Lua para ser visto a olho nu (i) sem seeing e (ii) com seeing ?

12.3 Extinção

Como todas as outras coisas, a atmosfera é composta de substâncias comuns, que, como todas as substâncias, absorvem e refletem de forma diferente luz de comprimentos de onda diferentes¹. Isso é inclusive bom para nós como seres vivos, pois precisamos de uma boa dose de calor para continuarmos vivos, mas certas radiações nos matariam.

Um fenômeno associado a esse, mas que não depende diretamente da composição química da atmosfera, é aquele segundo o qual raios de menor comprimento de onda (mais azuis) são mais espalhados que de maior. Esse fenômeno retenção e espalhamento é conhecido como *EXTINÇÃO DE COR*.

As regiões do espectro eletromagnético para as quais a atmosfera é transparente são chamadas *JANELAS ATMOSFÉRICAS*. No caso da atmosfera terrestre, existem duas grandes janelas: a que deixa passar luz visível e o infravermelho próximo, e depois uma janela em rádio. Por outro lado, comprimentos de onda UV são fortemente filtrados (para sorte da nossa pele, que não gosta de câncer) e os de Raio X são quase-completamente bloqueados (para sorte das nossas vísceras, que gostam menos ainda de câncer).

Assim, a astronomia observacional se desenvolveu através das janelas atmosféricas existentes. Primeiro, obviamente, com a radiação visível; esta foi expandida para o infravermelho depois que os novos comprimentos de onda foram descobertos. Isso possibilitava gerar espectros com bandas muito maiores (mas com resolução mais baixa), o que é especialmente útil para estudar objetos mineralogicamente complexos, como planetas e asteróides. Depois, também com a descoberta do rádio, a radio-astronomia pôde se desenvolver, com um conjunto totalmente diferente de técnicas. Em breve teremos um capítulo específico para as técnicas radioastronômicas, aguardem.

¹Essa discussão fica melhor contextualizada depois de se ter lido os capítulos de Cores e de Espectros do Volume IV

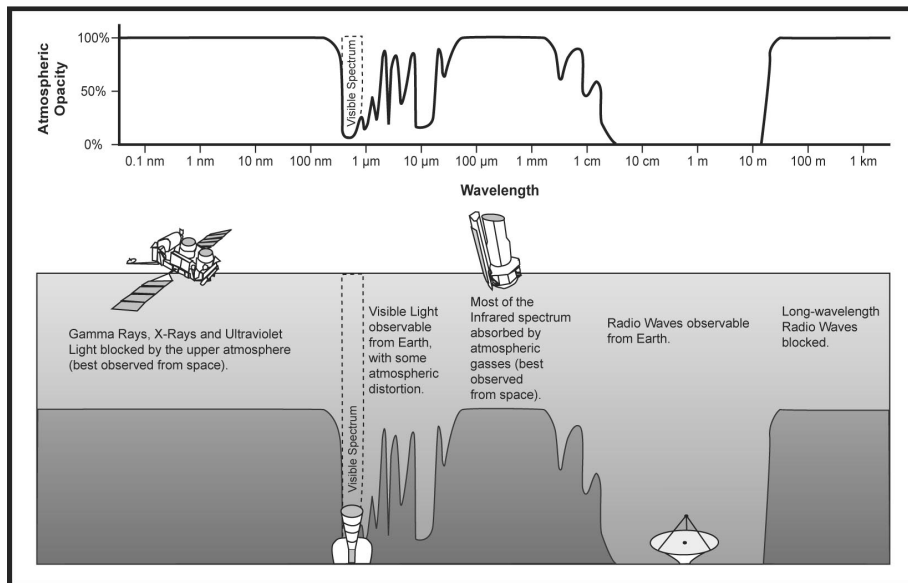


Figura 12.3: Extinção da radiação eletromagnética na atmosfera.

- 84- **(IAO 96)** Por que às vezes é melhor usar um telescópio pequeno em órbita do que usar um grande telescópio no topo de uma montanha?
- 85- Por que o céu é azul? Por que os sinais de trânsito são vermelhos?

Capítulo 13

Telescópios Atuais

O capítulo anterior deve ter sido convincente sobre as diversas formas através das quais a atmosfera atrapalha a observação astronômica. Por isso, telescópios novos sempre tentam fugir dela, ou serem construídos de forma a minimizar (se possível eliminar) os efeitos atmosféricos.

13.1 Grandes Telescópios na Terra

Como já dissemos, os grandes telescópios atuais têm sido construídos em lugares bem isolados, preferencialmente em montanhas ou desertos ou, melhor ainda, montanhas que fiquem em desertos. Isso cria uma situação política interessante, já que alguns poucos países (como Chile, África do Sul, Austrália), que possuem locais secos e montanhosos, passam a receber muito dos telescópios internacionais (e se beneficiar com lucros e com desenvolvimento tecnológico e de mão-de-obra local). EUA e Japão, por exemplo, costumam construir seus telescópios em seu próprio território; os países europeus, entretanto, precisam buscar territórios externos.

Foi nesse contexto que surgiu, em 1962, uma instituição importante para a construção de telescópios hoje: o *European Southern Observatory* (ESO). O ESO recebe dinheiro de 14 países europeus, e por isso consegue acumular capital para construir grandes telescópios, como o famoso VLT (*Very Large Telescope*), que fica no Atacama, Chile, e consiste em quatro telescópios com espelho primário de 8,2 m cada (que podem funcionar juntos, usando interferometria). O ESO possui outros telescópios menores (ainda assim bastante grandes), todos situados em três grandes áreas no Atacama (La Silla, Paranal e Llano de Chajnantor).

Neste último, está em construção o ALMA (*Atacama Large Millimeter Array*), para radioastronomia. Trata-se um conjunto de cerca de 50 antenas com 12 metros de diâmetro cada, constituindo o maior, mais caro e mais ambicioso projeto astronômico em construção hoje. Seu orçamento ultrapassa um bilhão de dólares; por isso, além do dinheiro do próprio ESO, o projeto tem também dinheiro dos Estados Unidos, Canadá e Japão ¹.

Para o futuro, um projeto do ESO que deve ser destacado é o E-ELT (*European Extremely Large Telescope*), com um espelho de 42 m (formado a partir de diversos espelhos hexagonais justapostos)². O projeto está na fase dos estudos técnicos, mas suas obras devem começar no

¹Os americanos investem através do NRAO (*National Radio Astronomical Observatory*), uma instituição parecida com o ESO. Eles financiarão pelo menos 25 antenas e talvez mais 7 (o ESO financiara o mesmo 25+7). O Canadá está fornecendo dinheiro diretamente pelo seu Conselho Nacional de Pesquisa. O Japão contribui através do NAOJ (*National Astronomical Observatory of Japan*), através da construção do ACA (*Atacama Compact Array*), um sub-conjunto de quatro antenas de 12 m e doze de 7 m que vai integrar o ALMA. A Espanha, a China e outros países asiáticos também se integraram ao projeto de alguma forma.

²A tecnologia atual permite espelhos sólidos de, no máximo, 8 m. Telescópios como o *Gran Telescopio Canarias*, hoje o maior do mundo em operação, usam espelhos hexagonais justapostos para produzir um espelho de 10 m. Também é um empreendimento de muitos países, razão pela qual o *Instituto de Astrofísica de Canarias*, que opera este telescópio, tem

máximo em 2010, para começar a operar em 2016. Sua localização deve ser nas Ilhas Canárias, Espanha (onde está o *Gran Telescópio Canarias*, ou no Atacama, Chile.

13.2 Telescópios Espaciais

Porém, a exploração espacial e a astronáutica fizeram a observação do céu entrar em uma era inteiramente nova: a dos telescópios que eliminaram *totalmente* o prolema da atmosfera: aqueles que estão fora da atmosfera, em órbita da Terra. São os TELESCÓPIOS ESPACIAIS.

O mais famoso destes telescópios é provavelmente o *Hubble*, responsável por boa parte das lindas fotos que vemos por aí. Ele consegue observar em uma ampla faixa do espectro eletromagnético. Ele se vale de outra vantagem de telescópios em órbita: a possibilidade de fazer imagens com tempo de exposição muito longas (o Hubble já fez imagens de mais de 100 horas). Mas existem outros muito famosos, como o *Infrared Astronomical Satellite* (IRAS) parceria entre EUA, Inglaterra e Holanda e que trabalha na faixa do infravermelho, ou o *Cosmic Background Explorer* (COBE) que trabalha na faixa do rádio – mais precisamente, na faixa da *radiação cósmica de fundo*, e foi responsável por importantes confirmações ligadas à teoria do Big Bang³.



Figura 13.1: Telescópio Espacial Hubble.

Mas telescópios espaciais possuem problemas muito peculiares de lançamento, operação e manutenção, razão pela qual são muito mais caros e têm limitações mais severas ao tamanho. Eles são operados também por outras instituições que não inteiramente acadêmicas; são operados pelos órgãos estratégicos dos governos conhecidos como AGÊNCIAS ESPACIAIS. A agência americana, NASA (*National Astronautics and Space Agency*), é a mais famosa, talvez pelo Hubble e talvez por ser mais tradicional, mas existem outras muito importantes, como a Roscosmos (agência russa), a ESA (*European Space Agency*) e a JAXA (*Japan Aerospace eXploration Agency*). O Brasil mesmo possui sua AEB (Agência Espacial Brasileira). Cada uma das agências possui seus próprios projetos aeroespaciais e, dentre eles, seus próprios projetos de telescópios fora da Terra.

Um problema específico dos telescópios espaciais é que, fora da atmosfera, eles estão mais suscetíveis ao danoso vento solar. Esse problema, e outros relativos a interferências da Terra e da Lua, serão resolvidos pela próxima geração de telescópios espaciais, a ser hospedada no Ponto Lagrangeano L2, do sistema Terra-Sol. Assim, a posição deles relativa à Terra e ao Sol

3 sido chamado de *European Northern Observatory*, em contraste com o ESO.

³ Vide cosmologia de novo.

será sempre a mesma, facilitando muito a proteção. O L2 será o local do sucessor do Hubble, o *James Webb Space Telescope*, da NASA. Com lançamento planejado para, no máximo, 2014, este telescópio terá um espelho de 6,2 metros, composto por 18 partes hexagonais, como os outros. Repare que, apesar de ter um espelho muito menor, suas demais vantagens o coloca em pé de igualdade com os maiores telescópios terrestres.

Outro telescópio no L2, da concorrência, é o *Herschel*, produzido e controlado pela ESA. Com um espelho de 3,5 m e equipamentos de alta performance, ele foi lançado em maio de 2009 da Guiana Francesa. Suas primeiras imagens foram enviadas no meio de junho e, no meio de julho deste ano, ele entrou em uma órbita de Lissajous (que é estável) em torno do L2. Junto com ele, a ESA lançou também o *Planck*, que também já está em órbita estável. O Planck fará observações em microondas, com o objetivo específico de procurar anisotropias na Radiação Cósmica de Fundo. Aguardem resultados excitantes vindos de ambos, ao longo dos próximos meses.

Outro habitante do L2 que merece ser mencionado é o *Gaia*, a ser lançado em maio de 2012. Diferente dos outros telescópios espaciais (devotados a estudos astrofísicos diversos), Gaia fará medidas astrométricas, apurando posições, paralaxes, movimentos próprios e velocidades radiais com incrível precisão, criando um detalhado mapa 3D da Via Láctea. Ela será o substituto do *Hipparcos*, (emphHigh Precision Parallax Collecting Satellite), que também foi lançado pela ESA e operou entre 1989 e 1993. Diferente de Gaia, o Hipparcos ocupava uma órbita geoestacionária.

Outra vantagem dos telescópios espaciais é não depender das janelas atmosféricas. Foram eles, então, que permitiram o grande desenvolvimento da astronomia em comprimentos de onda diferentes do visível-IR e do rádio.

A astronomia dos Raios-X, por exemplo, começou com balões em grandes altitudes (até 40 km), com a primeira X-fonte sendo descoberta em 1961. Então vieram os satélites. Os mais famosos hoje são o Chandra, da NASA (um dos quatro grandes telescópios da agência americana, junto com Hubble, Spitzer e Compton) e o XMM-Newton (*X-Ray Multi-Mirror Mission - Newton*), da ESA. Ambos foram lançados em 1999, já fizeram diversas importantes descobertas e ainda estão em operação.

A astronomia dos raios gama tem uma história parecida. Aqui, os telescópios mais famosos são o *Compton Gamma-ray Observatory*, um dos quatro grandes da NASA, que operou até o ano 2000; o *INTEGRAL* (*International Gamma-ray Astrophysics Laboratory*), comandado pela ESA em parceria com a Roscosmos e a NASA, que é o mais sensível já lançado; e o *Fermi Gamma-ray Space Telescope*, lançado em 2008 pela NASA, em parceria com países europeus e o Japão.

Há ainda diversos telescópios menores detectando comprimentos específicos de IR, UV e microondas. Além disso, há os satélites para detecção de partículas e os para detecção de ondas gravitacionais. Há também as diversas sondas, que já povoam boa parte do Sistema Solar interno (antes do Cinturão de Kuiper).

- 86- Onde, na Terra, a montagem equatorial de um telescópio é igual à altazimutal?
- 87- Em um telescópio espacial, o poder resolutor teórico é mais próximo ou mais distante do observado?
- 88- Um observador terrestre apaixonado por Rigel observa a estrela do seu nascer ao seu pôr durante uma noite. Que diferença ele notou com relação ao brilho da estrela com o passar do tempo? E se ele observasse Antares, perceberia essa diferença? Se sim, essa diferença seria mais ou menos acentuada?

Unidade IV

Apêndices

Apêndice A

Experimentos

Agora que você já aprendeu bastante sobre como fazer medidas e tratar dados, é hora de praticar! Faça alguns experimentos com características suas ou de outras pessoas, coisas do cotidiano, etc. Sugerimos quatro a seguir. Depois disso, você estará pronto para treinar com dados astronômicos em vez de dados cotidianos.

A.1 Acuidade Visual

Objetivo:

Determinar experimentalmente a acuidade visual do aprendiz.

Material:

- Folha branca;
- Régua;
- Caneta preta (ou qualquer tipo de material semelhante);
- Papel cartão, papelão ou semelhante, para cobrir os olhos, com um orifício circular de cerca de 1 cm de diâmetro;
- Trena ou fita métrica.

Noções Teóricas:

O poder de resolução do olho é o menor ângulo a partir do qual é possível distinguir dois pontos (ou linhas) a uma certa distância um do outro. Esta é a idéia do experimento que faremos para medir o poder de resolução (ou acuidade visual) do olho.

De acordo com a definição de poder de resolução do olho, definimos a distância d como sendo a distância entre o cartão (ou o olho) até o anteparo onde estão desenhadas as linhas e l a distância entre as linhas (como na figura A.1).

Podemos calcular o ângulo usando a relação trigonométrica $\tan x \sim x_{(rad)}$ em meia abertura e usando que π radianos = 180°:

$$\frac{a}{2}(\text{rad}) \approx \tan \frac{a}{2} = \frac{L}{2D}$$

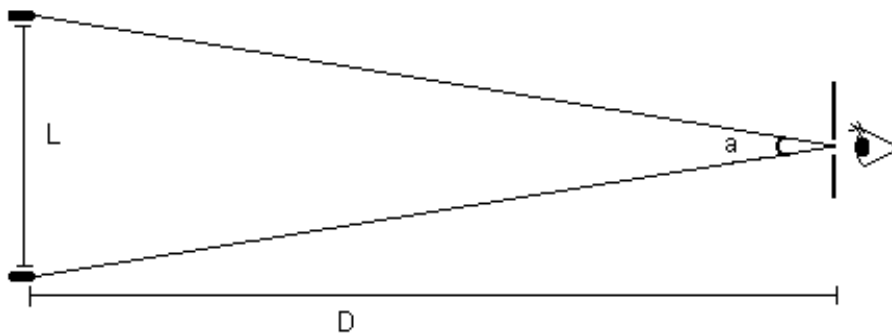


Figura A.1

$$a('') = 206265 \frac{L(m)}{D(m)}$$

Procedimento Experimental:

Desenhe sobre a folha de papel duas linhas paralelas a uma distância de no máximo 5 mm (o ideal é que a distância seja próxima de 1 mm, mas esta distância é difícil de medir), esta será a distância l , meça ela mais de uma vez em mais de uma região das retas.

Fixe a folha em uma parede bem iluminada, de preferência branca, e com bastante espaço para você tomar distância dela e com um chão plano, para que seja fácil medir a distância da parede com a trena ou fita métrica, pois a distância deve ser maior que o comprimento da fita métrica.

Olhando através do orifício no papelão, com apenas um olho, se afaste da folha até a maior distância na qual você ainda consegue perceber que na folha existem duas retas separadas. Meça esta distância (é a distância d). Repita este procedimento pelo menos mais duas vezes e depois faça o mesmo com o outro olho.

Tire a média da distância entre as retas e das distâncias até a parede de cada olho separadamente. Com isso, use a fórmula 1 para obter o poder de resolução de cada olho, compare os dois¹.

¹ Não é incomum pessoas terem poder de resolução diferentes para cada olho.

A.2 Tempo de Reação

Objetivo:

Determinar o tempo de reação do aprendiz a um sinal luminoso (ou sonoro).

Material:

- Uma régua de 30 cm ou mais com divisões de milímetros;
- Uma mesa, criado mudo ou escrivaninha de madeira.
- Algum ajudante, como seu pai, sua mãe, algum irmão, colega, amigo, inimigo, etc. . .

Noções Teóricas:

Os corpos em queda livre caem com aceleração g (desde que suas velocidades sejam pequenas o suficiente para os efeitos de resistência do ar sejam desprezíveis). Neste caso, usaremos como corpo em queda a própria régua. Quando um corpo sai do repouso, o deslocamento do corpo é dado pela equação:

$$S = \frac{g}{2} t^2$$

onde t é o tempo de queda, este tempo de queda será o tempo de reação do “aprendiz” diante um sinal luminoso (“a régua está caindo”) ou sonoro (o ajudante emitiu algum som ao soltar a régua). Podemos isolar o tempo na equação:

$$t = \sqrt{\frac{2S}{g}}$$

Procedimento Experimental:

Para medir o tempo de reação, faça seu ajudante colocar a régua ao lado da mesa, paralela a sua borda, “de pé” com seu zero exatamente na borda superior, próxima da mesa mas sem que ela encoste na mesa. Agora, você deve apertar a régua contra a borda da mesa quando perceber que esta está em queda livre. Para isso, peça a seu ajudante para soltar a régua em algum momento (sem combinar qual seria este). Para “pegar a régua”, você deve manter a mão sobre a mesa, com o polegar fora dela, envolvendo a régua sem encostar nela, cerca de 3 ou 4 cm abaixo do topo da mesa. Quando perceber que a régua está caindo aperte-a contra a borda da mesa e meça a distância que ela caiu. Repita esta experiência pelo menos 2 vezes.

Você pode também medir o tempo de reação sonora pedindo para o ajudante emitir um som quando soltar a régua, ao invés de você prestar atenção nela (para isso, sugere-se que você não olhe para a régua também).

Para cada caso, calcule o tempo de queda usando a equação N e depois tire uma média dos tempos. Adote $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Veja exemplos nas fotos² a seguir:

²Nota-se a masculinidade dos realizadores do experimento nas fotos pela presença de cachorrinhos de enfeite em cima da mesa



Figura A.2: Ajudante ajustando a régua na altura.



Figura A.3: Aprendiz preparando-se para pegar a régua



Figura A.4: Aprendiz prendendo a régua alguns instantes depois.

A.3 Declinação Magnética

Objetivo:

Encontrar a Declinação Magnética para a cidade do aprendiz.

Material:

- Bússola;
- Gnômon;
- Papel.

Noções Teóricas:

Como se sabe, as bússolas não apontam exatamente para o norte geográfico, mas para o norte magnético. O ângulo formado entre os dois é o que chamamos de DECLINAÇÃO MAGNÉTICA, e é dependente do lugar em que se está.

Para encontrar a direção norte verdadeira basta observar a direção da menor sombra de um gnômon durante o dia. Esta sombra irá apontar na direção Sul ou na direção Norte, dependendo de onde se está e a época do ano³.

Procedimento Experimental:

Primeiro devemos fixar um gnômon em um lugar onde pegue Sol ao meio dia verdadeiro, em cima de um papel (seu gnômon pode ser por exemplo um lápis ou uma caneta fixados verticalmente sobre o papel).

Então, ao meio dia verdadeiro (horário da menor sombra) marcamos no papel a direção da sombra do gnômon.

O horário da menor sombra pode ser determinado utilizando-se um mapa. Sabendo-se a longitude do meridiano central do seu fuso-horário e a longitude de sua cidade é possível determinar o horário da menor sombra (que raramente coincidirá com o meio dia civil).

Sem mover o papel do lugar marcamos a direção norte da bússola e após isso medimos o ângulo entre as duas direções. Este ângulo será a declinação magnética.

Repita este experimento algumas vezes, tire a média e o desvio, e após compare com dados encontrados na literatura⁴.

³Se você encontra uma declinação magnética maior que 90°, o que você fez de errado?

⁴Onde encontro estes dados? Resposta de sempre: PESQUISE!

A.4 Constante Solar

Objetivo:

Determinar o valor da Constante Solar.

Material:

- 2 quantidades iguais de gelo;
- 2 copos de isopor⁵;
- Relógio.

Noções Teóricas:

Chamamos de **CONSTANTE SOLAR** o fluxo luminoso do Sol sobre a Terra (quantidade de luz por unidade de área e de tempo). Uma relação básica que podemos usar é:

$$F = \frac{E}{A \cdot t}$$

onde F é o fluxo luminoso incidente sobre a superfície, E a energia total incidente, A a área na qual essa energia incidiu e t o tempo gasto no experimento.

Essa energia pode ser medida pelo derretimento de gelo exposto ao Sol. Como:

$$Q = m \cdot L$$

onde Q é o calor fornecido ao gelo, m a massa de gelo derretida e L é o calor latente (quantidade de calor que deve ser fornecida para derreter 1g de gelo, e vale aproximadamente 334 J/g).

Como L é constante, temos que a quantidade de energia recebida pelo gelo será diretamente proporcional à massa de gelo derretida. Como a densidade da água é aproximadamente constante ($\sim 1 \text{ g/cm}^3$), teremos que a energia será proporcional ao volume de água derretida.

Procedimento Experimental:

Próximo ao meio-dia, coloque duas quantidades iguais de gelo⁶ em dois copos de isopor iguais, de preferência com as paredes internas pintadas de preto, e após isso coloque um dos copos ao Sol e o outro sob uma sombra e meça um certo tempo.

Após esse tempo, meça o volume de água derretida nos dois copos e veja a diferença entre os dois volumes. Esta diferença nos dará a quantidade de gelo que foi derretida diretamente pela energia luminosa do Sol, pois será descontada a energia proveniente da troca de calor com o ambiente quando subtraímos o volume do gelo que derreteu à sombra.

Com esse volume medido podemos calcular a quantidade de energia solar total recebida pelo gelo, e, dividindo-se isto pela área e pelo tempo gasto encontramos a Constante Solar. Compare seus valores obtidos e explique prováveis causas de erro experimental.

⁵Não precisa obrigatoriamente ser isopor, mas devem ser bons isolantes de temperatura, para se evitar troca de calor pelas paredes no recipiente.

⁶Quanto mais próximo o gelo estiver de 0° melhor a precisão do experimento.

Apêndice B

Análise de Dados

Agora trataremos dados astronômicos de verdade. As questões desta seção possuem três fontes principais: provas práticas da IAO, (*International Astronomy Olympiad*), provas de análise de dados da IOAA (*International Olympiad of Astronomy and Astrophysics*) e exercícios do CLEA (*Contemporary Laboratory Experiences on Astronomy*)¹. Por conveniência, separamos os problemas de acordo com os assuntos das apostilas, significando que você precisa conhecer os assuntos das apostilas anteriores para fazer os problemas correspondentes. É claro, um aluno completo precisa ter feito todas. Os problemas mais completos, e também os mais importantes, são os que envolvem características diversas dos instrumentos e todos os assuntos. Boa sorte!

¹<http://www3.gettysburg.edu/~marschal/clea/CLEAhome.html>

B.1 Céu

B.1.1 Refração (IAO 2005)

A distância zenital (Z) de um objeto celeste é definida como sua distância angular ao zênite do observador (para um objeto sobre o zênite, $Z = 0^\circ$; e sobre o horizonte, $Z = 90^\circ$). Contudo, o efeito de refração atmosférica reduz a distância zenital medida (Z_m), em comparação com a distância zenital real (Z_t), por uma quantidade R (medida em segundos de arco). A tabela a seguir pode ser utilizada para observações ao nível do mar, à temperatura de 10°C :

Z_m	R	Z_m	R
0°	$0''$	82°	$394''$
10°	$10''$	83°	$444''$
20°	$21''$	84°	$509''$
30°	$34''$	85°	$593''$
40°	$49''$	86°	$70''$
50°	$70''$	87°	$863''$
60°	$101''$	88°	$1103''$
70°	$159''$	89°	$1481''$
80°	$319''$	$89^\circ 31'$	$1760''$
81°	$353''$	90°	$2123''$

Para distâncias zenitais menores que um certo limite Z_F , uma fórmula aproximada para o cálculo é:

$$R = 60,25'' \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{273}{273 + T(^{\circ}\text{C})} \cdot \tan Z_m$$

onde B é a pressão atmosférica em milímetros de Mercúrio (mmHg) e $T(^{\circ}\text{C})$ é a temperatura em $^{\circ}\text{C}$.

- Encontre o intervalo de valores para Z_m em que é possível utilizar a fórmula acima com uma precisão de $1''$ – isto é, encontre o valor de Z_F .
- Quando o Sol está em seu ponto mais alto do céu de junho, em um certo local, sua distância zenital observada é de $16^\circ 34,4'$. Calcule a latitude do sítio de observação com uma precisão de $0,1'$. Considere $\epsilon = 23^\circ 26,4'$.
- Calcule, com precisão de $0,1'$, a distância zenital verdadeira do centro do Sol no momento em que o disco solar desaparece no horizonte, durante o pôr-do-sol.
- Utilizando as informações acima, faça os cálculos necessários. Desenhe, em um papel quadriculado, o formato do Sol quando ele é visto tocando o horizonte. Cada quadradinho equivale a $2'$ no papel quadriculado. Anote na folha de respostas que informações e método de cálculo foram utilizados para se fazer o desenho.

Obs: Em todos os itens, considere o diâmetro angular do Sol $32,0'$, já corrigido pela refração atmosférica.

B.1.2 Shenzou-6 (IAO 2005)

Observadores em Wuqiang (116° L, 38° N) viram o satélite chinês *Shenzou-6* aparentemente perto da Estrela Polar às 04:54, hora local de Pequim, em 14 de Outubro de 2005. Sua trajetória é mostrada no mapa B.1. É sabido que o período orbital do satélite é de 91,2 minutos.

- (a) Considere que o satélite se move em uma órbita circular. Em qual constelação (ou próximo de qual estrela) seria visto o satélite ao mesmo tempo por um observador em Xilinhaote (116° L, $43,9^\circ$ N)?
- (b) Se o tempo estiver limpo. Quando a espaçonave seria vista simultaneamente acima das duas cidades pela próxima vez?

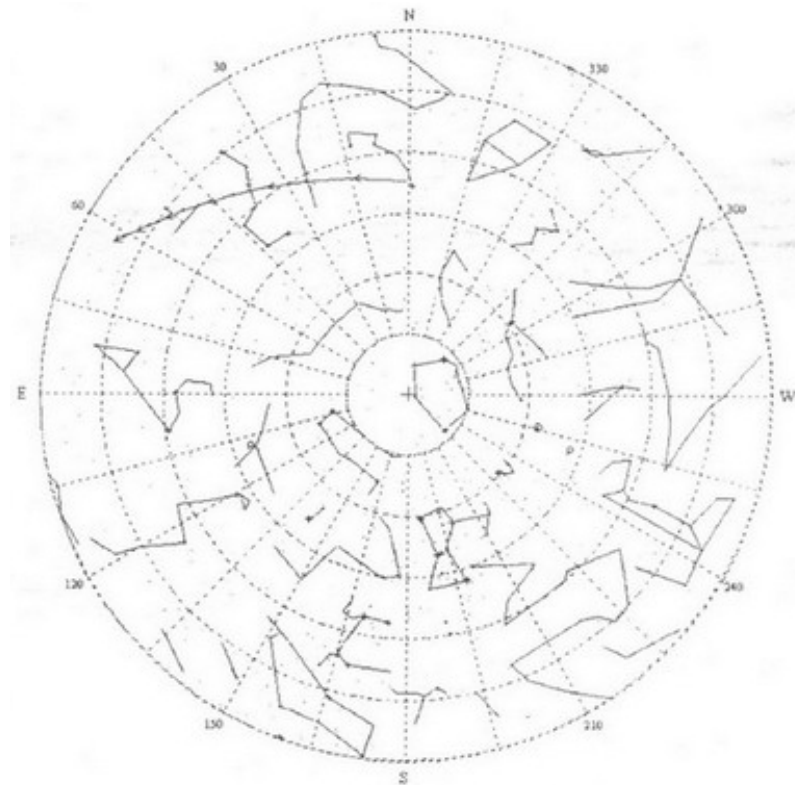


Figura B.1

B.1.3 Coordenadas Galácticas (IAO 2004)

Segue abaixo uma tabela com dados de algumas estrelas brilhantes do céu.

#	nome da estrela	paralaxe (argseg.)	magnitude visível	longitude galáctica (°)	latitude galáctica (°)
1	α CMa	0,376	-1,46	227	-9
2	α Car	0,018	-0,72	261	-25
3	α Cen	0,751	-0,27	316	1
4	α Boo	0,009	-0,04	15	69
5	α Lyr	0,123	0,03	67	19
6	α Aur	0,073	0,08	163	5
7	β Ori	0,003	0,12	209	-25
8	α CMi	0,288	0,46	291	13
9	α Eri	0,032	0,46	291	-59
10	α Ori	0,005	0,50	200	-9
11	β Cen	0,016	0,61	312	1
12	α Aql	0,198	0,77	48	-9
13	α Tau	0,048	0,85	181	-20
14	α Cru	0,008	0,87	300	0
15	α Sco	0,019	0,96	352	15
16	α Vir	0,021	0,98	316	51
17	β Gem	0,093	1,14	192	23
18	α PsA	0,114	1,16	20	-65
19	α Cyg	0,004	1,25	84	2
20	β Cru	0,007	1,25	302	3
21	α Leo	0,039	1,35	226	49

- (a) Usando esses dados, calcule, para cada estrela, sua magnitude estelar absoluta (M) e a distância ao Sol projetada no plano do Equador Galáctico (R). Faça uma tabela com os resultados conforme o modelo abaixo:

#	nome da estrela	magnitude absoluta	distância ao Sol projetada no plano do equador galáctico (Anos-Luz)
1	...	...	...

- (b) Arranje as estrelas na Tabela em ordem decrescente de magnitude estelar absoluta.
- (c) Para R menor que 50 anos-luz, desenhe suas posições, numa escala 1 cm : 10 anos-luz, projetadas no plano do Equador Galáctico. O diâmetro das estrelas deve ser uma função da magnitude (veja escala abaixo da tabela de dados). A direção 0° de longitude galáctica deve ser horizontal, orientada para a direita. Identifique as estrelas com a numeração da tabela de dados (não na tabela de solução).

B.1.4 Objetos do Sistema Solar (IOAA 2007)

A tabela a seguir contém um grupo de dados que marca a posição aparente de quatro objetos do Sistema Solar, durante um período de um ano. O local de observação tem latitude $18^{\circ} 47' 00,0''$ N e longitude $98^{\circ} 59' 00,0''$ L. Mostre seu método de análise cuidadosamente e responda às seguintes perguntas:

- (a) Quais são os nomes de A, B, C e D?
- (b) Durante o período de observação, qual objeto pôde ser observado por maior tempo durante a noite?
- (c) Qual foi a data correspondente à situação do item (b)?
- (d) Assumindo que as órbitas são coplanares e circulares, faça um diagrama indicando a posição dos quatro objetos e da Terra na data indicada em (c). A resposta pode apresentar um dos objetos, como o Sol, no centro do Sistema Solar. Outros objetos, incluindo a Terra, podem ser colocados com seus valores de elongação corretos na data. Não deixe de indicar, no desenho, a direção do Equinócio Vernal.

Pg 1	A		B		C		D	
Data	RA	DEC	RA	DEC	RA	DEC	RA	DEC
01/Jan	18:44:58.4	-23: 2:17.85	14:44:24.9	-14:45:45.43	20: 7:27.9	-17:50:16.42	2:32:15.7	16:35:39.85
02/Jan	18:49:23.4	-22:57:19.43	14:45: 3.1	-14:48:31.93	20: 5:52.7	-17:39:15.68	2:33:13.9	16:41: 7.60
03/Jan	18:53:48.0	-22:51:53.55	14:45:40.8	-14:51:15.99	20: 4: 8.3	-17:28:34.66	2:34:14.2	16:46:42.45
04/Jan	18:58:12.2	-22:46: 0.38	14:46:18.1	-14:53:57.60	20: 2:15.1	-17:18:14.30	2:35:16.7	16:52:24.11
05/Jan	19: 2:36.0	-22:39:40.10	14:46:55.0	-14:56:36.72	20: 0:13.6	-17: 8:15.52	2:36:21.3	16:58:12.28
06/Jan	19: 6:59.4	-22:32:52.89	14:47:31.5	-14:59:13.34	19:58: 4.4	-16:58:39.20	2:37:27.9	17: 4: 6.66
07/Jan	19:11:22.3	-22:25:38.95	14:48: 7.6	-15: 1:47.46	19:55:48.2	-16:49:26.19	2:38:36.6	17:10: 6.96
08/Jan	19:15:44.7	-22:17:58.51	14:48:43.2	-15: 4:19.05	19:53:25.8	-16:40:37.32	2:39:47.2	17:16:12.87
09/Jan	19:20: 6.5	-22: 9:51.80	14:49:18.3	-15: 6:48.11	19:50:58.1	-16:32:13.36	2:40:59.8	17:22:24.10
10/Jan	19:24:27.9	-22: 1:19.07	14:49:53.1	-15: 9:14.63	19:48:26.0	-16:24:15.06	2:42:14.2	17:28:40.35
11/Jan	19:28:48.6	-21:52:20.57	14:50:27.3	-15:11:38.62	19:45:50.4	-16:16:43.10	2:43:30.5	17:35: 1.35
12/Jan	19:33: 8.8	-21:42:56.58	14:51: 1.1	-15:14: 0.07	19:43:12.4	-16: 9:38.12	2:44:48.6	17:41:26.79
13/Jan	19:37:28.3	-21:33: 7.35	14:51:34.5	-15:16:18.97	19:40:33.1	-16: 3: 0.70	2:46: 8.4	17:47:56.39
14/Jan	19:41:47.2	-21:22:53.17	14:52: 7.3	-15:18:35.29	19:37:53.5	-15:56:51.34	2:47:30.0	17:54:29.86
15/Jan	19:46: 5.5	-21:12:14.32	14:52:39.7	-15:20:49.02	19:35:14.7	-15:51:10.45	2:48:53.2	18: 1: 6.92
16/Jan	19:50:23.1	-21: 1:11.08	14:53:11.6	-15:23: 0.13	19:32:37.8	-15:45:58.36	2:50:18.0	18: 7:47.29
17/Jan	19:54:40.0	-20:49:43.76	14:53:43.0	-15:25: 8.59	19:30: 3.8	-15:41:15.29	2:51:44.5	18:14:30.69
18/Jan	19:58:56.3	-20:37:52.64	14:54:13.8	-15:27:14.38	19:27:33.8	-15:37: 1.35	2:53:12.5	18:21:16.86
19/Jan	20: 3:11.8	-20:25:38.03	14:54:44.2	-15:29:17.48	19:25: 8.7	-15:33:16.52	2:54:42.0	18:28: 5.56
20/Jan	20: 7:26.6	-20:13: 0.24	14:55:14.0	-15:31:17.88	19:22:49.5	-15:30: 0.67	2:56:13.1	18:34:56.55
21/Jan	20:11:40.7	-19:59:59.61	14:55:43.3	-15:33:15.55	19:20:36.9	-15:27:13.55	2:57:45.6	18:41:49.60
22/Jan	20:15:54.1	-19:46:36.47	14:56:12.1	-15:35:10.50	19:18:31.7	-15:24:54.75	2:59:19.6	18:48:44.48
23/Jan	20:20: 6.7	-19:32:51.17	14:56:40.3	-15:37: 2.70	19:16:34.5	-15:23: 3.76	3: 0:55.1	18:55:40.99
24/Jan	20:24:18.6	-19:18:44.09	14:57: 7.9	-15:38:52.16	19:14:46.0	-15:21:39.92	3: 2:31.9	19: 2:38.91
25/Jan	20:28:29.7	-19: 4:15.58	14:57:35.0	-15:40:38.87	19:13: 6.6	-15:20:42.43	3: 4:10.2	19: 9:38.05
26/Jan	20:32:40.0	-18:49:26.03	14:58: 1.6	-15:42:22.82	19:11:36.7	-15:20:10.37	3: 5:49.8	19:16:38.18
27/Jan	20:36:49.6	-18:34:15.83	14:58:27.5	-15:44: 3.99	19:10:16.6	-15:20: 2.69	3: 7:30.7	19:23:39.10
28/Jan	20:40:58.3	-18:18:45.39	14:58:52.9	-15:45:42.35	19: 9: 6.6	-15:20:18.24	3: 9:13.0	19:30:40.57
29/Jan	20:45: 6.3	-18: 2:55.11	14:59:17.6	-15:47:17.87	19: 8: 6.8	-15:20:55.75	3:10:56.6	19:37:42.37
30/Jan	20:49:13.4	-17:46:45.40	14:59:41.8	-15:48:50.53	19: 7:17.5	-15:21:53.84	3:12:41.4	19:44:44.26
31/Jan	20:53:19.7	-17:30:16.67	15: 0: 5.3	-15:50:20.31	19: 6:38.5	-15:23:11.05	3:14:27.5	19:51:46.03
01/Fev	20:57:25.2	-17:13:29.32	15: 0:28.3	-15:51:47.19	19: 6: 9.9	-15:24:45.86	3:16:14.8	19:58:47.44
02/Fev	21: 1:29.8	-16:56:23.77	15: 0:50.5	-15:53:11.16	19: 5:51.6	-15:26:36.67	3:18: 3.3	20: 5:48.27
03/Fev	21: 5:33.7	-16:39: 0.44	15: 1:12.2	-15:54:32.21	19: 5:43.6	-15:28:41.84	3:19:53.0	20:12:48.31
04/Fev	21: 9:36.6	-16:21:19.73	15: 1:33.2	-15:55:50.35	19: 5:45.8	-15:30:59.69	3:21:43.8	20:19:47.33
05/Fev	21:13:38.8	-16: 3:22.08	15: 1:53.6	-15:57: 5.56	19: 5:58.0	-15:33:28.52	3:23:35.7	20:26:45.13
06/Fev	21:17:40.1	-15:45: 7.89	15: 2:13.4	-15:58:17.87	19: 6:20.0	-15:36: 6.61	3:25:28.8	20:33:41.50
07/Fev	21:21:40.6	-15:26:37.59	15: 2:32.4	-15:59:27.27	19: 6:51.6	-15:38:52.23	3:27:22.9	20:40:36.24
08/Fev	21:25:40.3	-15: 7:51.60	15: 2:50.9	-16: 0:33.77	19: 7:32.7	-15:41:43.65	3:29:18.1	20:47:29.14
09/Fev	21:29:39.2	-14:48:50.33	15: 3: 8.7	-16: 1:37.36	19: 8:23.0	-15:44:39.13	3:31:14.3	20:54:19.99
10/Fev	21:33:37.3	-14:29:34.21	15: 3:25.8	-16: 2:38.03	19: 9:22.2	-15:47:36.98	3:33:11.5	21: 1: 8.58
11/Fev	21:37:34.6	-14:10: 3.65	15: 3:42.2	-16: 3:35.75	19:10:30.1	-15:50:35.49	3:35: 9.7	21: 7:54.71
12/Fev	21:41:31.1	-13:50:19.07	15: 3:57.9	-16: 4:30.50	19:11:46.5	-15:53:32.98	3:37: 8.9	21:14:38.16
13/Fev	21:45:26.9	-13:30:20.86	15: 4:13.0	-16: 5:22.28	19:13:11.2	-15:56:27.82	3:39: 9.0	21:21:18.75
14/Fev	21:49:21.9	-13:10: 9.41	15: 4:27.3	-16: 6:11.07	19:14:43.7	-15:59:18.40	3:41:10.0	21:27:56.29
15/Fev	21:53:16.1	-12:49:45.09	15: 4:41.0	-16: 6:56.85	19:16:24.0	-16: 2: 3.15	3:43:11.9	21:34:30.59
16/Fev	21:57: 9.6	-12:29: 8.31	15: 4:54.0	-16: 7:39.63	19:18:11.6	-16: 4:40.56	3:45:14.8	21:40:22.41
17/Fev	22: 1: 2.5	-12: 8:19.44	15: 5: 6.2	-16: 8:19.38	19:20: 6.5	-16: 7: 9.17	3:47:18.5	21:47:28.81
18/Fev	22: 4:54.6	-11:47:18.89	15: 5:17.7	-16: 8:56.12	19:22: 8.2	-16: 9:27.61	3:49:23.0	21:53:52.40
19/Fev	22: 8:46.0	-11:26: 7.04	15: 5:28.6	-16: 9:29.84	19:24:16.5	-16:11:34.53	3:51:28.4	22: 0:12.13
20/Fev	22:12:36.8	-11: 4:44.28	15: 5:38.7	-16:10: 0.56	19:26:31.3	-16:13:28.66	3:53:34.7	22: 6:27.84
21/Fev	22:16:27.0	-10:43:11.03	15: 5:48.0	-16:10:28.26	19:28:52.2	-16:15: 8.81	3:55:41.8	22:12:39.40
22/Fev	22:20:16.5	-10:21:27.78	15: 5:56.7	-16:10:52.96	19:31:18.9	-16:16:33.91	3:57:49.7	22:18:46.67
23/Fev	22:24: 5.5	- 9:59:34.80	15: 6: 4.6	-16:11:14.61	19:33:51.2	-16:17:42.72	3:59:58.5	22:24:49.47
24/Fev	22:27:53.8	- 9:37:32.61	15: 6:11.8	-16:11:33.21	19:36:29.0	-16:18:34.31	4: 2: 8.0	22:30:47.67
25/Fev	22:31:41.5	- 9:15:21.63	15: 6:18.2	-16:11:48.75	19:39:11.9	-16:19: 7.70	4: 4:18.3	22:36:41.11

Pg 2	A		B		C		D	
Data	RA	DEC	RA	DEC	RA	DEC	RA	DEC
26/Fev	22:35:28.6	- 8:53: 2.27	15: 6:23.9	-16:12: 1.22	19:41:59.7	-16:19:21.98	4: 6:29.4	22:42:29.64
27/Fev	22:39:15.2	- 8:30:34.95	15: 6:28.8	-16:12:10.61	19:44:52.2	-16:19:16.27	4: 8:41.2	22:48:13.11
28/Fev	22:43: 1.2	- 8: 8: 0.09	15: 6:32.9	-16:12:16.92	19:47:49.2	-16:18:49.75	4:10:53.8	22:53:51.37
01/Mar	22:46:46.7	- 7:45:18.10	15: 6:36.3	-16:12:20.14	19:50:50.5	-16:18: 1.67	4:13: 7.0	22:59:24.26
02/Mar	22:50:31.7	- 7:22:29.40	15: 6:39.0	-16:12:20.28	19:53:55.9	-16:16:51.30	4:15:21.1	23: 4:51.65
03/Mar	22:54:16.2	- 6:59:34.41	15: 6:40.8	-16:12:17.35	19:57: 5.2	-16:15:17.97	4:17:35.8	23:10:13.39
04/Mar	22:58: 0.2	- 6:36:33.52	15: 6:42.0	-16:12:11.36	20: 0:18.2	-16:13:21.05	4:19:51.2	23:15:29.34
05/Mar	23: 1:43.7	- 6:13:27.15	15: 6:42.3	-16:12: 2.34	20: 3:34.8	-16:10:59.97	4:22: 7.2	23:20:39.38
06/Mar	23: 5:26.7	- 5:50:15.68	15: 6:42.0	-16:11:50.31	20: 6:54.7	-16: 8:14.19	4:24:24.0	23:25:43.37
07/Mar	23: 9: 9.3	- 5:26:59.54	15: 6:40.8	-16:11:35.27	20:10:17.9	-16: 5: 3.20	4:26:41.4	23:30:41.20
08/Mar	23:12:51.5	- 5: 3:39.14	15: 6:38.9	-16:11:17.24	20:13:44.2	-16: 1:26.57	4:28:59.3	23:35:32.71
09/Mar	23:16:33.3	- 4:40:14.86	15: 6:36.3	-16:10:56.21	20:17:13.3	-15:57:23.86	4:31:17.9	23:40:17.79
10/Mar	23:20:14.8	- 4:16:47.11	15: 6:32.9	-16:10:32.19	20:20:45.3	-15:52:54.69	4:33:37.1	23:44:56.29
11/Mar	23:23:55.8	- 3:53:16.25	15: 6:28.7	-16:10: 5.19	20:24:19.9	-15:47:58.69	4:35:56.9	23:49:28.10
12/Mar	23:27:36.5	- 3:29:42.63	15: 6:23.8	-16: 9:35.21	20:27:57.1	-15:42:35.55	4:38:17.2	23:53:53.09
13/Mar	23:31:16.9	- 3: 6: 6.62	15: 6:18.2	-16: 9: 2.28	20:31:36.6	-15:36:44.96	4:40:38.0	23:58:11.13
14/Mar	23:34:57.1	- 2:42:28.56	15: 6:11.8	-16: 8:26.38	20:35:18.4	-15:30:26.68	4:42:59.4	24: 2:22.10
15/Mar	23:38:36.9	- 2:18:48.80	15: 6: 4.7	-16: 7:47.53	20:39: 2.4	-15:23:40.49	4:45:21.3	24: 6:25.90
16/Mar	23:42:16.5	- 1:55: 7.70	15: 5:56.8	-16: 7: 5.74	20:42:48.4	-15:16:26.24	4:47:43.7	24:10:22.41
17/Mar	23:45:55.9	- 1:31:25.57	15: 5:48.2	-16: 6:21.03	20:46:36.3	-15: 8:43.79	4:50: 6.7	24:14:11.53
18/Mar	23:49:35.1	- 1: 7:42.77	15: 5:38.9	-16: 5:33.44	20:50:26.1	-15: 0:33.05	4:52:30.1	24:17:53.18
19/Mar	23:53:14.1	- 0:43:59.62	15: 5:28.9	-16: 4:42.98	20:54:17.6	-14:51:53.99	4:54:54.0	24:21:27.28
20/Mar	23:56:53.0	- 0:20:16.49	15: 5:18.1	-16: 3:49.68	20:58:10.7	-14:42:46.60	4:57:18.3	24:24:53.74
21/Mar	0: 0:31.8	0: 3:26.27	15: 5: 6.6	-16: 2:53.55	21: 2: 5.4	-14:33:10.95	4:59:43.1	24:28:12.46
22/Mar	0: 4:10.4	0:27: 8.27	15: 4:54.4	-16: 1:54.60	21: 6: 1.4	-14:23: 7.12	5: 2: 8.4	24:31:23.38
23/Mar	0: 7:49.0	0:50:49.17	15: 4:41.5	-16: 0:52.86	21: 9:58.8	-14:12:35.23	5: 4:34.2	24:34:26.41
24/Mar	0:11:27.5	1:14:28.60	15: 4:27.9	-15:59:48.35	21:13:57.4	-14: 1:35.42	5: 7: 0.3	24:37:21.46
25/Mar	0:15: 6.0	1:38: 6.19	15: 4:13.7	-15:58:41.10	21:17:57.2	-13:50: 7.86	5: 9:26.9	24:40: 8.45
26/Mar	0:18:44.4	2: 1:41.59	15: 3:58.7	-15:57:31.12	21:21:58.0	-13:38:12.75	5:11:53.9	24:42:47.28
27/Mar	0:22:22.9	2:25:14.40	15: 3:43.0	-15:56:18.45	21:25:59.8	-13:25:50.33	5:14:21.3	24:45:17.87
28/Mar	0:26: 1.3	2:48:44.26	15: 3:26.7	-15:55: 3.09	21:30: 2.5	-13:13: 0.84	5:16:49.1	24:47:40.13
29/Mar	0:29:39.8	3:12:10.78	15: 3: 9.7	-15:53:45.10	21:34: 6.0	-12:59:44.58	5:19:17.3	24:49:53.98
30/Mar	0:33:18.3	3:35:33.59	15: 2:52.1	-15:52:24.51	21:38:10.3	-12:46: 1.82	5:21:45.9	24:51:59.34
31/Mar	0:36:56.8	3:58:52.34	15: 2:33.9	-15:51: 1.38	21:42:15.3	-12:31:52.90	5:24:14.8	24:53:56.16
01/Abr	0:40:35.5	4:22: 6.66	15: 2:15.0	-15:49:35.77	21:46:21.0	-12:17:18.13	5:26:44.1	24:55:44.35
02/Abr	0:44:14.2	4:45:16.17	15: 1:55.5	-15:48: 7.72	21:50:27.2	-12: 2:17.88	5:29:13.7	24:57:23.87
03/Abr	0:47:53.1	5: 8:20.50	15: 1:35.5	-15:46:37.30	21:54:34.0	-11:46:52.52	5:31:43.7	24:58:54.66
04/Abr	0:51:32.1	5:31:19.28	15: 1:14.8	-15:45: 4.54	21:58:41.3	-11:31: 2.44	5:34:14.0	25: 0:16.65
05/Abr	0:55:11.2	5:54:12.16	15: 0:53.6	-15:43:29.50	22: 2:49.0	-11:14:48.03	5:36:44.5	25: 1:29.81
06/Abr	0:58:50.5	6:16:58.79	15: 0:31.9	-15:41:52.25	22: 6:57.2	-10:58: 9.69	5:39:15.3	25: 2:34.07
07/Abr	1: 2:29.9	6:39:38.81	15: 0: 9.6	-15:40:12.83	22:11: 5.7	-10:41: 7.81	5:41:46.5	25: 3:29.37
08/Abr	1: 6: 9.5	7: 2:11.90	14:59:46.7	-15:38:31.29	22:15:14.6	-10:23:42.82	5:44:17.8	25: 4:15.66
09/Abr	1: 9:49.4	7:24:37.71	14:59:23.4	-15:36:47.68	22:19:23.8	-10: 5:55.15	5:46:49.4	25: 4:52.88
10/Abr	1:13:29.5	7:46:55.89	14:58:59.6	-15:35: 2.04	22:23:33.3	- 9:47:45.24	5:49:21.2	25: 5:20.96
11/Abr	1:17: 9.8	8: 9: 6.13	14:58:35.2	-15:33:14.42	22:27:43.0	- 9:29:13.55	5:51:53.3	25: 5:39.88
12/Abr	1:20:50.4	8:31: 8.10	14:58:10.5	-15:31:24.89	22:31:53.0	- 9:10:20.53	5:54:25.5	25: 5:49.56
13/Abr	1:24:31.3	8:53: 1.51	14:57:45.2	-15:29:33.52	22:36: 3.2	- 8:51: 6.64	5:56:58.0	25: 5:49.99
14/Abr	1:28:12.5	9:14:46.05	14:57:19.6	-15:27:40.37	22:40:13.7	- 8:31:32.38	5:59:30.6	25: 5:41.13
15/Abr	1:31:54.1	9:36:21.40	14:56:53.5	-15:25:45.52	22:44:24.4	- 8:11:38.25	6: 2: 3.4	25: 5:22.95
16/Abr	1:35:36.0	9:57:47.25	14:56:27.1	-15:23:49.03	22:48:35.2	- 7:51:24.79	6: 4:36.4	25: 4:55.44
17/Abr	1:39:18.3	10:19: 3.29	14:56: 0.2	-15:21:50.98	22:52:46.2	- 7:30:52.53	6: 7: 9.6	25: 4:18.56
18/Abr	1:43: 0.9	10:40: 9.20	14:55:33.0	-15:19:51.44	22:56:57.4	- 7:10: 2.04	6: 9:42.9	25: 3:32.31
19/Abr	1:46:44.0	11: 1: 4.66	14:55: 5.5	-15:17:50.49	23: 1: 8.7	- 6:48:53.87	6:12:16.4	25: 2:36.67
20/Abr	1:50:27.5	11:21:49.34	14:54:37.6	-15:15:48.19	23: 5:20.2	- 6:27:28.59	6:14:50.0	25: 1:31.60
21/Abr	1:54:11.4	11:42:22.92	14:54: 9.4	-15:13:44.62	23: 9:31.8	- 6: 5:46.82	6:17:23.7	25: 0:17.09
22/Abr	1:57:55.8	12: 2:45.03	14:53:40.9	-15:11:39.84	23:13:43.5	- 5:43:49.15	6:19:57.6	24:58:53.10

Pg 3	A		B		C		D	
Data	RA	DEC	RA	DEC	RA	DEC	RA	DEC
23/Abr	2: 1:40.6	12:22:55.33	14:53:12.2	-15: 9:33.91	23:17:55.4	- 5:21:36.20	6:22:31.6	24:57:19.62
24/Abr	2: 5:25.9	12:42:53.46	14:52:43.2	-15: 7:26.91	23:22: 7.3	- 4:59: 8.60	6:25: 5.7	24:55:36.61
25/Abr	2: 9:11.7	13: 2:39.10	14:52:14.0	-15: 5:18.93	23:26:19.4	- 4:36:26.96	6:27:39.8	24:53:44.07
26/Abr	2:12:58.0	13:22:11.90	14:51:44.5	-15: 3:10.07	23:30:31.6	- 4:13:31.89	6:30:14.1	24:51:41.96
27/Abr	2:16:44.7	13:41:31.52	14:51:14.9	-15: 1: 0.42	23:34:43.9	- 3:50:24.01	6:32:48.5	24:49:30.30
28/Abr	2:20:32.0	14: 0:37.64	14:50:45.1	-14:58:50.08	23:38:56.3	- 3:27: 3.96	6:35:22.9	24:47: 9.06
29/Abr	2:24:19.8	14:19:29.90	14:50:15.2	-14:56:39.17	23:43: 8.9	- 3: 3:32.35	6:37:57.4	24:44:38.27
30/Abr	2:28: 8.1	14:38: 7.98	14:49:45.1	-14:54:27.77	23:47:21.6	- 2:39:49.83	6:40:32.0	24:41:57.92
01/Mai	2:31:56.9	14:56:31.54	14:49:15.0	-14:52:16.00	23:51:34.4	- 2:15:57.02	6:43: 6.6	24:39: 8.04
02/Mai	2:35:46.3	15:14:40.25	14:48:44.8	-14:50: 3.96	23:55:47.4	- 1:51:54.55	6:45:41.3	24:36: 8.63
03/Mai	2:39:36.2	15:32:33.79	14:48:14.5	-14:47:51.74	0: 0: 0.6	- 1:27:43.04	6:48:15.9	24:32:59.70
04/Mai	2:43:26.6	15:50:11.83	14:47:44.2	-14:45:39.44	0: 4:14.0	- 1: 3:23.12	6:50:50.6	24:29:41.27
05/Mai	2:47:17.5	16: 7:34.02	14:47:13.9	-14:43:27.12	0: 8:27.5	- 0:38:55.43	6:53:25.3	24:26:13.34
06/Mai	2:51: 9.0	16:24:40.06	14:46:43.6	-14:41:14.88	0:12:41.3	- 0:14:20.59	6:55:60.0	24:22:35.92
07/Mai	2:55: 1.0	16:41:29.62	14:46:13.3	-14:39: 2.80	0:16:55.3	0:10:20.76	6:58:34.6	24:18:49.03
08/Mai	2:58:53.6	16:58: 2.41	14:45:43.1	-14:36:50.97	0:21: 9.5	0:35: 8.03	7: 1: 9.2	24:14:52.68
09/Mai	3: 2:46.7	17:14:18.13	14:45:12.9	-14:34:39.48	0:25:24.0	1: 0: 0.59	7: 3:43.8	24:10:46.86
10/Mai	3: 6:40.3	17:30:16.51	14:44:42.9	-14:32:28.44	0:29:38.9	1:24:57.85	7: 6:18.3	24: 6:31.61
11/Mai	3:10:34.6	17:45:57.29	14:44:12.9	-14:30:17.94	0:33:54.0	1:49:59.20	7: 8:52.8	24: 2: 6.94
12/Mai	3:14:29.3	18: 1:20.18	14:43:43.1	-14:28: 8.10	0:38: 9.5	2:15: 4.01	7:11:27.2	23:57:32.89
13/Mai	3:18:24.7	18:16:24.92	14:43:13.5	-14:25:58.99	0:42:25.4	2:40:11.65	7:14: 1.5	23:52:49.47
14/Mai	3:22:20.7	18:31:11.25	14:42:44.0	-14:23:50.73	0:46:41.7	3: 5:21.50	7:16:35.8	23:47:56.74
15/Mai	3:26:17.2	18:45:38.91	14:42:14.7	-14:21:43.41	0:50:58.5	3:30:32.90	7:19:10.0	23:42:54.71
16/Mai	3:30:14.3	18:59:47.68	14:41:45.6	-14:19:37.10	0:55:15.6	3:55:45.27	7:21:44.1	23:37:43.41
17/Mai	3:34:12.0	19:13:37.19	14:41:16.7	-14:17:31.91	0:59:33.3	4:20:57.83	7:24:18.1	23:32:22.91
18/Mai	3:38:10.2	19:27: 7.21	14:40:48.1	-14:15:27.91	1: 3:51.5	4:46: 9.96	7:26:52.1	23:26:53.20
19/Mai	3:42: 9.1	19:40:17.48	14:40:19.8	-14:13:25.16	1: 8:10.1	5:11:20.97	7:29:25.9	23:21:14.33
20/Mai	3:46: 8.4	19:53: 7.71	14:39:51.7	-14:11:23.75	1:12:29.4	5:36:30.19	7:31:59.6	23:15:26.33
21/Mai	3:50: 8.4	20: 5:37.63	14:39:23.9	-14: 9:23.77	1:16:49.1	6: 1:36.92	7:34:33.3	23: 9:29.20
22/Mai	3:54: 8.9	20:17:47.00	14:38:56.5	-14: 7:25.30	1:21: 9.5	6:26:40.50	7:37: 6.8	23: 3:22.99
23/Mai	3:58: 9.9	20:29:35.56	14:38:29.3	-14: 5:28.44	1:25:30.5	6:51:40.25	7:39:40.2	22:57: 7.71
24/Mai	4: 2:11.5	20:41: 3.06	14:38: 2.6	-14: 3:33.30	1:29:52.1	7:16:35.48	7:42:13.5	22:50:43.40
25/Mai	4: 6:13.6	20:52: 9.26	14:37:36.2	-14: 1:39.97	1:34:14.4	7:41:25.51	7:44:46.7	22:44:10.10
26/Mai	4:10:16.3	21: 2:53.92	14:37:10.2	-14:13:48.55	1:38:37.4	8: 6: 9.65	7:47:19.7	22:37:27.87
27/Mai	4:14:19.4	21:13:16.81	14:36:44.6	-13:57:59.13	1:43: 1.1	8:30:47.22	7:49:52.7	22:30:36.75
28/Mai	4:18:23.0	21:23:17.72	14:36:19.5	-13:56:11.80	1:47:25.5	8:55:17.52	7:52:25.5	22:23:36.81
29/Mai	4:22:27.1	21:32:56.42	14:35:54.8	-13:54:26.65	1:51:50.7	9:19:39.87	7:54:58.1	22:16:28.11
30/Mai	4:26:31.6	21:42:12.70	14:35:30.5	-13:52:43.75	1:56:16.6	9:43:53.55	7:57:30.7	22: 9:10.70
31/Mai	4:30:36.6	21:51: 6.35	14:35: 6.7	-13:51: 3.15	2: 0:43.4	10: 7:57.88	8: 0: 3.0	22: 1:44.65
01/Jun	4:34:41.9	21:59:37.17	14:34:43.5	-13:49:24.94	2: 5:10.9	10:31:52.16	8: 2:35.2	21:54:10.03
02/Jun	4:38:47.6	22: 7:44.97	14:34:20.7	-13:47:49.16	2: 9:39.3	10:55:35.69	8: 5: 7.2	21:46:26.89
03/Jun	4:42:53.7	22:15:29.55	14:33:58.4	-13:46:15.87	2:14: 8.5	11:19: 7.80	8: 7:39.1	21:38:35.28
04/Jun	4:47: 0.2	22:22:50.76	14:33:36.6	-13:44:45.14	2:18:38.6	11:42:27.79	8:10:10.8	21:30:35.25
05/Jun	4:51: 7.0	22:29:48.44	14:33:15.4	-13:43:17.04	2:23: 9.7	12: 5:35.01	8:12:42.2	21:22:26.85
06/Jun	4:55:14.0	22:36:22.44	14:32:54.7	-13:41:51.64	2:27:41.6	12:28:28.78	8:15:13.5	21:14:10.14
07/Jun	4:59:21.4	22:42:32.63	14:32:34.6	-13:40:28.98	2:32:14.6	12:51: 8.42	8:17:44.6	21: 5:45.17
08/Jun	5: 3:29.1	22:48:18.90	14:32:15.1	-13:39: 9.13	2:36:48.5	13:13:33.27	8:20:15.6	20:57:12.01
09/Jun	5: 7:37.1	22:53:41.13	14:31:56.1	-13:37:52.16	2:41:23.4	13:35:42.64	8:22:46.3	20:48:30.72
10/Jun	5:11:45.2	22:58:39.22	14:31:37.7	-13:36:38.10	2:45:59.3	13:57:35.87	8:25:16.8	20:39:41.38
11/Jun	5:15:53.7	23: 3:13.08	14:31:20.0	-13:35:27.01	2:50:36.2	14:19:12.27	8:27:47.2	20:30:44.02
12/Jun	5:20: 2.3	23: 7:22.63	14:31: 2.8	-13:34:18.92	2:55:14.3	14:40:31.16	8:30:17.3	20:21:38.78
13/Jun	5:24:11.1	23:11: 7.78	14:30:46.3	-13:33:13.88	2:59:53.4	15: 1:31.83	8:32:47.3	20:12:25.68
14/Jun	5:28:20.1	23:14:28.45	14:30:30.4	-13:32:11.91	3: 4:33.5	15:22:13.59	8:35:17.0	20: 3: 4.79
15/Jun	5:32:29.3	23:17:24.56	14:30:15.0	-13:31:13.04	3: 9:14.8	15:42:35.73	8:37:46.5	19:53:36.18
16/Jun	5:36:38.6	23:19:56.05	14:30: 0.4	-13:30:17.30	3:13:57.2	16: 2:37.57	8:40:15.9	19:43:59.88
17/Jun	5:40:48.0	23:22: 2.86	14:29:46.3	-13:29:24.73	3:18:40.7	16:22:18.40	8:42:45.0	19:34:15.96

Pg 4	A		B		C		D	
Data	RA	DEC	RA	DEC	RA	DEC	RA	DEC
18/Jun	5:44:57.5	23:23:44.92	14:29:33.0	-13:28:35.36	3:23:25.4	16:41:37.51	8:45:14.0	19:24:24.46
19/Jun	5:49: 7.1	23:25: 2.20	14:29:20.2	-13:27:49.24	3:28:11.1	17: 0:34.23	8:47:42.7	19:14:25.43
20/Jun	5:53:16.7	23:25:54.68	14:29: 8.2	-13:27: 6.39	3:32:58.0	17:19: 7.86	8:50:11.3	19: 4:18.92
21/Jun	5:57:26.4	23:26:22.32	14:28:56.8	-13:26:26.87	3:37:46.1	17:37:17.71	8:52:39.6	18:54: 5.01
22/Jun	6: 1:36.0	23:26:25.14	14:28:46.0	-13:25:50.70	3:42:35.3	17:55: 3.11	8:55: 7.8	18:43:43.75
23/Jun	6: 5:45.7	23:26: 3.15	14:28:36.0	-13:25:17.91	3:47:25.6	18:12:23.38	8:57:35.8	18:33:15.24
24/Jun	6: 9:55.3	23:25:16.36	14:28:26.7	-13:24:48.54	3:52:17.0	18:29:17.85	9: 0: 3.6	18:22:39.54
25/Jun	6:14: 4.8	23:24: 4.81	14:28:18.0	-13:24:22.61	3:57: 9.6	18:45:45.87	9: 2:31.2	18:11:56.75
26/Jun	6:18:14.2	23:22:28.55	14:28:10.0	-13:24: 0.13	4: 2: 3.3	19: 1:46.78	9: 4:58.6	18: 1: 6.97
27/Jun	6:22:23.5	23:20:27.62	14:28: 2.8	-13:23:41.12	4: 6:58.1	19:17:19.94	9: 7:25.8	17:50:10.20
28/Jun	6:26:32.6	23:18: 2.09	14:27:56.2	-13:23:25.59	4:11:53.9	19:32:24.70	9: 9:52.8	17:39: 6.62
29/Jun	6:30:41.5	23:15:12.01	14:27:50.3	-13:23:13.53	4:16:50.9	19:47: 0.44	9:12:19.6	17:27:56.26
30/Jun	6:34:50.2	23:11:57.46	14:27:45.2	-13:23: 4.94	4:21:48.9	20: 1: 6.53	9:14:46.2	17:16:39.21
01/Jul	6:38:58.6	23: 8:18.52	14:27:40.7	-13:22:59.84	4:26:47.9	20:14:42.38	9:17:12.6	17: 5:15.54
02/Jul	6:43: 6.8	23: 4:15.29	14:27:36.9	-13:22:58.22	4:31:48.0	20:27:47.39	9:19:38.8	16:53:45.33
03/Jul	6:47:14.7	22:59:47.87	14:27:33.9	-13:23: 0.07	4:36:49.0	20:40:21.00	9:22: 4.7	16:42: 8.64
04/Jul	6:51:22.3	22:54:56.38	14:27:31.6	-13:23: 5.41	4:41:51.1	20:52:22.64	9:24:30.5	16:30:25.56
05/Jul	6:55:29.6	22:49:40.95	14:27:29.9	-13:23:14.22	4:46:54.1	21: 3:51.79	9:26:56.1	16:18:36.16
06/Jul	6:59:36.5	22:44: 1.72	14:27:29.0	-13:23:26.51	4:51:58.0	21:14:47.93	9:29:21.5	16: 6:40.53
07/Jul	7: 3:43.0	22:37:58.84	14:27:28.8	-13:23:42.27	4:57: 2.9	21:25:10.54	9:31:46.7	15:54:38.76
08/Jul	7: 7:49.2	22:31:32.48	14:27:29.3	-13:24: 1.50	5: 2: 8.6	21:34:59.15	9:34:11.7	15:42:30.93
09/Jul	7:11:55.0	22:24:42.78	14:27:30.5	-13:24:24.17	5: 7:15.2	21:44:13.29	9:36:36.5	15:30:17.11
10/Jul	7:16: 0.3	22:17:29.93	14:27:32.4	-13:24:50.29	5:12:22.7	21:52:52.50	9:39: 1.1	15:17:57.39
11/Jul	7:20: 5.2	22: 9:54.07	14:27:34.9	-13:25:19.82	5:17:30.9	22: 0:56.33	9:41:25.6	15: 5:31.84
12/Jul	7:24: 9.7	22: 1:55.38	14:27:38.2	-13:25:52.75	5:22:39.8	22: 8:24.35	9:43:49.8	14:53: 0.49
13/Jul	7:28:13.8	21:53:34.03	14:27:42.2	-13:26:29.05	5:27:49.5	22:15:16.15	9:46:13.9	14:40:23.48
14/Jul	7:32:17.3	21:44:50.19	14:27:46.9	-13:27: 8.69	5:32:59.9	22:21:31.34	9:48:37.8	14:27:40.85
15/Jul	7:36:20.4	21:35:44.05	14:27:52.2	-13:27:51.67	5:38:10.9	22:27: 9.54	9:51: 1.5	14:14:52.66
16/Jul	7:40:23.1	21:26:15.79	14:27:58.2	-13:28:37.96	5:43:22.5	22:32:10.41	9:53:25.1	14: 1:58.96
17/Jul	7:44:25.2	21:16:25.60	14:28: 5.0	-13:29:27.54	5:48:34.7	22:36:33.63	9:55:48.5	13:48:59.83
18/Jul	7:48:26.8	21: 6:13.71	14:28:12.4	-13:30:20.41	5:53:47.3	22:40:18.90	9:58:11.7	13:35:55.32
19/Jul	7:52:27.9	20:55:40.32	14:28:20.5	-13:31:16.55	5:59: 0.5	22:43:25.97	10: 0:34.8	13:22:45.52
20/Jul	7:56:28.5	20:44:45.68	14:28:29.3	-13:32:15.95	6: 4:14.0	22:45:54.59	10: 2:57.7	13: 9:30.50
21/Jul	8: 0:28.6	20:33:30.02	14:28:38.7	-13:33:18.60	6: 9:27.9	22:47:44.57	10: 5:20.5	12:56:10.35
22/Jul	8: 4:28.1	20:21:53.60	14:28:48.9	-13:34:24.48	6:14:42.1	22:48:55.73	10: 7:43.2	12:42:45.13
23/Jul	8: 8:27.0	20: 9:56.67	14:28:59.7	-13:35:33.58	6:19:56.6	22:49:27.91	10:10: 5.7	12:29:14.93
24/Jul	8:12:25.4	19:57:39.50	14:29:11.2	-13:36:45.87	6:25:11.2	22:49:21.00	10:12:28.1	12:15:39.85
25/Jul	8:16:23.2	19:45: 2.34	14:29:23.3	-13:38: 1.32	6:30:26.0	22:48:34.88	10:14:50.4	12: 1:59.98
26/Jul	8:20:20.5	19:32: 5.49	14:29:36.1	-13:39:19.87	6:35:40.9	22:47: 9.49	10:17:12.5	11:48:15.40
27/Jul	8:24:17.1	19:18:49.20	14:29:49.6	-13:40:41.49	6:40:55.8	22:45: 4.77	10:19:34.5	11:34:26.21
28/Jul	8:28:13.1	19: 5:13.77	14:30: 3.7	-13:42: 6.15	6:46:10.8	22:42:20.71	10:21:56.4	11:20:32.50
29/Jul	8:32: 8.5	18:51:19.47	14:30:18.5	-13:43:33.80	6:51:25.6	22:38:57.32	10:24:18.2	11: 6:34.35
30/Jul	8:36: 3.3	18:37: 6.58	14:30:33.9	-13:45: 4.41	6:56:40.3	22:34:54.62	10:26:39.8	10:52:31.84
31/Jul	8:39:57.4	18:22:35.40	14:30:50.0	-13:46:37.95	7: 1:54.8	22:30:12.69	10:29: 1.3	10:38:25.06
01/Ago	8:43:51.0	18: 7:46.22	14:31: 6.7	-13:48:14.38	7: 7: 9.2	22:24:51.64	10:31:22.7	10:24:14.09
02/Ago	8:47:43.9	17:52:39.34	14:31:24.1	-13:49:53.68	7:12:23.2	22:18:51.60	10:33:44.0	10: 9:59.02
03/Ago	8:51:36.1	17:37:15.05	14:31:42.0	-13:51:35.82	7:17:36.9	22:12:12.71	10:36: 5.2	9:55:39.93
04/Ago	8:55:27.8	17:21:33.65	14:32: 0.6	-13:53:20.75	7:22:50.3	22: 4:55.17	10:38:26.3	9:41:16.91
05/Ago	8:59:18.8	17: 5:35.44	14:32:19.8	-13:55: 8.47	7:28: 3.3	21:56:59.18	10:40:47.3	9:26:50.03
06/Ago	9: 3: 9.2	16:49:20.71	14:32:39.6	-13:56:58.91	7:33:15.8	21:48:24.97	10:43: 8.3	9:12:19.39
07/Ago	9: 6:59.1	16:32:49.76	14:33: 0.0	-13:58:52.04	7:38:27.9	21:39:12.80	10:45:29.1	8:57:45.07
08/Ago	9:10:48.3	16:16: 2.90	14:33:21.1	-14: 0:47.80	7:43:39.4	21:29:22.94	10:47:49.8	8:43: 7.16
09/Ago	9:14:36.9	15:59: 0.40	14:33:42.7	-14: 2:46.13	7:48:50.3	21:18:55.69	10:50:10.5	8:28:25.75
10/Ago	9:18:24.9	15:41:42.55	14:34: 4.9	-14: 4:47.00	7:54: 0.6	21: 7:51.36	10:52:31.1	8:13:40.91
11/Ago	9:22:12.4	15:24: 9.63	14:34:27.6	-14: 6:50.34	7:59:10.3	20:56:10.28	10:54:51.6	7:58:52.71
12/Ago	9:25:59.3	15: 6:21.93	14:34:51.0	-14: 8:56.15	8: 4:19.4	20:43:52.80	10:57:12.1	7:44: 1.21

Pg 5	A		B		C		D	
Data	RA	DEC	RA	DEC	RA	DEC	RA	DEC
13/Ago	9:29:45.6	14:48:19.71	14:35:14.9	-14:11: 4.36	8: 9:27.7	20:30:59.31	10:59:32.6	7:29: 6.48
14/Ago	9:33:31.4	14:30: 3.27	14:35:39.4	-14:13:14.96	8:14:35.3	20:17:30.21	11: 1:52.9	7:14: 8.59
15/Ago	9:37:16.6	14:11:32.90	14:36: 4.4	-14:15:27.92	8:19:42.1	20: 3:25.93	11: 4:13.3	6:59: 7.60
16/Ago	9:41: 1.4	13:52:48.91	14:36:30.0	-14:17:43.20	8:24:48.2	19:48:46.92	11: 6:33.6	6:44: 3.59
17/Ago	9:44:45.6	13:33:51.59	14:36:56.2	-14:20: 0.79	8:29:53.5	19:33:33.65	11: 8:54.0	6:28:56.63
18/Ago	9:48:29.4	13:14:41.25	14:37:22.9	-14:22:20.67	8:34:57.9	19:17:46.61	11:11:14.3	6:13:46.78
19/Ago	9:52:12.6	12:55:18.22	14:37:50.2	-14:24:42.79	8:40: 1.5	19: 1:26.32	11:13:34.6	5:58:34.15
20/Ago	9:55:55.4	12:35:42.82	14:38:18.1	-14:27: 7.11	8:45: 4.2	18:44:33.33	11:15:54.9	5:43:18.83
21/Ago	9:59:37.8	12:15:55.41	14:38:46.4	-14:29:33.57	8:50: 6.0	18:27: 8.18	11:18:15.2	5:28: 0.92
22/Ago	10: 3:19.6	11:55:56.32	14:39:15.3	-14:32: 2.13	8:55: 6.9	18: 9:11.44	11:20:35.5	5:12:40.54
23/Ago	10: 7: 1.0	11:35:45.88	14:39:44.7	-14:34:32.72	9: 0: 6.9	17:50:43.69	11:22:55.8	4:57:17.76
24/Ago	10:10:42.0	11:15:24.42	14:40:14.6	-14:37: 5.31	9: 5: 6.0	17:31:45.51	11:25:16.2	4:41:52.69
25/Ago	10:14:22.5	10:54:52.21	14:40:45.1	-14:39:39.85	9:10: 4.1	17:12:17.46	11:27:36.5	4:26:25.38
26/Ago	10:18: 2.6	10:34: 9.71	14:41:16.0	-14:42:16.30	9:15: 1.3	16:52:20.20	11:29:56.9	4:10:55.97
27/Ago	10:21:42.3	10:13:17.19	14:41:47.5	-14:44:54.61	9:19:57.5	16:31:54.34	11:32:17.3	3:55:24.54
28/Ago	10:25:21.6	9:52:15.00	14:42:19.4	-14:47:34.75	9:24:52.7	16:11: 0.50	11:34:37.7	3:39:51.16
29/Ago	10:29: 0.6	9:31: 3.46	14:42:51.9	-14:50:16.68	9:29:47.0	15:49:39.31	11:36:58.2	3:24:15.94
30/Ago	10:32:39.1	9: 9:42.90	14:43:24.8	-14:53: 0.38	9:34:40.4	15:27:51.43	11:39:18.8	3: 8:38.94
31/Ago	10:36:17.3	8:48:13.65	14:43:58.2	-14:55:45.79	9:39:32.8	15: 5:37.51	11:41:39.4	2:53: 0.27
01/Set	10:39:55.2	8:26:36.04	14:44:32.1	-14:58:32.90	9:44:24.3	14:42:58.20	11:44: 0.0	2:37:20.02
02/Set	10:43:32.7	8: 4:50.42	14:45: 6.5	-15: 1:21.63	9:49:14.8	14:19:54.20	11:46:20.7	2:21:38.30
03/Set	10:47:10.0	7:42:57.13	14:45:41.4	-15: 4:11.94	9:54: 4.5	13:56:26.18	11:48:41.5	2: 5:55.21
04/Set	10:50:46.9	7:20:56.48	14:46:16.6	-15: 7: 3.76	9:58:53.2	13:32:34.83	11:51: 2.4	1:50:10.86
05/Set	10:54:23.6	6:58:48.79	14:46:52.4	-15: 9:57.05	10: 3:41.0	13: 8:20.81	11:53:23.3	1:34:25.34
06/Set	10:58: 0.0	6:36:34.37	14:47:28.5	-15:12:51.76	10: 8:27.9	12:43:44.81	11:55:44.3	1:18:38.73
07/Set	11: 1:36.2	6:14:13.51	14:48: 5.1	-15:15:47.85	10:13:14.0	12:18:47.48	11:58: 5.4	1: 2:51.10
08/Set	11: 5:12.2	5:51:46.50	14:48:42.2	-15:18:45.28	10:17:59.3	11:53:29.50	12: 0:26.7	0:47: 2.54
09/Set	11: 8:48.0	5:29:13.64	14:49:19.6	-15:21:44.00	10:22:43.8	11:27:51.55	12: 2:48.0	0:31:13.11
10/Set	11:12:23.7	5: 6:35.22	14:49:57.5	-15:24:43.98	10:27:27.4	11: 1:54.32	12: 5: 9.4	0:15:22.90
11/Set	11:15:59.2	4:43:51.55	14:50:35.8	-15:27:45.19	10:32:10.4	10:35:38.49	12: 7:31.0	- 0: 0:28.01
12/Set	11:19:34.6	4:21: 2.91	14:51:14.6	-15:30:47.62	10:36:52.5	10: 9: 4.75	12: 9:52.7	- 0:16:19.57
13/Set	11:23: 9.9	3:58: 9.62	14:51:53.7	-15:33:51.22	10:41:34.0	9:42:13.80	12:12:14.6	- 0:32:11.68
14/Set	11:26:45.2	3:35:11.98	14:52:33.3	-15:36:55.98	10:46:14.9	9:15: 6.35	12:14:36.6	- 0:48: 4.27
15/Set	11:30:20.4	3:12:10.34	14:53:13.2	-15:40: 1.84	10:50:55.0	8:47:43.13	12:16:58.8	- 1: 3:57.22
16/Set	11:33:55.6	2:49: 5.04	14:53:53.6	-15:43: 8.76	10:55:34.6	8:20: 4.87	12:19:21.2	- 1:19:50.43
17/Set	11:37:30.7	2:25:56.42	14:54:34.3	-15:46:16.70	11: 0:13.5	7:52:12.31	12:21:43.7	- 1:35:43.79
18/Set	11:41: 5.9	2: 2:44.82	14:55:15.5	-15:49:25.61	11: 4:51.9	7:24: 6.16	12:24: 6.4	- 1:51:37.20
19/Set	11:44:41.1	1:39:30.59	14:55:57.0	-15:52:35.44	11: 9:29.8	6:55:47.16	12:26:29.3	- 2: 7:30.56
20/Set	11:48:16.3	1:16:14.06	14:56:38.9	-15:55:46.17	11:14: 7.2	6:27:16.02	12:28:52.4	- 2:23:23.77
21/Set	11:51:51.6	0:52:55.59	14:57:21.1	-15:58:57.73	11:18:44.1	5:58:33.48	12:31:15.6	- 2:39:16.72
22/Set	11:55:27.0	0:29:35.53	14:58: 3.7	-16: 2:10.10	11:23:20.5	5:29:40.26	12:33:39.1	- 2:55: 9.32
23/Set	11:59: 2.5	0: 6:14.25	14:58:46.7	-16: 5:23.21	11:27:56.6	5: 0:37.11	12:36: 2.8	- 3:11: 1.45
24/Set	12: 2:38.1	- 0:17: 7.89	14:59:30.1	-16: 8:37.05	11:32:32.3	4:31:24.76	12:38:26.7	- 3:26:53.00
25/Set	12: 6:13.8	- 0:40:30.55	15: 0:13.8	-16:11:51.57	11:37: 7.7	4: 2: 3.94	12:40:50.9	- 3:42:43.89
26/Set	12: 9:49.7	- 1: 3:53.36	15: 0:57.8	-16:15: 6.75	11:41:42.8	3:32:35.36	12:43:15.2	- 3:58:34.01
27/Set	12:13:25.7	- 1:27:15.97	15: 1:42.2	-16:18:22.56	11:46:17.6	3: 2:59.79	12:45:39.8	- 4:14:23.24
28/Set	12:17: 2.0	- 1:50:38.01	15: 2:26.9	-16:21:38.94	11:50:52.2	2:33:17.95	12:48: 4.7	- 4:30:11.47
29/Set	12:20:38.4	- 2:13:59.08	15: 3:12.0	-16:24:55.86	11:55:26.7	2: 3:30.61	12:50:29.7	- 4:45:58.57
30/Set	12:24:15.0	- 2:37:18.84	15: 3:57.3	-16:28:13.26	12: 0: 1.0	1:33:38.51	12:52:55.1	- 5: 1:44.42
01/Out	12:27:51.9	- 3: 0:36.93	15: 4:43.0	-16:31:31.12	12: 4:35.2	1: 3:42.38	12:55:20.6	- 5:17:28.93
02/Out	12:31:29.1	- 3:23:53.01	15: 5:29.0	-16:34:49.37	12: 9: 9.3	0:33:42.94	12:57:46.5	- 5:33:11.97
03/Out	12:35: 6.5	- 3:47: 6.72	15: 6:15.3	-16:38: 8.00	12:13:43.4	0: 3:40.92	13: 0:12.6	- 5:48:53.46
04/Out	12:38:44.2	- 4:10:17.73	15: 7: 1.9	-16:41:26.94	12:18:17.5	- 0:26:22.94	13: 2:39.0	- 6: 4:33.27
05/Out	12:42:22.3	- 4:33:25.70	15: 7:48.7	-16:44:46.16	12:22:51.7	- 0:56:27.92	13: 5: 5.6	- 6:20:11.31
06/Out	12:46: 0.7	- 4:56:30.28	15: 8:35.9	-16:48: 5.61	12:27:26.0	- 1:26:33.29	13: 7:32.6	- 6:35:47.47
07/Out	12:49:39.5	- 5:19:31.14	15: 9:23.4	-16:51:25.26	12:32: 0.5	- 1:56:38.33	13: 9:59.9	- 6:51:21.65

Pg 6	A		B		C		D	
Data	RA	DEC	RA	DEC	RA	DEC	RA	DEC
08/Out	12:53:18.7	- 5:42:27.95	15:10:11.1	-16:54:45.09	12:36:35.1	- 2:26:42.30	13:12:27.4	- 7: 6:53.76
09/Out	12:56:58.3	- 6: 5:20.38	15:10:59.1	-16:58: 5.08	12:41:10.0	- 2:56:44.50	13:14:55.3	- 7:22:23.71
10/Out	13: 0:38.3	- 6:28: 8.10	15:11:47.4	-17: 1:25.20	12:45:45.1	- 3:26:44.18	13:17:23.5	- 7:37:51.40
11/Out	13: 4:18.8	- 6:50:50.74	15:12:35.9	-17: 4:45.42	12:50:20.6	- 3:56:40.60	13:19:52.1	- 7:53:16.73
12/Out	13: 7:59.8	- 7:13:27.96	15:13:24.8	-17: 8: 5.72	12:54:56.5	- 4:26:33.00	13:22:21.0	- 8: 8:39.57
13/Out	13:11:41.3	- 7:35:59.39	15:14:13.8	-17:11:26.05	12:59:32.7	- 4:56:20.64	13:24:50.2	- 8:23:59.81
14/Out	13:15:23.4	- 7:58:24.65	15:15: 3.2	-17:14:46.39	13: 4: 9.4	- 5:26: 2.75	13:27:19.8	- 8:39:17.34
15/Out	13:19: 6.0	- 8:20:43.39	15:15:52.7	-17:18: 6.71	13: 8:46.6	- 5:55:38.58	13:29:49.8	- 8:54:32.06
16/Out	13:22:49.2	- 8:42:55.22	15:16:42.6	-17:21:26.96	13:13:24.3	- 6:25: 7.35	13:32:20.1	- 9: 9:43.82
17/Out	13:26:32.9	- 9: 4:59.75	15:17:32.6	-17:24:47.11	13:18: 2.6	- 6:54:28.31	13:34:50.8	- 9:24:52.52
18/Out	13:30:17.3	- 9:26:56.58	15:18:22.9	-17:28: 7.12	13:22:41.5	- 7:23:40.64	13:37:21.9	- 9:39:58.01
19/Out	13:34: 2.2	- 9:48:45.29	15:19:13.4	-17:31:26.93	13:27:21.0	- 7:52:43.57	13:39:53.4	- 9:55: 0.17
20/Out	13:37:47.8	-10:10:25.49	15:20: 4.2	-17:34:46.51	13:32: 1.2	- 8:21:36.31	13:42:25.2	-10: 9:58.85
21/Out	13:41:34.0	-10:31:56.77	15:20:55.2	-17:38: 5.84	13:36:42.1	- 8:50:18.08	13:44:57.5	-10:24:53.94
22/Out	13:45:20.9	-10:53:18.74	15:21:46.3	-17:41:24.88	13:41:23.8	- 9:18:48.09	13:47:30.2	-10:39:45.32
23/Out	13:49: 8.5	-11:14:30.98	15:22:37.7	-17:44:43.62	13:46: 6.2	- 9:47: 5.55	13:50: 3.3	-10:54:32.87
24/Out	13:52:56.8	-11:35:33.08	15:23:29.3	-17:48: 2.03	13:50:49.5	-10:15: 9.68	13:52:36.8	-11: 9:16.44
25/Out	13:56:45.7	-11:56:24.62	15:24:21.1	-17:51:20.07	13:55:33.6	-10:42:59.65	13:55:10.7	-11:23:55.91
26/Out	14: 0:35.3	-12:17: 5.20	15:25:13.1	-17:54:37.72	14: 0:18.6	-11:10:34.68	13:57:45.0	-11:38:31.13
27/Out	14: 4:25.7	-12:37:34.39	15:26: 5.3	-17:57:54.94	14: 5: 4.5	-11:37:53.97	14: 0:19.8	-11:53: 1.99
28/Out	14: 8:16.8	-12:57:51.79	15:26:57.6	-18: 1:11.71	14: 9:51.3	-12: 4:56.71	14: 2:54.9	-12: 7:28.33
29/Out	14:12: 8.6	-13:17:56.99	15:27:50.2	-18: 4:27.99	14:14:39.1	-12:31:42.10	14: 5:30.6	-12:21:50.04
30/Out	14:16: 1.1	-13:37:49.58	15:28:42.9	-18: 7:43.74	14:19:27.9	-12:58: 9.32	14: 8: 6.6	-12:36: 6.96
31/Out	14:19:54.5	-13:57:29.13	15:29:35.7	-18:10:58.91	14:24:17.8	-13:24:17.57	14:10:43.1	-12:50:18.95
01/Nov	14:23:48.5	-14:16:55.24	15:30:28.7	-18:14:13.46	14:29: 8.6	-13:50: 6.04	14:13:20.1	-13: 4:25.86
02/Nov	14:27:43.4	-14:36: 7.51	15:31:21.9	-18:17:27.36	14:34: 0.6	-14:15:33.91	14:15:57.5	-13:18:27.57
03/Nov	14:31:39.0	-14:55: 5.57	15:32:15.2	-18:20:40.58	14:38:53.6	-14:40:40.41	14:18:35.4	-13:32:23.96
04/Nov	14:35:35.4	-15:13:49.02	15:33: 8.6	-18:23:53.11	14:43:47.8	-15: 5:24.75	14:21:13.7	-13:46:14.90
05/Nov	14:39:32.7	-15:32:17.50	15:34: 2.2	-18:27: 4.94	14:48:43.1	-15:29:46.13	14:23:52.5	-14: 0: 0.28
06/Nov	14:43:30.7	-15:50:30.62	15:34:55.9	-18:30:16.03	14:53:39.5	-15:53:43.78	14:26:31.9	-14:13:39.97
07/Nov	14:47:29.6	-16: 8:28.01	15:35:49.8	-18:33:26.39	14:58:37.2	-16:17:16.91	14:29:11.6	-14:27:13.85
08/Nov	14:51:29.4	-16:26: 9.27	15:36:43.7	-18:36:35.98	15: 3:36.0	-16:40:24.74	14:31:51.9	-14:40:41.80
09/Nov	14:55:30.0	-16:43:34.04	15:37:37.8	-18:39:44.80	15: 8:36.1	-17: 3: 6.47	14:34:32.7	-14:54: 3.68
10/Nov	14:59:31.4	-17: 0:41.91	15:38:32.1	-18:42:52.82	15:13:37.4	-17:25:21.33	14:37:14.0	-15: 7:19.37
11/Nov	15: 3:33.8	-17:17:32.50	15:39:26.4	-18:46: 0.01	15:18:39.9	-17:47: 8.52	14:39:55.9	-15:20:28.71
12/Nov	15: 7:36.9	-17:34: 5.40	15:40:20.8	-18:49: 6.35	15:23:43.7	-18: 8:27.25	14:42:38.2	-15:33:31.57
13/Nov	15:11:41.0	-17:50:20.20	15:41:15.4	-18:52:11.78	15:28:48.7	-18:29:16.73	14:45:21.0	-15:46:27.78
14/Nov	15:15:45.9	-18: 6:16.49	15:42:10.0	-18:55:16.28	15:33:54.9	-18:49:36.18	14:48: 4.4	-15:59:17.18
15/Nov	15:19:51.7	-18:21:53.87	15:43: 4.7	-18:58:19.81	15:39: 2.4	-19: 9:24.81	14:50:48.3	-16:11:59.63
16/Nov	15:23:58.3	-18:37:11.88	15:43:59.5	-19: 1:22.34	15:44:11.1	-19:28:41.85	14:53:32.7	-16:24:34.96
17/Nov	15:28: 5.8	-18:52:10.25	15:44:54.3	-19: 4:23.87	15:49:21.0	-19:47:26.59	14:56:17.7	-16:37: 3.07
18/Nov	15:32:14.2	-19: 6:48.52	15:45:49.3	-19: 7:24.37	15:54:32.2	-20: 5:38.28	14:59: 3.2	-16:49:23.80
19/Nov	15:36:23.4	-19:21: 6.32	15:46:44.3	-19:10:23.83	15:59:44.5	-20:23:16.18	15: 1:49.2	-17: 1:37.00
20/Nov	15:40:33.4	-19:35: 3.25	15:47:39.4	-19:13:22.23	16: 4:58.1	-20:40:19.60	15: 4:35.8	-17:13:42.53
21/Nov	15:44:44.3	-19:48:38.94	15:48:34.5	-19:16:19.56	16:10:12.8	-20:56:47.82	15: 7:22.9	-17:25:40.24
22/Nov	15:48:55.9	-20: 1:53.02	15:49:29.7	-19:19:15.80	16:15:28.7	-21:12:40.17	15:10:10.5	-17:37:29.98
23/Nov	15:53: 8.4	-20:14:45.12	15:50:24.9	-19:22:10.92	16:20:45.6	-21:27:55.97	15:12:58.7	-17:49:11.60
24/Nov	15:57:21.6	-20:27:14.87	15:51:20.2	-19:25: 4.92	16:26: 3.7	-21:42:34.57	15:15:47.4	-18: 0:44.95
25/Nov	16: 1:35.6	-20:39:21.90	15:52:15.5	-19:27:57.74	16:31:22.8	-21:56:35.32	15:18:36.7	-18:12: 9.86
26/Nov	16: 5:50.4	-20:51: 5.87	15:53:10.8	-19:30:49.36	16:36:43.0	-22: 9:57.61	15:21:26.5	-18:23:26.17
27/Nov	16:10: 5.9	-21: 2:26.42	15:54: 6.2	-19:33:39.75	16:42: 4.1	-22:22:40.82	15:24:16.8	-18:34:33.72
28/Nov	16:14:22.0	-21:13:23.21	15:55: 1.5	-19:36:28.88	16:47:26.1	-22:34:44.39	15:27: 7.7	-18:45:32.36
29/Nov	16:18:38.9	-21:23:55.95	15:55:56.8	-19:39:16.73	16:52:49.1	-22:46: 7.76	15:29:59.1	-18:56:21.92
30/Nov	16:22:56.4	-21:34: 4.31	15:56:52.2	-19:42: 3.28	16:58:12.9	-22:56:50.41	15:32:51.0	-19: 7: 2.29
01/Dez	16:27:14.6	-21:43:48.01	15:57:47.5	-19:44:48.52	17: 3:37.5	-23: 6:51.86	15:35:43.5	-19:17:33.31
02/Dez	16:31:33.5	-21:53: 6.78	15:58:42.8	-19:47:32.45	17: 9: 2.9	-23:16:11.64	15:38:36.5	-19:27:54.86

Pg 7	A		B		C		D	
Data	RA	DEC	RA	DEC	RA	DEC	RA	DEC
03/Dez	16:35:53.0	-22: 2: 0.35	15:59:38.1	-19:50:15.05	17:14:29.0	-23:24:49.32	15:41:30.0	-19:38: 6.79
04/Dez	16:40:13.0	-22:10:28.48	16: 0:33.4	-19:52:56.33	17:19:55.8	-23:32:44.51	15:44:24.1	-19:48: 8.99
05/Dez	16:44:33.7	-22:18:30.91	16: 1:28.7	-19:55:36.27	17:25:23.2	-23:39:56.82	15:47:18.8	-19:58: 1.31
06/Dez	16:48:54.9	-22:26: 7.42	16: 2:23.9	-19:58:14.88	17:30:51.2	-23:46:25.91	15:50:14.0	-20: 7:43.62
07/Dez	16:53:16.7	-22:33:17.76	16: 3:19.1	-20: 0:52.13	17:36:19.7	-23:52:11.46	15:53: 9.7	-20:17:15.77
08/Dez	16:57:39.0	-22:40: 1.73	16: 4:14.3	-20: 3:28.01	17:41:48.7	-23:57:13.19	15:56: 6.0	-20:26:37.63
09/Dez	17: 2: 1.8	-22:46:19.09	16: 5: 9.4	-20: 6: 2.50	17:47:18.0	-24: 1:30.83	15:59: 2.8	-20:35:49.04
10/Dez	17: 6:25.0	-22:52: 9.64	16: 6: 4.5	-20: 8:35.57	17:52:47.6	-24: 5: 4.15	16: 2: 0.2	-20:44:49.85
11/Dez	17:10:48.7	-22:57:33.17	16: 6:59.5	-20:11: 7.20	17:58:17.5	-24: 7:52.94	16: 4:58.1	-20:53:39.90
12/Dez	17:15:12.8	-23: 2:29.51	16: 7:54.4	-20:13:37.37	18: 3:47.6	-24: 9:57.04	16: 7:56.5	-21: 2:19.06
13/Dez	17:19:37.3	-23: 6:58.47	16: 8:49.2	-20:16: 6.07	18: 9:17.9	-24:11:16.32	16:10:55.5	-21:10:47.18
14/Dez	17:24: 2.1	-23:10:59.89	16: 9:44.0	-20:18:33.29	18:14:48.2	-24:11:50.68	16:13:54.9	-21:19: 4.12
15/Dez	17:28:27.3	-23:14:33.64	16:10:38.7	-20:20:59.03	18:20:18.6	-24:11:40.07	16:16:54.9	-21:27: 9.73
16/Dez	17:32:52.8	-23:17:39.58	16:11:33.3	-20:23:23.26	18:25:48.8	-24:10:44.47	16:19:55.5	-21:35: 3.90
17/Dez	17:37:18.5	-23:20:17.61	16:12:27.8	-20:25:46.00	18:31:19.0	-24: 9: 3.90	16:22:56.5	-21:42:46.47
18/Dez	17:41:44.5	-23:22:27.63	16:13:22.2	-20:28: 7.24	18:36:49.0	-24: 6:38.43	16:25:58.1	-21:50:17.33
19/Dez	17:46:10.6	-23:24: 9.57	16:14:16.5	-20:30:26.98	18:42:18.7	-24: 3:28.16	16:29: 0.1	-21:57:36.34
20/Dez	17:50:36.9	-23:25:23.37	16:15:10.7	-20:32:45.19	18:47:48.1	-23:59:33.21	16:32: 2.7	-22: 4:43.37
21/Dez	17:55: 3.4	-23:26: 8.96	16:16: 4.7	-20:35: 1.88	18:53:17.1	-23:54:53.77	16:35: 5.7	-22:11:38.28
22/Dez	17:59:29.8	-23:26:26.33	16:16:58.7	-20:37:17.03	18:58:45.6	-23:49:30.02	16:38: 9.2	-22:18:20.94
23/Dez	18: 3:56.3	-23:26:15.43	16:17:52.4	-20:39:30.61	19: 4:13.6	-23:43:22.20	16:41:13.1	-22:24:51.22
24/Dez	18: 8:22.8	-23:25:36.27	16:18:46.0	-20:41:42.62	19: 9:41.1	-23:36:30.57	16:44:17.6	-22:31: 8.97
25/Dez	18:12:49.3	-23:24:28.85	16:19:39.5	-20:43:53.04	19:15: 7.8	-23:28:55.42	16:47:22.4	-22:37:14.08
26/Dez	18:17:15.6	-23:22:53.19	16:20:32.8	-20:46: 1.86	19:20:33.9	-23:20:37.08	16:50:27.7	-22:43: 6.40
27/Dez	18:21:41.9	-23:20:49.34	16:21:25.9	-20:48: 9.06	19:25:59.2	-23:11:35.90	16:53:33.4	-22:48:45.84
28/Dez	18:26: 8.0	-23:18:17.34	16:22:18.9	-20:50:14.65	19:31:23.7	-23: 1:52.26	16:56:39.6	-22:54:12.26
29/Dez	18:30:33.9	-23:15:17.28	16:23:11.6	-20:52:18.63	19:36:47.3	-22:51:26.59	16:59:46.2	-22:59:25.56
30/Dez	18:34:59.6	-23:11:49.25	16:24: 4.2	-20:54:21.00	19:42:10.0	-22:40:19.33	17: 2:53.1	-23: 4:25.65
31/Dez	18:39:25.0	-23: 7:53.36	16:24:56.6	-20:56:21.77	19:47:31.8	-22:28:30.98	17: 6: 0.5	-23: 9:12.42

B.2 Mecânica

B.2.1 Medindo a velocidade da luz (IAO 2003)

Imagine que, num futuro distante, o Sistema Solar seja habitado por nossos descendentes. No asteroide Saltis, uma pequena empresa de mineração robótica é supervisionada por *Celesta Spacedigger*, que também é uma dedicada astrônoma amadora. Entediada com o seu trabalho, Celesta passa as longas noites de Saltis estudando as estrelas e planetas, em particular o glorioso planeta Saturno. Um velho mas confiável almanaque astronômico a ajuda a tomar nota de eventos astronômicos, como os eclipses da lua Titã por seu planeta dos grandes anéis. Para sua surpresa, entretanto, Celesta começa a notar grandes desvios entre os instantes dos eclipses de Titã medidos por ela e os contidos no almanaque. Após anos de cuidadosas observações (ela tinha um contrato de longo período em Saltis), Celesta começa a perceber um padrão: os desvios são maiores quando Saturno está próximo de oposição ou conjunção com o Sol. Ela conclui que o fenômeno se deve à velocidade da luz ser finita; uma checagem no almanaque confirma que o tempo tabelado é heliocêntrico – isto é, visto do Sol, não de Saltis. Satisfeita com sua descoberta, Celesta usa suas observações para calcular a velocidade da luz.

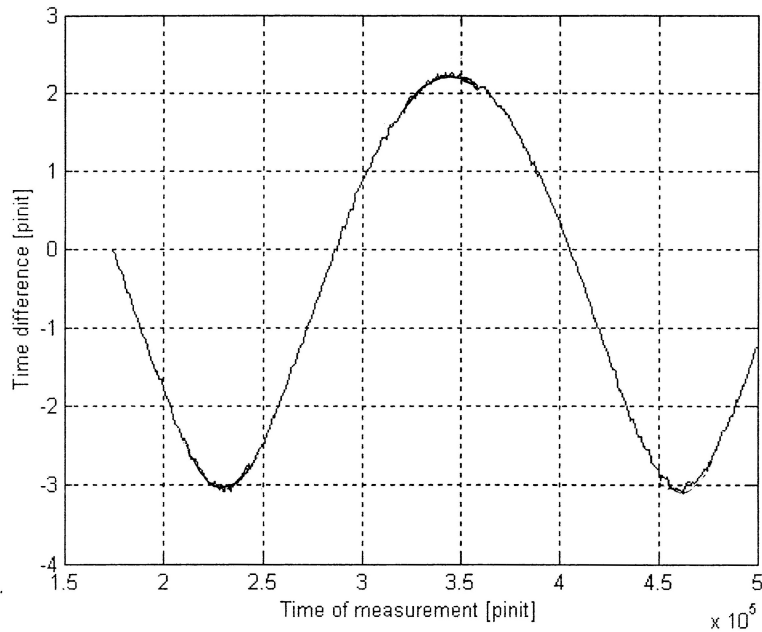
Neste problema você deve repetir os cálculos de Celesta utilizando suas observações. Entretanto, as unidades de tempo e comprimento são um pouco diferentes das que você está acostumado a usar. A unidade de tempo, *pinit*, é definida de forma que 1000 pinit equivalem ao período sinódico de rotação de Saltis. A unidade de comprimento, *seter*, é definida como a bilionésima parte da distância média entre o Sol e Saltis.

tabelado (pinit)	Celesta (pinit)	comentário
456.47	450.32	oposição
18.5	12.28	oposição
821.41	815.29	oposição
444.7	450.85	conjunção
615.43	621.52	conjunção
791.94	798.02	conjunção

- (a) Celesta observou eclipses de Titã quando Saturno estava próximo de oposição ou conjunção em seis ocasiões (tabela ??). Analise seus dados cuidadosamente e estime a velocidade da luz, em unidades de seter por pinit, bem como o erro esperado em sua estimativa.

Durante seus solitários dias, Celesta também gostava de ouvir sinais de rádio vindos da Terra. Com a sua redescoberta da velocidade finita da luz, Celesta ganhou confiança para tentar medir o raio da órbita da Terra (em seter). Ela sincronizou seu relógio com precisão com um sinal de tempo em radiofrequência e regularmente acompanhou o quanto o tempo medido no seu relógio diferia do sinal de tempo periódico. Suas medidas são apresentadas na figura ??.

- (b) Use os dados de Celesta para estimar o raio da órbita da Terra em seter.
- (c) Sendo $1 \text{ UA} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$ e $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, quantos metros estão contidos em um seter? Quantos segundos vale um pinit?
- (d) Estime o período orbital de Saltis, usando os dados de Celesta e os resultados do item (c).



B.2.2 Sistema planetário (IOAA 2008)

A tabela a seguir fornece dados de um sistema planetário:

#	planeta	semi-eixo maior (UA)	período orbital (anos)	excentricidade	massa ($M_{\oplus}$)
1	A	1.10	1.63	0.215	0.165
2	B	1.90	3.70	0.027	0.815
3	C	3.50	9.26	0.017	1.500
4	D	6.70	24.53	0.095	0.207
5	E	25.80	185.33	0.050	419.00
6	F	51.50	522.67	0.077	95.20
7	G	102.7	1471.87	0.065	14.50

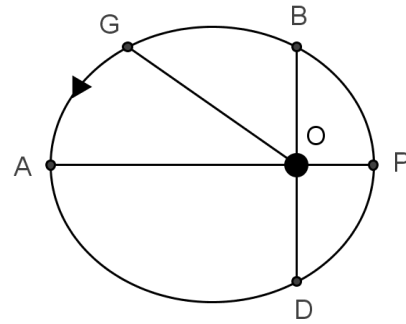
- Encontre uma fórmula empírica, similar à Lei de Titius-Bode, que resuma os valores de semi-eixo maior para essa configuração de planetas.
- A partir dos dados acima, mostre que a energia mecânica e o momento angular indicados pelos dados assumem valores discretos.
- Estime o semi-eixo maior e o período orbital de um planeta faltante.

B.2.3 Rádio-pulsar binário (IAO 2006)

Um rádio-pulsar é uma estrela de nêutrons em rotação, que emite ondas de rádio de seus pólos magnéticos. Essas ondas são observadas na Terra como uma série de pulsos separados por um período de pulso aparente P_t . Quando o pulsar faz parte de uma sistema binário, P_t difere do período de pulso verdadeiro. O pulsar 0514-40 foi estudado com em 2004 com o *Giant Metrewave Radio Telescope* (GMRT). O período verdadeiro deste pulsar é $P_0 = 4,990575$ ms. A tabela anexa fornece dados de P_t em função do tempo, em unidades de período orbital t/T ($T = 18,35$ dias). Suponha que o observador está localizado no plano orbital do pulsar.

t/T	$P_t(ms)$
0.136661	4.990905
0.211722	4.991053
0.268267	4.991236
0.343782	4.991742
0.373530	4.992284
0.384599	4.990415
0.386994	4.989791
0.406418	4.989308

t/T	$P_t(ms)$
0.410888	4.989361
0.411599	4.989412
0.452397	4.989698
0.465116	4.989770
0.503379	4.989925
0.671385	4.990276
0.774999	4.990418
0.986004	4.990680



- Faça um gráfico desses dados.
- Esboce a forma hipotética da curva do gráfico caso a órbita em questão fosse circular.

Um gráfico da órbita elíptica do pulsar com excentricidade $e=0,866$ é dado (para 0514-40 a excentricidade é muito próxima desse valor). A seta na curva indica que o pulsar se move no sentido anti-horário nessa órbita em torno do foco O . $\overline{AP}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares entre si; $\overline{AP}$ é o eixo maior da elipse.

- Considerando a velocidade μ_A no ponto A como unitária, calcule a velocidade transversal nos pontos B, P e D (a velocidade transversal μ_G do pulsar num ponto qualquer G é a magnitude da componente perpendicular a $\overline{OG}$).
- Usando o gráfico da órbita ou qualquer outro método, determine a velocidade total em B, P e D (v_B , v_P e v_D , respectivamente), na mesma unidade de velocidade.
- A partir da forma dos dados $P_t \times t/T$, estime se o observador encontra-se próximo ao eixo maior ou menor da órbita, e de que lado.
- Suponha que a componente de velocidade paralela ao eixo maior é máxima nos pontos B e D. Marque os pontos A, B, P e D no gráfico que você fez usando os dados $P_t \times t/T$.
- Esboce, aproximadamente, no mesmo gráfico, a curva $P_t \times t/T$ para um observador localizado no eixo perpendicular ao determinado no item (e).
- A partir do desenho orbital, estime a fração do período orbital total necessária para percorrer o arco $\widehat{DPB}$. Faça a mesma estimativa a partir do gráfico de dados feito por você.
- Desenhe uma linha $P_t = P_0$ no seu gráfico de dados. Meça as áreas referentes à curva que você desenhou, acima e abaixo da linha $P_t = P_0$, e use isso para determinar o eixo maior em segundos-luz.

B.2.4 Vênus (IOAA 2009)

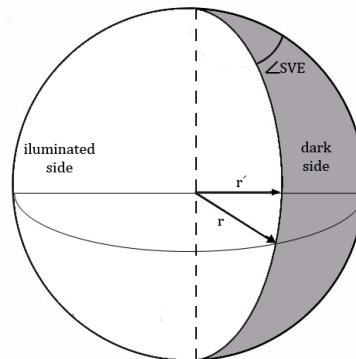
Um observador em Deh-Namak (onde ocorreu a prova observacional desta IOAA) observou Vênus ao longo de sete meses, de Setembro de 2008 a Março de 2009. Durante a observação, foram usados uma câmera CCD de pesquisa e um software de processamento de imagens, para obter imagens de alta resolução e extrair dados com alta precisão. A tabela abaixo mostra os dados coletados durante a observação. Nela, *fase* representa a porcentagem do disco venusiano iluminado pelo Sol, como visto a partir da Terra (ver figura), enquanto *elongação* é a distância angular entre o centro do Sol e o centro de Vênus, também a partir do nosso planeta.

- (a) Usando os dados da tabela, calcule os valores para o ângulo Sol-Vênus-Terra ($\angle SVE$). Essa é a separação angular entre o Sol e a Terra, como visto de Vênus. Escreva, para todos os dados, os valores para o ângulo $\angle SVE$ na coluna 2 da Tabela 2, que você fará em sua resposta.

Dica: Lembre-se que a linha entre luz e sombra, nas fases, é um arco de elipse.

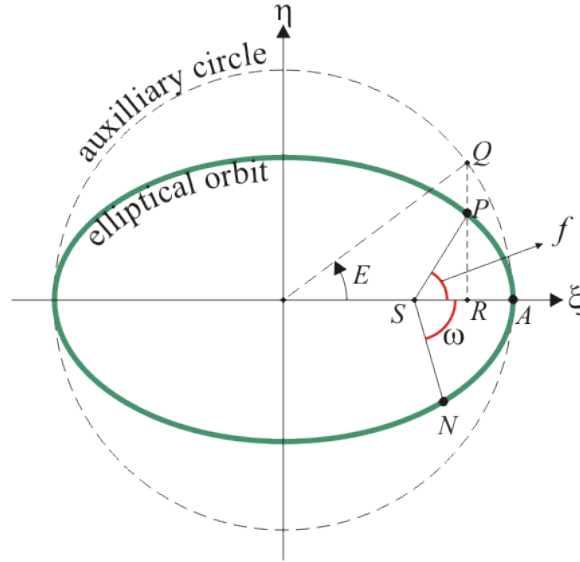
- (b) Calcule, para os dados, a distância Sol-Vênus, em UA, e escreva-os na coluna 3 da tabela 2.
- (c) Plote um gráfico da distância Sol-Vênus *versus* data de observação.
- (d) Encontre as distâncias de Vênus ao Sol no periélio ($r_{v,min}$) e no afélio ($r_{v,max}$).
- (e) Calcule o semi-eixo maior (a) da órbita de Vênus.
- (f) Calcule a excentricidade (e) da órbita de Vênus.

data	$d_{\text{Terra-Sol}}$ (UA)	fase (%)	elongação ($^{\circ}$)
20/9/2008	1.0043	88.4	27.56
10/10/2008	0.9986	84.0	32.29
20/10/2008	0.9957	81.6	34.53
30/10/2008	0.9931	79.0	36.69
9/11/2008	0.9905	76.3	38.71
19/11/2008	0.9883	73.4	40.62
29/11/2008	0.9864	70.2	42.38
19/12/2008	0.9839	63.1	45.29
29/12/2008	0.9834	59.0	46.32
18/1/2009	0.9838	49.5	47.09
7/2/2009	0.9863	37.2	44.79
17/2/2009	0.9881	29.6	41.59
27/2/2009	0.9904	20.9	36.16
19/3/2009	0.9956	3.8	16.08



B.2.5 Elementos Orbitais de NEAs (IOAA 2008)

Nosso Sistema Solar possui diversos corpos pequenos, que podem ser agrupados por suas propriedades físicas e suas distâncias médias ao Sol. Grosso modo, há duas famílias distintas de corpos: asteróides e cometas. Neste problema, fornecemos dados orbitais de um grupo específico de asteróides, conhecidos pelo nome inglês *Near Earth Asteroids* (NEAs).



A órbita elíptica de qualquer corpo planetário pode ser associada a um círculo auxiliar, como mostrado na figura acima. A distância r de um objeto (P) em relação ao Sol (S) é expressa por:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

onde a é o semi-eixo maior, e é a excentricidade e f é a anomalia verdadeira. Podemos então introduzir um novo parâmetro, chamada *anomalia média*:

$$M(t) = \frac{a\pi(t - \tau)}{T}$$

onde τ é o instante em que o planeta está em seu pericentro A, $(t - \tau)$ é o tempo decorrido até o instante em questão e T é o período orbital. Usando as Leis de Kepler e apoiando-se na figura anterior, podemos obter a equação de Kepler:

$$E - e \sin E = M$$

onde E é a chamada *anomalia excêntrica*. As coordenadas (ξ, η) satisfazem então às relações:

$$\begin{aligned}\xi &= r \cos f = a \cos E - e \\ \eta &= r \sin f = a \sin E \cdot \sqrt{1 - e^2}\end{aligned}$$

Além disso, para obter a evolução orbital de um corpo, é mais conveniente transformar o sistema de coordenadas acima em coordenadas cartesianas, como descrito pela figura B.2.

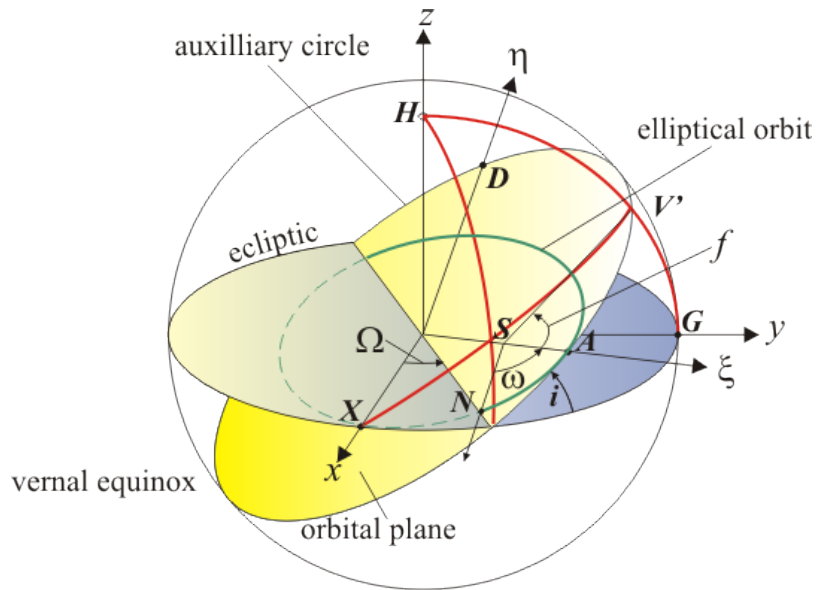


Figura B.2

Para tanto, utilizamos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} x &= l_1 \zeta + l_2 \eta \\ y &= m_1 \zeta + m_2 \eta \\ z &= n_1 \zeta + n_2 \eta \end{aligned}$$

cujos coeficientes são dados por:

$$\begin{array}{ll} l_1 = \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i & l_2 = \cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i \\ m_1 = \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i & m_2 = \sin \Omega \sin \omega + \sin \Omega \cos \omega \cos i \\ n_1 = \sin \omega \sin i & n_2 = \cos \omega \sin i \end{array}$$

A tabela a seguir contém os dados a ser analisados, medidos no instante $t_0 = 245625.5$ JD (dias julianos).

Objeto	a (UA)	e	i	ω (deg)	Ω (deg)	M (deg)
A	0.74598	0.40569	9.32372	159.52833	14.63234	37.43041
B	0.93812	0.42464	0.16470	204.82667	178.50755	281.97198
C	0.99242	0.13119	0.62570	305.42004	57.36543	269.10566
D	1.26090	0.44590	8.40200	307.27780	33.99440	235.60147
E	1.92350	0.36230	0.90690	46.56240	43.32610	179.78573
Terra	0.99906	0.01638	0.00183	279.40019	186.45171	150.77943

- Considere os dados orbitais de da Terra fornecidos na tabela para um instante t_0 e assuma que todos os parâmetros, exceto M , não mudam com o tempo. Determine T (em dias) e τ (em JD) para cada objeto da tabela.
- Determine o valor de E e a distância ao Sol $r(t_0)$ (UA) para cada objeto da tabela.
- Determine a posição de cada objeto em $t = t_0$, em coordenadas cartesianas (x, y, z) , em UA.
- O *Raio de Hill* ou *raio da esfera de influência* é definido como a distância ao Sol para qual a influência gravitacional exercida pelo Sol é igual àquela exercida por um planeta de massa m que orbite o Sol em uma órbita de semi-eixo maior a . Ele pode ser expresso como:

$$R_H := a \left(\frac{m}{M_\odot} \right)^{1/3}$$

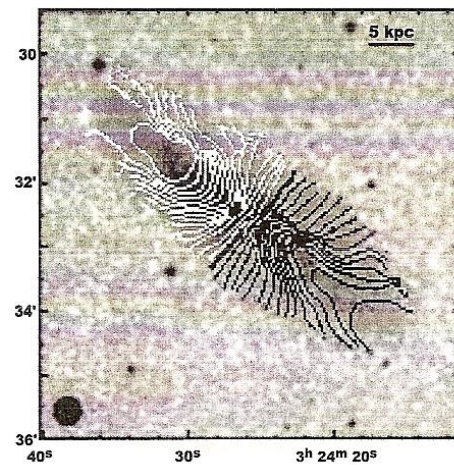
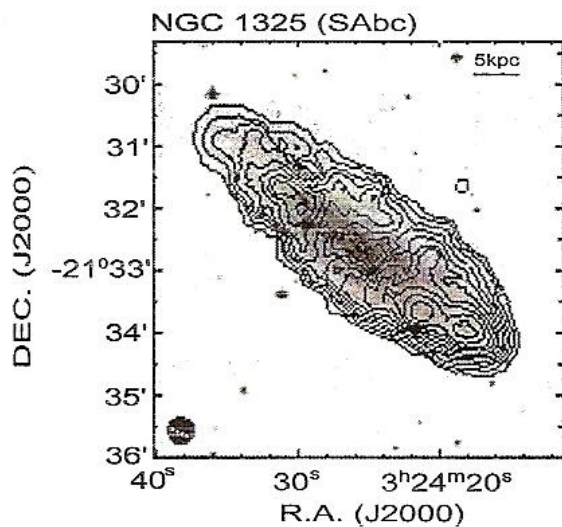
Determine quais objetos, dentre os seus dados, estão sujeitos à esfera de influência da Terra no tempo $t = t_0$.

B.2.6 NGC 1325 (IAO 2006)

Na questão 4 da prova teórica, você resolveu o problema da galáxia NGC 1325. A inclinação da galáxia era de 70° e seu diâmetro angular de $6,5'$, correspondendo a um diâmetro físico de 43 kpc. Esta galáxia foi observada no *Giant Metrewave Radio Telescope* (GMRT), perto da cidade de Pune, Índia, durante o mês de maio de 2001. O objetivo era que seu perfil de rotação fosse estudado a partir da linha de 21 cm do gás hidrogênio. A figura abaixo mostra a distribuição das velocidades de rotação do gás na forma de um mapa de contorno. Superposta a ela, há uma imagem óptica da galáxia, que não foi produzida no GMRT.

O centro da NGC 1325 está se afastando de nós. Enquanto a galáxia gira em torno de seu centro, um dos lados parece se afastar de nós mais lentamente que o outro. Na figura citada, as linhas de contorno brancas representam velocidades mais baixas que a média, enquanto as linhas de contorno pretas representam velocidades mais altas que a média. A cada variação de 10 km/s na velocidade no plano galáctico (isto é, você não precisa se preocupar com a inclinação da galáxia), uma nova linha de contorno é desenhada.

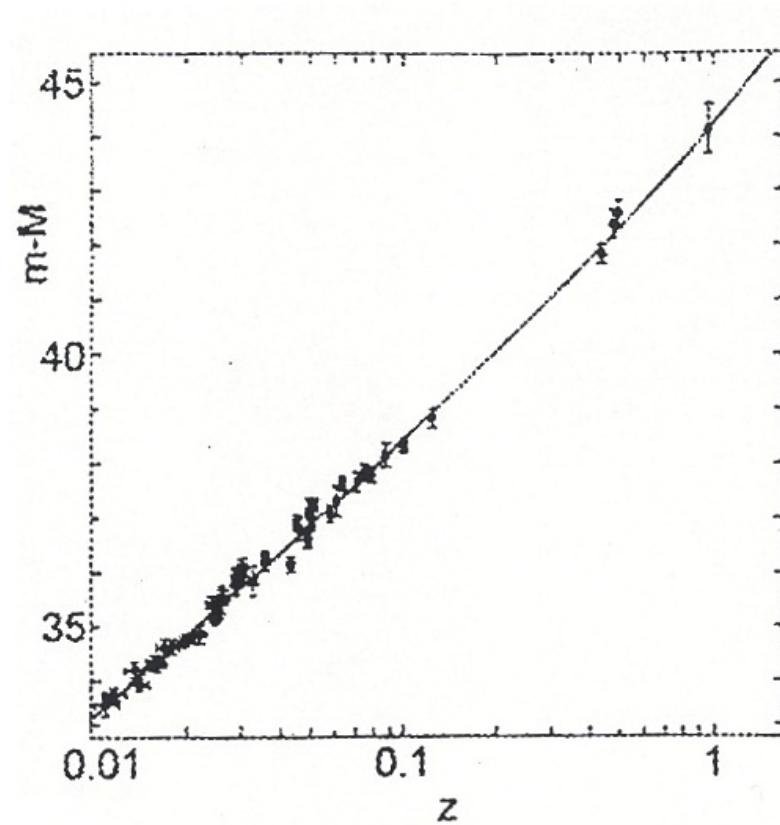
- Desenhe a curva de rotação (velocidade de rotação $\times$ distância ao centro, em segundos de arco).
- A partir da curva de rotação, estime a massa total da galáxia (em unidades de massa solar). Assuma o movimento como circular.



B.3 Astrofísica

B.3.1 Supernova Ia (IAO 2007)

Um diagrama de Hubble é mostrado no gráfico abaixo. Ache a magnitude aparente de uma supernova hipotética do tipo Ia, se ela explodiu a uma distância de $2,5 \times 10^3$ Mpc. É sabido que todas as supernovas Ia têm magnitudes absolutas similares.



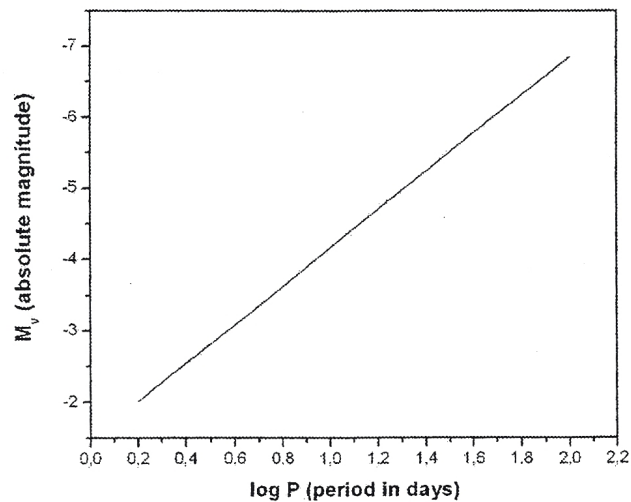
B.3.2 Velocidade Radial de Cefeidas (IAO 2007)

Imagine uma cefeida cuja posição está na divisa entre as constelações de Sagitário (*Sagittarius*, Sgt) e Escudo (*Scutum*, Sct). Esta cefeida tem uma magnitude aparente média de $6^m,2$. Observações espectroscópicas da linha $H\alpha$ (comprimento de onda de laboratório: $\lambda = 6562,8 \text{ \AA}$) para esta cefeida duraram 16 noites consecutivas na segunda parte de setembro. A lista das observações é dada na tabela. Plote um gráfico baseado nos dados listados na tabela, o que lhe permite perceber importantes características desta cefeida e responder à pergunta: esta cefeida poderia ser vista pelos primeiros habitantes da Terra (cerca de 2 milhões de anos atrás)? Qual era a magnitude aparente desta estrela naquela época?

Informação suplementar: Use a relação mostrada no gráfico abaixo, válida para cefeidas em geral.

Recomendações: Ignore efeitos de absorção interestelar e mudanças possíveis na luminosidade média da cefeida durante os últimos 2 milhões de anos.

momento das observações (dias)	comprimento de onda observado ($\text{\AA}$)
0,9	6565,1
1,8	6565,1
2,9	6564,6
3,9	6564,4
4,9	6564,9
5,8	6565,1
6,8	6564,8
7,8	6564,5
8,8	6564,5
8,9	6564,6
9,8	6565,0
10,8	6565,0
11,9	6564,6
12,8	6564,4
13,8	6564,4
14,8	6564,7
15,9	6565,1



B.3.3 Cefeidas (IOAA 2012)

As cefeidas são estrelas variáveis muito brilhantes cujas magnitudes absolutas médias são funções de seus períodos de pulsação. Isto permite aos astrofísicos determinar facilmente sua luminosidade intrínseca a partir da variação das luminosidades aparentes observadas.

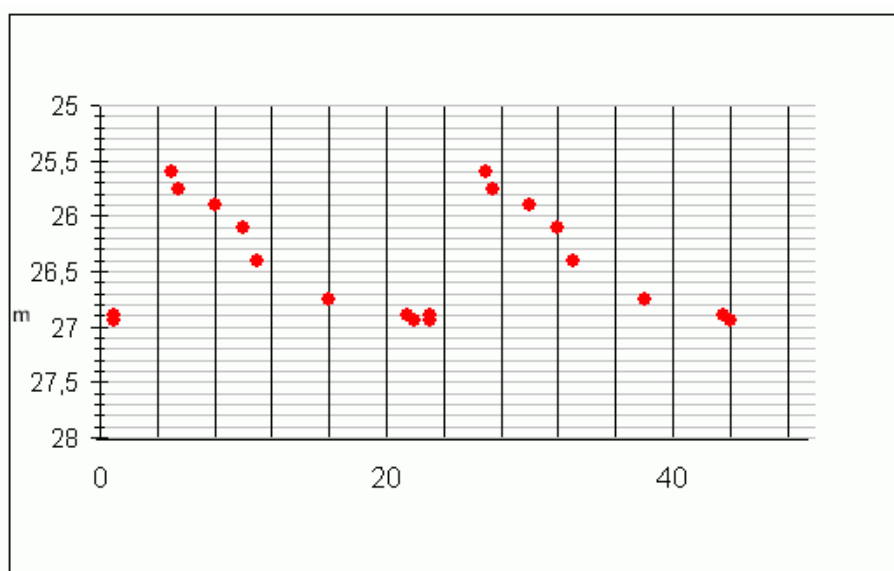
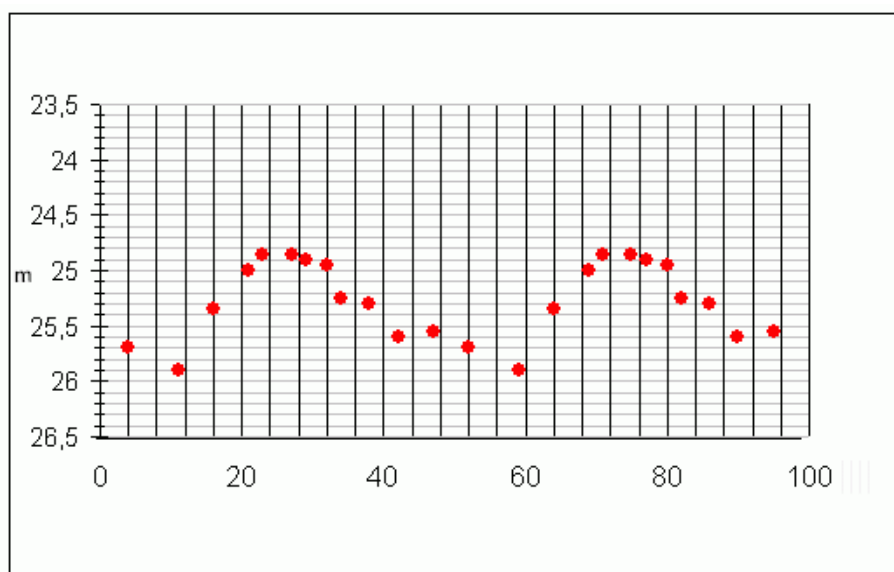
Abaixo apresentamos uma tabela contendo dados de Cefeidas. P_0 é o período de pulsação em dias e $\langle M_V \rangle$ é a magnitude visual absoluta média.

Cefeida	P_0 (dias)	$\langle M_V \rangle$
SU Cas	1.95	-1.99
V1726 Cyg	4.24	-3.04
SZ Tau	4.48	-3.09
CV Mon	5.38	-3.37
QZ Nor	5.46	-3.32
α UMi	5.75	-3.42
V367 Sct	6.30	-3.58
U Sgr	6.75	-3.64
DL Cas	8.00	-3.80
S Nor	9.75	-3.95
ζ Gem	10.14	-4.10
X Cyg	16.41	-4.69
WZ Sgr	21.83	-5.06
SW Vel	23.44	-5.09
SV Vul	44.98	-6.04

- Marque os pontos que representam as cefeidas em um diagrama. $\log_{10} P_0$ deve ser a abcissa e $\langle M_V \rangle$ deve ser a ordenada.
- Ajuste, usando mínimos quadrados, uma linha reta ao gráfico $\langle M_V \rangle$ versus $\log_{10} P_0$. Esta equação permite obter a luminosidade a partir do período de pulsação para qualquer cefeida.
- As duas figuras a seguir mostram as curvas de luz de duas cefeidas. Utilize os dados disponíveis para estimar as distâncias a cada uma destas duas Cefeidas. Estime também a incerteza na determinação da distância (fórmulas exatas não são necessárias).
- Comparando as diferenças entre as distâncias das duas estrelas com o tamanho típico da galáxia, você diria que é provável estas duas estrelas estarem na mesma galáxia? Escreva sim (YES) ou não (NO).

Obs: Se as retas são descritas por $y_i = \alpha + \beta \cdot x_i$, com $i = 1, \dots, n$, o estimador de β pelo método dos mínimos quadrados é dado por

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$



B.3.4 Nebulosa Planetária (IAO 2005)

Uma nebulosa planetária é uma esfera de gás em expansão, expelida de uma estrela central a ela. A nebulosa planetária circular IC 418 foi observada através de uma fenda de um espectrógrafo, apontada na direção da metade do raio nebuloso, como mostrado na *Figura 1*. A *Figura 2* (um gráfico de fluxo $\times$ comprimento de onda) mostra a linha de emissão NI ($\lambda = 5200,26 \text{ \AA}$), vista na nebulosa. O perfil tem claramente dois picos.

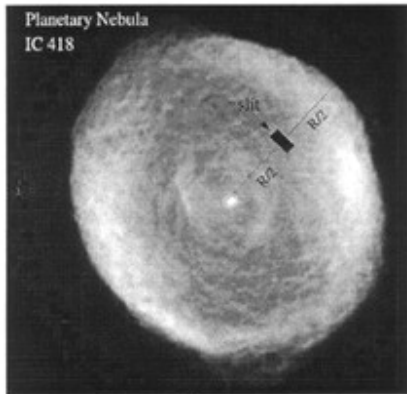


Fig. 1

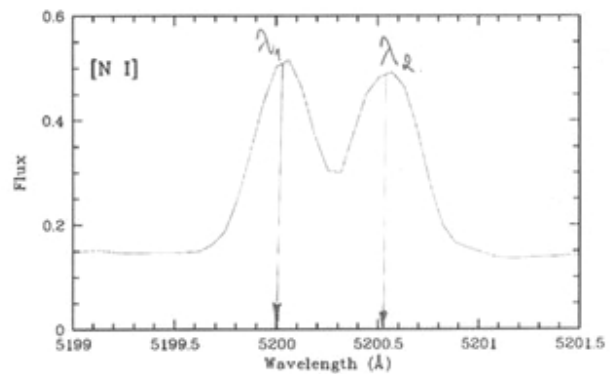


Fig. 2

- Desenhe, no diagrama HR, a trajetória evolutiva de uma estrela a partir da sequência principal, até sua explosão como nebulosa planetária.
- Assumindo que a IC 418 tenha um diâmetro de $12''$ e esteja a uma distância de 330 pc, calcule sua idade. Essa idade é chamada pelos astrofísicos de *idade dinâmica*.

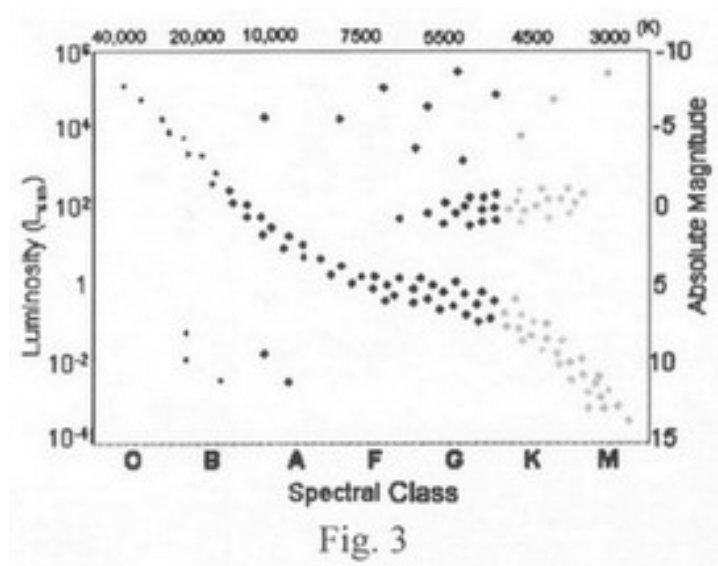


Fig. 3

B.3.5 Análise de mínimos (IOAA 2011)

A Figura 1 mostra a curva de luz da binária eclipsante V1107 Cas, classificada como do tipo W *Ursae Majoris*. A Tabela 1 lista alguns mínimos observados da variação de luz. As colunas contêm respectivamente: o número do mínimo, a data em que foi observado o mínimo (*Universal Time*), a mesma data o tempo juliano heliocêntrico e um erro (em frações de dia).

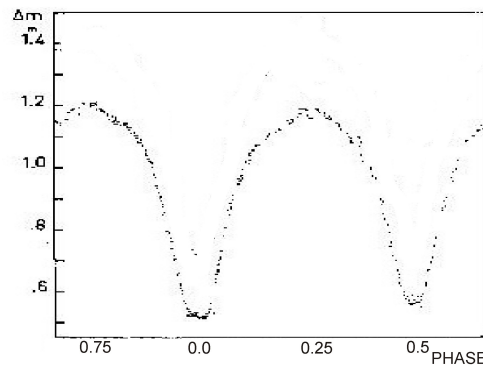
- Determine uma estimativa inicial do período de V1107 Cas, considerando que o período da estrela é constante durante o intervalo das observações. Considere que as observações durante uma noite são contínuas. A duração do trânsito é desprezível.
- Faça o que é conhecido como um diagrama O-C (“observado – calculado”) da seguinte forma: no eixo x, coloque o número de períodos passados (à época) desde um instante inicial M_0 ; no eixo y, a diferença entre o tempo de observação do mínimo M_{obs} e o tempo calculado pela fórmula (efeméride):

$$M_{calc} = M_0 + P \times E$$

onde E, a época, é exatamente um inteiro ou meio-inteiro, e P é o período em dias.

- Usando este diagrama (O-C), melhore as estimativas iniciais do instante inicial M_0 e do período P, e estime as incertezas dos valores.
- Calcule os instantes previstos dos mínimos de V1107 Cas dados em dias julianos heliocêntricos ocorrendo entre 19h, 1 de setembro de 2011 UT, e 02h, 2 de setembro de 2011 UT.

#	data _{min} (UT)	data _{min} (DJH)	erro
1	22/12/2006	2 454 092.4111	0.0004
2	23/12/2006	2 454 092.5478	0.0002
3	23/09/2007	2 454 367.3284	0.0005
4	23/09/2007	2 454 367.4656	0.0005
5	15/10/2007	2 454 388.5175	0.0009
6	15/11/2007	2 454 388.6539	0.0011
7	26/08/2008	2 454 704.8561	0.0002
8	5/11/2008	2 454 776.4901	0.0007
9	3/01/2009	2 454 835.2734	0.0007
10	15/01/2009	2 454 847.3039	0.0004
11	15/01/2009	2 454 847.4412	0.0001
12	16/01/2009	2 454 847.5771	0.0004



B.3.6 Determinação de massas estelares em uma binária visual (IOAA 2008)

A estrela α Centauri (*Rigel Kentaurus*) é um sistema triplo, consistindo em duas estrelas da sequência principal, α Centauri A e α Centauri B, representando um sistema binário visual, e uma terceira estrela, chamada *Proxima Centauri*, que é menor e mais fraca que as outras duas. A distância angular entre as duas estrelas maiores é de $17,59''$. O sistema binário tem um período orbital de 79,24 anos. As magnitudes visuais de α Centauri A e α Centauri B são, respectivamente, -0,01 e 1,34. Seus índices de cor são 0,65 e 0,85, respectivamente. Use os dados abaixo para responder às questões a seguir. Na tabela, $(B - V)_0$ é o índice de cor intrínseco e CB é a correção bolométrica.

$(B - V)_0$	T_{eff}	CB	$(B - V)_0$	T_{eff}	CB
-0.25	24500	2.30	0.30	7450	0
-0.23	21000	2.15	0.40	6800	0
-0.20	17700	1.80	0.50	6310	0.03
-0.15	14000	1.20	0.60	5910	0.07
-0.10	11800	0.61	0.70	5540	0.12
-0.05	10500	0.33	0.80	5330	0.19
0.00	9480	0.15	0.90	5090	0.28
0.10	8530	0.04	1.00	4840	0.40
0.20	7910	0	1.20	4350	0.75

- Plote a curva $BC \times (B - V)_0$.
- Usando a curva plotada, determine as magnitudes aparentes bolométricas de α Centauri A e α Centauri B.
- Calcule a massa de cada estrela.

Notas:

Correção Bolométrica (CB) é uma correção que precisa ser feita à magnitude aparente de um objeto para converter sua magnitude visual (aparente ou absoluta) em magnitude bolométrica:

$$BC = m_V - m_{bol} = M_V - M_{bol}$$

Relação Massa-Luminosidade:

$$M_{bol} = -10,2 \log \frac{M}{M_{\odot}} + 4,9$$

B.3.7 Curvas de Luz Estelares (IOAA 2010)

A estrela variável KZ *Hydrae* foi observada por um telescópio equipado com uma câmera CCD. A figura B.3 mostra uma imagem de KZ Hya marcada junto com uma estrela de comparação (*Comparison*) e uma estrela de verificação (*Check*). A tabela lista o instante de cada observação usando o Calendário Juliano Heliocêntrico (CJH), bem como as diferenças de magnitude entre KZ Hya e a estrela de verificação (ΔV e ΔR) e entre aquela e a estrela de comparação (ΔV_{chk} e ΔR_{chk}), nas bandas V e R.

- Desenhe as curvas de luz de KZ Hya, em relação à estrela de comparação, nas bandas V e R.
- Quais são as médias das diferenças de magnitude de KZ Hya em relação à estrela de comparação nas bandas V e R?
- Qual a precisão fotométrica nas bandas V e R?
- Estime os períodos de pulsação de KZ Hya nas bandas V e R.
- Faça uma estimativa da amplitude de pulsação de KZ Hya nas bandas V e R
- Qual a diferença de fase entre as bandas V e R, em termos do período de pulsação?

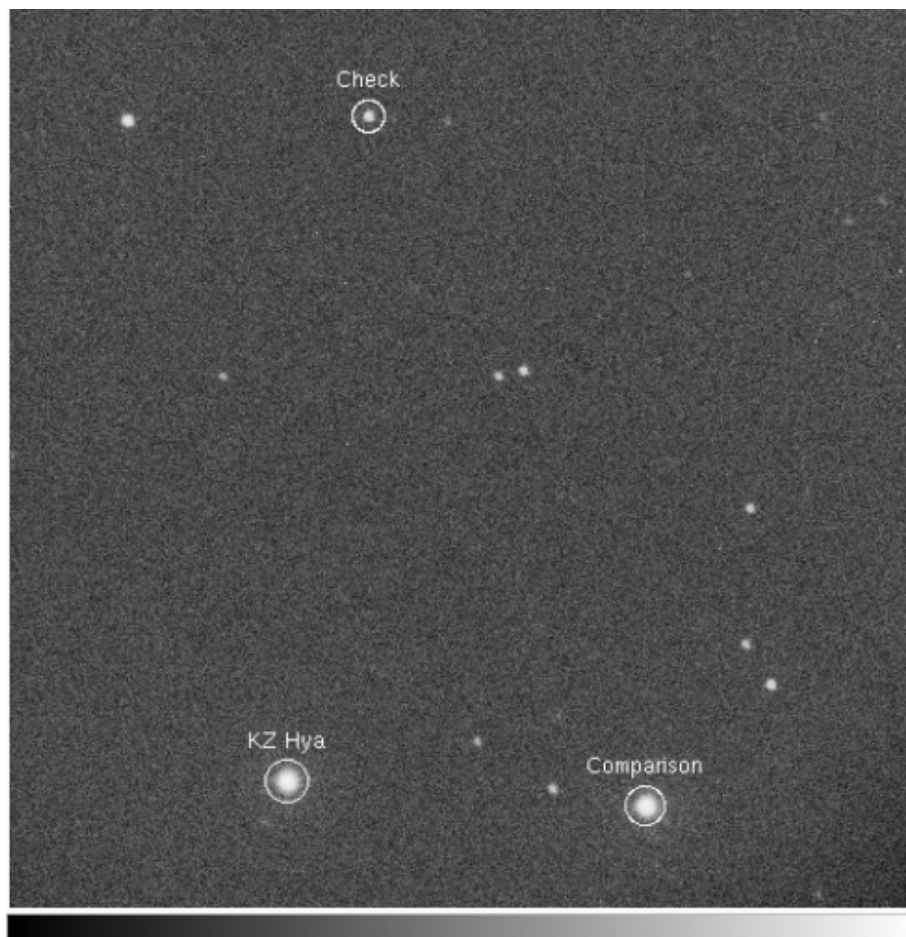


Figura B.3

CJH-2453800(t)	ΔV	ΔV_{chk}	CJH-2453800(t)	ΔR	ΔR_{chk}
3,1620	0,068	4,434	3,1679	0,260	2,789
3,1643	0,029	4,445	3,1702	0,185	2,802
3,1667	-0,011	4,287	3,1725	-0,010	2,789
3,1691	-0,100	4,437	3,1749	-0,147	2,809
3,1714	-0,310	4,468	3,1772	-0,152	2,809
3,1737	-0,641	4,501	3,1796	-0,110	2,789
3,1761	-0,736	4,457	3,1820	-0,044	2,803
3,1784	-0,698	4,378	3,1866	0,075	2,805
3,1808	-0,588	4,462	3,1890	0,122	2,793
3,1831	-0,499	4,326	3,1914	0,151	2,793
3,1855	-0,390	4,431	3,1938	0,177	2,782
3,1878	-0,297	4,522	3,1962	0,211	2,795
3,1902	-0,230	4,258	3,1986	0,235	2,796
3,1926	-0,177	4,389	3,2011	0,253	2,788
3,1950	-0,129	4,449	3,2035	0,277	2,796
3,1974	-0,072	4,394	3,2059	0,288	2,783
3,1998	-0,036	4,362	3,2083	0,296	2,796
3,2023	-0,001	4,394	3,2108	0,302	2,791
3,2047	0,016	4,363	3,2132	0,292	2,806
3,2071	0,024	4,439	3,2157	0,285	2,779
3,2096	0,036	4,078	3,2181	0,298	2,779
3,2120	0,020	4,377	3,2206	0,312	2,787
3,2145	0,001	4,360	3,2231	0,313	2,804
3,2169	0,001	4,325	3,2255	0,281	2,796
3,2194	0,005	4,355	3,2280	0,239	2,795
3,2219	0,041	4,474	3,2306	0,115	2,792
3,2243	0,009	4,369	3,2330	-0,111	2,788
3,2267	-0,043	4,330	3,2354	-0,165	2,793
3,2293	-0,183	4,321	3,2378	-0,152	2,781
3,2318	-0,508	4,370	3,2403	-0,088	2,787
3,2342	-0,757	4,423	3,2428	-0,014	2,780
3,2366	-0,762	4,373	3,2452	0,044	2,766
3,2390	-0,691	4,427	3,2476	0,100	2,806
3,2415	-0,591	4,483	3,2500	0,119	2,791
3,2440	-0,445	4,452	3,2524	0,140	2,797
3,2463	-0,295	4,262	3,2548	0,190	2,825

B.3.8 Trânsito Planetário (IOAA 2008)

Hoje em dia conhecemos mais de 250 estrelas orbitadas por planetas extrasolares. Até o momento, métodos indiretos são os meios mais eficientes para detectar e caracterizar tais planetas. O método do trânsito fotométrico, por exemplo, permite detectar planetas extrasolares quando os mesmos estão alinhados à sua estrela e ao observador. Com isso, podemos inferir informações sobre características orbitais do planeta a partir da curva de luz da estrela.

Assumindo órbitas planetárias circulares, a geometria de um trânsito pode ser descrita, de forma simples, pela figura B.4.

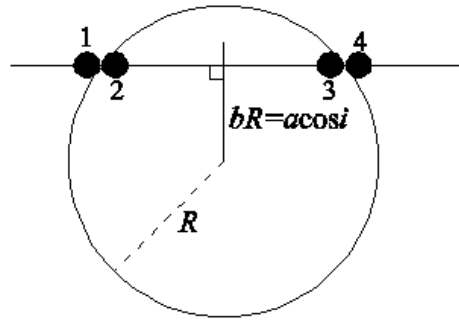


Figura B.4

Na figura, b é o chamado *parâmetro de impacto*: uma grandeza adimensional que consiste na menor distância do centro do planeta à estrela, projetada no equador da mesma. Quanto aos outros parâmetros, R é o raio da estrela, a é o raio orbital e i é a inclinação orbital. A duração total do trânsito é expressa por:

$$d \approx \frac{P \cdot R}{\pi a} \sqrt{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{a}{R} \cos i\right)^2}$$

onde r é o raio do planeta e P é seu período orbital. Além disso, a duração de ingresso/egresso no trânsito, t , pode ser determinada pela fórmula:

$$t \approx d \frac{r}{R} \sqrt{1 - b^2}$$

Note que estamos desprezando, em todos os cálculos, os efeitos de escurecimento de limbo.

Um dos primeiros planetas detectados pelo método fotométrico foi o que orbita a estrela HD 209458. Observações usando um telescópio de 14" fornecem a seguinte curva de luz para o sistema:

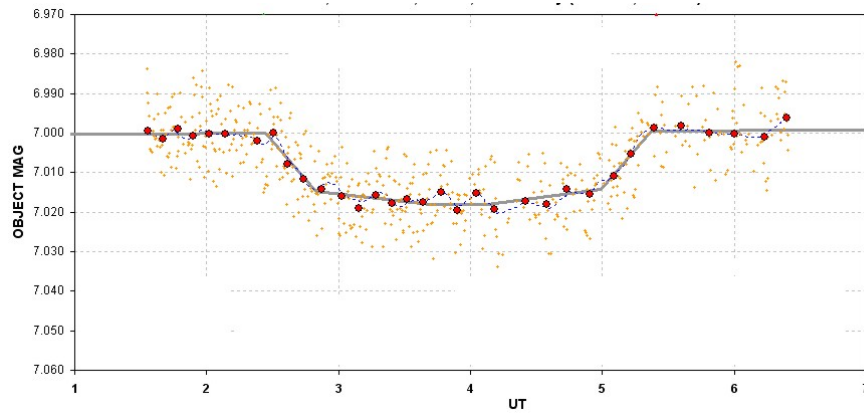


Figura B.5: Curva de luz de HD 209458. Círculos vermelhos são medianas dos pontos amarelos, que são observações instantâneas da estrela. A linha sólida representa um ajuste manual a partir dos pontos círculos vermelhos. UT foi medido em horas.

Suponha que, a partir de outro método, tenhamos deduzido as seguintes características da estrela: $R = 0.91R_{\odot}$ e $M = 0.92M_{\odot}$. Suponha também que a massa do planeta é muito menor que a da estrela.

- Estime a duração total do trânsito, bem como a duração de ingresso/egresso e a profundidade do trânsito.
- Calcule o raio orbital a do planeta.
- Calcule a inclinação i da órbita.
- Calcule o período orbital P do planeta.
- Calcule o raio r do planeta.

B.3.9 Idade de um Meteorito (IOAA 2008)

A equação básica do decaimento radioativo pode ser expressa como:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

onde $N(t)$ e N_0 são, respectivamente, o número de átomos restantes de certo isótopo radioativo no instante t , e o seu número inicial quando $t = 0$. Já λ é a constante de decaimento. O decaimento dos isótopos-pais geram núclídeos-filhos $D(t)$, ou radiogênicos, o que é definido como $D(t) = N_0 - N(t)$.

Baseando-se nessas ideias, um grupo de astrônomos investiga algumas amostras de meteoritos para, usando métodos radioativos, determinar suas idades. Eles possuem dois tipos de amostra: condritos allende (A) e acondritos basálticos (B). A partir das amostras, eles determinam a abundância de ^{87}Rb e ^{87}Sr , assumindo que o último é produzido inteiramente pelo decaimento do primeiro. Para esse decaimento, o valor de λ é de 1.42×10^{-11} por ano. Além disso, mede-se também a abundância do elemento não-radiogênico ^{86}Sr . A tabela abaixo resume os resultados das medidas, expressas em ppm (partes por milhão).

#	tipo	^{86}Sr	^{87}Rb	^{87}Sr
1	A	29.6	0.3	20.7
2	B	58.7	68.5	44.7
3	B	74.2	14.4	52.9
4	A	40.2	7.0	28.6
5	A	19.7	0.4	13.8
6	B	37.9	31.6	28.4
7	A	33.4	4.0	23.6
8	B	29.8	105.0	26.4
9	A	9.8	0.8	6.9
10	B	18.5	44.0	15.4

- Expresse o tempo t em função de $\frac{D(t)}{N(t)}$
- Determine a meia vida $t_{1/2}$, isto é, o tempo de decaimento necessário para se obter metade da quantidade de isótopos-pai.
- Conhecer a razão entre densidade de dois isótopos é mais valioso que conhecer apenas a abundância absoluta de cada um. É muito provável que, na amostra inicial do asteróide, já havia estrôncio presente. Usando $\left(\frac{^{87}\text{Rb}}{^{86}\text{Sr}}\right)$ como variável independente e $\left(\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}\right)$ como variável dependente, crie um modelo de regressão linear simples para representar os dados.
- Plote $\left(\frac{^{87}\text{Rb}}{^{86}\text{Sr}}\right) \times \left(\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}\right)$, bem como a linha de regressão (isócrona) para cada um dos tipos de meteorito. Use no mínimo sete casas decimais para os cálculos intermediários.
- Com isso tudo, ajude o astrônomo a determinar a idade de cada tipo de meteorito, bem como seu erro. Qual dos tipos é mais antigo?
- Determine o valor inicial de $\left(\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}\right)_0$ para cada um dos tipos de meteorito, bem como o erro desta medida.

Glossário:

Uma regressão linear simples é um ajuste de função do tipo $y = ax + b$ para plotar uma série de dados (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, cujos parâmetros são dados por:

$$\begin{aligned} b &= \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \\ a &= \bar{y} - b\bar{x} \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \\ S_{yy} &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \\ S_{xy} &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

e o desvio padrão de cada parâmetro pode ser calculado por:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sqrt{\frac{S_{yy} - \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}}{S_{xx}(n-2)}} \times \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sigma_b &= \sqrt{\frac{S_{yy} - \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}}{S_{xx}(n-2)}} \end{aligned}$$

B.3.10 Fotometria de Asteróides (IOAA 2012)

Alguns fatos sobre a fotometria de asteróides:

- Asteróides são pequenos objetos de formato irregular que orbitam o Sol em órbitas aproximadamente elípticas.
- Seu brilho observado na Terra em um dado instante depende da área da superfície iluminada pelo Sol e da parte do asteróide que é visível para o observador. Ambas variam conforme o asteróide se move.
- O modo como a luz do Sol é refletida pela superfície do asteróide depende da textura da superfície e do ângulo entre o Sol, o asteróide e o observador (ângulo de fase), o qual varia conforme a Terra e o asteróide se movem ao longo de suas órbitas. Em particular, asteróides cuja superfície é coberta por uma fina camada de poeira (chamada regolito) apresentam um aumento repentino em seu brilho para ângulos de fase próximos de zero (isto é, quando eles estão próximos da oposição).
- Uma vez que o fluxo observado de qualquer fonte diminui com o quadrado da distância, a magnitude observada de um asteróide também depende da sua distância ao Sol e ao observador no momento da observação. Sua magnitude aparente m fora da atmosfera é

$$m(t) = m_r(t) + 5 \log RD$$

onde m_r é geralmente chamada de *magnitude reduzida* (isto é, a magnitude que o asteróide teria se suas distâncias ao Sol e à Terra fossem ambas reduzidas a 1 UA) e depende apenas da área superficial iluminada visível e dos efeitos do ângulo de fase. R e D são as distâncias heliocêntrica e geocêntrica, respectivamente.

Considere agora o seguinte cenário. As curvas de luz de um dado asteróide são obtidas em três diferentes noites em diferentes pontos da órbita, e em cada ocasião uma estrela padrão fotométrico também é observada no referencial do asteróide. A Tabela B.1 mostra a configuração geométrica do asteróide em cada noite (ângulo de fase φ , em graus, R e D em UA), e a magnitude calibrada da estrela padrão fotométrico que foi observada juntamente com o asteróide. Considere a magnitude calibrada como a magnitude aparente final após todos os efeitos terem sido levados em consideração.

As Tabelas B.2b, B.2b e B.2c contêm, para cada noite, o intervalo de tempo de cada observação em relação à primeira (em horas), a massa de ar, a magnitude instrumental do asteróide e a magnitude instrumental da estrela.

A massa de ar é a espessura adimensional da atmosfera ao longo da linha de visada, e é igual a 1 quando olhamos para o zênite.

- Faça um gráfico da magnitude da estrela x massa de ar para cada conjunto de dados.
- Calcule o coeficiente de extinção para cada noite.
- As observações foram afetadas por nuvens em alguma noite? Expresse sua resposta como: (a) Noite A, (b) Noite B, (c) Noite C, (d) Nenhuma noite.
- Faça um gráfico da magnitude calibrada *versus* tempo, para cada conjunto de observações do asteróide.
- Determine o período de rotação para cada noite. Considere que a curva de luz para este asteróide tem dois mínimos e dois máximos, e que o semi-período é a média dos intervalos entre os dois máximos e os dois mínimos.

- (f) Determine a amplitude (diferença entre o mínimo e o máximo) da curva de luz para cada noite.
- (g) Faça um gráfico da magnitude reduzida calibrada m_r versus o ângulo de fase (utilize o valor médio de cada curva de luz).
- (h) Calcule o coeficiente angular da curva de fase (o gráfico da magnitude reduzida calibrada versus o ângulo de fase) considerando somente os pontos que não correspondem à oposição (veja o terceiro item dos fatos sobre fotometria de asteróides acima).
- (i) Há alguma razão para assumir uma superfície coberta por poeira fina (regolito)? Responda sim (YES) ou não (NO).

Glossário A magnitude fora da atmosfera é dada por $M = m - A \cdot X + B$, onde A é o coeficiente de extinção, B o coeficiente de ponto zero da noite, X é a massa de ar da observação e m a magnitude instrumental (isto é, a magnitude obtida diretamente da imagem).

Se uma estrela padrão está no mesmo campo do objeto, a magnitude calibrada do objeto pode ser obtida por $M_{ast} = m_{ast} - m_{star} + M_{star}$

Noite	D	R	φ	M_{star}
A	0.36	1.35	0.0	8.2
B	1.15	2.13	8.6	8.0
C	2.70	1.89	15.6	8.1

Tabela B.1

Δt	mas.ar	m_{ast}	m_{star}
0.00	1.28	7.44	8.67
0.44	1.18	7.38	8.62
0.89	1.11	7.34	8.59
1.33	1.06	7.28	8.58
1.77	1.02	7.32	8.58
2.21	1.00	7.33	8.56
2.66	1.00	7.33	8.56
3.10	1.01	7.30	8.56
3.54	1.03	7.27	8.58
3.99	1.07	7.27	8.58
4.43	1.13	7.31	8.61
4.87	1.21	7.37	8.63
5.31	1.32	7.42	8.67
5.76	1.48	7.49	8.73
6.20	1.71	7.59	8.81
6.64	2.06	7.69	8.92
7.09	2.62	7.87	9.14
7.53	3.67	8.21	9.49

(a) Noite A

Δt	mas.ar	m_{ast}	m_{star}
0.00	1.28	13.24	8.38
0.44	1.18	13.21	8.36
0.89	1.11	13.13	8.34
1.33	1.06	13.11	8.33
1.77	1.02	13.11	8.32
2.21	1.00	13.15	8.32
2.66	1.00	13.17	8.32
3.10	1.01	13.17	8.32
3.54	1.03	13.13	8.33
3.99	1.07	13.15	8.34
4.43	1.13	13.14	8.34
4.87	1.21	13.14	8.37
5.31	1.32	13.21	8.38
5.76	1.48	13.30	8.43
6.20	1.71	13.34	8.47
6.64	2.06	13.39	8.54
7.09	2.62	13.44	8.65
7.53	3.67	13.67	8.87

(b) Noite B

Δt	mas.ar	m_{ast}	m_{star}
0.00	1.28	11.64	8.58
0.44	1.18	11.53	8.54
0.89	1.11	11.56	8.60
1.33	1.06	11.49	8.52
1.77	1.02	11.58	8.48
2.21	1.00	11.79	8.63
2.66	1.00	11.67	8.53
3.10	1.01	11.53	8.46
3.54	1.03	11.47	8.48
3.99	1.07	11.63	8.67
4.43	1.13	11.51	8.51
4.87	1.21	11.65	8.55
5.31	1.32	11.77	8.61
5.76	1.48	11.88	8.75
6.20	1.71	11.86	8.78
6.64	2.06	12.03	9.03
7.09	2.62	12.14	9.19
7.53	3.67	12.63	9.65

(c) Noite C

B.4 Cosmologia

B.4.1 Aglomerado de Virgem (IOAA 2008)

O *Aglomerado de Galáxias de Virgem* (AGV) é o mais perto dos grandes aglomerados galácticos, expandindo-se por cerca de 10 graus no céu e contendo diversas galáxias particularmente brilhantes. É interessante estimar a distância até ele e, com isso, deduzir informações cosmológicas relevantes. A tabela abaixo fornece estimativas de distância usando diversos indicadores, listados na coluna da esquerda. A coluna da direita lista as distâncias médias d_i junto com seus desvios-padrão s_i .

i	indicador de distância	distância ao AVG (Mpc)
1	Cefeidas	$14,9 \pm 1,2$
2	Novas	$21,1 \pm 3,9$
3	Nebulosas Planetárias	$15,2 \pm 1,1$
4	Aglomerados Globulares	$18,8 \pm 3,8$
5	Flutuações Superficiais de Brilho	$15,9 \pm 0,9$
6	Relação Tully-Fisher	$15,8 \pm 1,5$
7	Relação Faber-Jackson	$16,8 \pm 2,4$
8	Supernovas Ia	$19,4 \pm 5,0$

- (a) Aplicando uma média ponderada, compute a distância média (que pode ser tomada como estimativa da distância real do AGV)

$$d_m = \frac{\sum_i d_i / s_i^2}{\sum_i 1 / s_i^2}$$

some cujo índice percorre os oito indicadores de distância utilizados.

- (b) Qual é a incerteza (rms) dessa estimativa, em unidades de Mpc?
- (c) Espectros das galáxias do Aglomerado indicam uma velocidade de recessão média de 1136 km/s. Usando este fato, estime o valor da Constante de Hubble H_0 e sua incerteza (rms).
- (d) Qual é o valor do Tempo de Hubble (idade do universo) calculado a partir da Constante de Hubble que você encontrou no item anterior? Qual sua incerteza?

B.5 Instrumentos

B.5.1 Antenas do GRMT (IAO 2006)

Em anexo há uma tabela com as coordenadas das antenas do *Giant Metrewave Radio Telescope* (GMRT), em função das coordenadas da antena central A14. A latitude e a longitude de A14 são, respectivamente, $\phi = 19^\circ 05' 36''$ e $\lambda = 74^\circ 03' 01''$.

- (a) Prepare um mapa do sistema de antenas do GMRT. Desenhe no centro do mapa o quadrado central (a área de $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ que você viu durante a visita ao GMRT), colocando a antena central em sua origem e plotando as posições de todas as antenas externas ao quadrado central. Escreva, próximo à respectiva posição no papel, o número de cada uma das antenas. Não marque nenhuma antena interna ao quadrado principal.
- (b) Feixes de ondas de rádio paralelas vêm de objetos distantes e incidem diretamente nas antenas do GMRT. O sinal atinge antenas diferentes em intervalos de tempo ligeiramente diferentes – o que depende da inclinação da fonte com relação às antenas. Suponhamos que A01, A10, A14 e A30, listadas a seguir, estejam observando o Sol em 23 de Setembro ao meio-dia. Calcule o atraso na chegada do sinal entre A01 e a antena mais afastada desta. Assuma a Terra como plana.

# antena	x p/ oeste (m)	y p/ norte (m)	z p/ zênite (m)
A01	-11245,6	9405,97	-802,858
A02	-8103,19	8241,44	-711,116
A03	-7039,01	5340,29	-411,950
A04	12073,2	4791,68	-389,911
A05	10199,8	3529,75	-324,311
A06	7780,52	3071,49	-266,059
A07	-5199,93	3054,46	-242,446
A08	4575,99	2047,70	-203,543
A09	-3099,40	1496,91	-90,1932
A10	2814,54	1012,49	-73,9663
A11	-1591,91	625,657	-15,1934
A12	-565,940	132,944	-9,99081
A13	-372,720	142,908	-7,13641
A14	0,00000	0,00000	0,00000
A15	67,8200	-257,968	22,0312
A16	31,4400	-230,489	24,4676
A17	326,430	-39,7862	32,7314
A18	687,870	-18,0767	37,1877
A19	280,670	-419,343	38,2252
A20	41,9400	-156,320	40,3858
A21	-164,860	-615,653	51,1638
A22	174,850	-666,922	53,1313
A23	-603,940	-333,732	56,0502
A24	-474,670	-658,940	70,3163
A25	-639,500	-1171,08	119,326
A26	633,920	-2948,73	258,251
A27	-367,080	-4503,71	371,735
A28	333,120	-6742,06	581,014
A29	947,470	-9458,39	782,898
A30	-369,050	-14097,4	1202,39

B.5.2 Monitoramento de uma Estrela (IAO 2006)

Uma estrela brilhante foi monitorada em Mumbai durante uma noite inteira, com um telescópio de 14", em 3 bandas: B,V e R. Suponha que os comprimentos de onda observados podem ser aproximados por λ efetivos de 450 nm, 550 nm e 700 nm para a estrela observada. À medida que a noite passa, a estrela é vista sob diferentes ângulos zenitais (z) e, como consequência, a luz da estrela passa por diferentes espessuras da atmosfera terrestre. Assim, a extinção atmosférica varia, sendo mínima no zênite e máxima quando a estrela está nascendo ou se pondo. Uma amostra dos dados é dada na tabela a seguir. A segunda coluna da tabela mostra a massa de ar normalizada da atmosfera, sendo 1 a massa de ar para um ângulo zenital zero. Magnitudes estão corretas até 0^m,05.

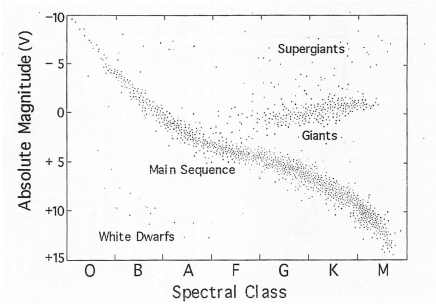
- Faça um gráfico apropriado e encontre a magnitude aparente da estrela nos três comprimentos de onda, na ausência de atmosfera terrestre.
- O satélite Hipparcos mediu uma paralaxe de 0,0076" para essa estrela. Marque a posição da estrela no diagrama HR dado.
- O índice de cor pode ser calibrado em termos da temperatura estelar. Um ajuste empírico, para a região do diagrama HR em que a estrela se encontra, é dado por

$$B - V = -3,68 \log T + 14,55$$

onde T é a temperatura absoluta. Estime a temperatura da estrela.

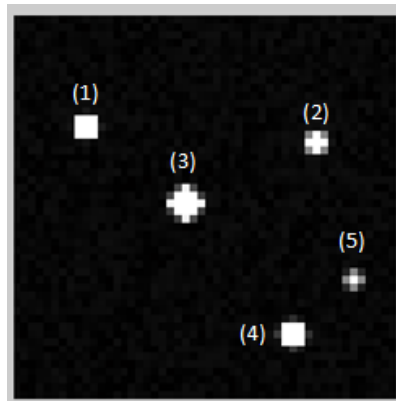
- Se essa estrela estivesse na constelação de Órion, qual seria a candidata mais provável, dentre as quatro estrelas mais brilhantes da constelação? Escreva o nome da estrela (ex.: α *Ursae Minoris* ou *Polaris*).
- Em Mumbai, suponha que a extinção varie com o comprimento de onda na proporção $e \propto \lambda^{1-\alpha}$. A partir dos dados, estime α .

$z(^{\circ})$	massa de ar	mag B	mag V	mag R
15	1,035	2,80	0,85	-1,00
30	1,154	2,85	70,85	-1,00
45	1,412	3,00	0,95	-0,90
60	1,991	3,20	1,10	-0,85
69	2,762	3,50	1,30	-0,75
75	3,785	3,90	1,55	-0,55
81	6,053	4,90	2,15	-0,25



B.5.3 Imagem de CCD (IOAA 2009)

A tabela a seguir contém os valores para cada pixel de uma imagem. Essa imagem, que é parte de uma imagem de CCD maior, foi feita com uma pequena câmera com CCD, instalada em um telescópio amador e usando um filtro na banda V. A figura abaixo mostra uma imagem de 50×50 pixels que contém 5 estrelas.



Na Grande Tabela, a primeira linha e a primeira coluna indicam as coordenadas x e y dos pixels. A seguir, as especificações do telescópio e da imagem com ele obtida.

Distância focal do telescópio	1,20 m
Tamanho do pixel do CCD	$25 \times 25 \mu\text{m}$
Tempo de exposição	450 s
Distância zenital do telescópio	25°
Coeficiente de extinção médio na Banda V	0,3 mag/massa-de-ar

O observador identificou as estrelas 1, 3 e 4 comparando a imagem com um catálogo padrão de estrelas. A Pequena Tabela a seguir mostra a magnitude verdadeira das estrelas (m_t), como dada pelo catálogo.

estrela	m_t
1	9.03
3	6.22
4	8.02

- (a) Usando os dados disponíveis, determine a magnitude instrumental das estrelas na imagem. Assuma que a corrente escura é desprezível e que a imagem já foi calibrada em *flat field*. Para efeito de simplicidade, você pode usar uma abertura quadrada.

Dica: A magnitude instrumental é calculada a partir da diferença entre o fluxo total da estrela e o fluxo de uma área equivalente do céu escuro.

- (b) A magnitude instrumental de uma estrela em uma imagem de CCD está relacionada à magnitude verdadeira como

$$m_I = m_t + KX - Z_{mag}$$

onde K é o coeficiente de extinção, X é a massa de ar, m_I e m_t são, respectivamente, as magnitudes instrumental e verdadeira da estrela, e Z_{mag} é a constante de ponto zero. Calcule a constante de ponto zero (Z_{mag}) para as estrelas identificadas acima. Calcule o valor médio da constante de ponto zero ($\bar{Z}_{mag}$).

Dica: A constante de ponto zero é a constante que transforma magnitudes livres de extinção em magnitudes verdadeiras.

- (c) Calcule as magnitudes verdadeiras das estrelas 2 e 5.
- (d) Calcule a escala dos píxeis do CCD em unidades de segundos de arco.
- (e) Calcule a brilho médio do céu, em magnitude por segundo de arco quadrado.
- (f) Use um gráfico apropriado para estimar o *seeing* astronômico, em segundos de arco.

Plots	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50					
1	2	4	4	5	6	6	0	9	0	5	3	1	1	4	5	2	5	5	3	8	5	6	3	1	9	6	7	3	1	7	8	3	2	6	6	6	6	6	2	10	4	10	2	9	3	2	9	2	2	5	1				
2	10	1	6	8	10	0	6	4	7	1	9	2	3	8	3	4	8	8	2	9	5	9	7	0	9	6	1	3	10	2	6	8	5	3	0	4	1	3	7	5	1	1	1	1	3	4	0	6							
3	7	6	6	4	6	5	2	10	4	3	2	2	7	1	6	4	9	3	6	3	7	3	1	6	4	3	4	3	3	3	1	0	5	5	9	10	7	2	9	10	7	3	9	3	9	2	3	9	8						
4	5	7	6	2	8	1	3	4	4	4	3	5	6	8	2	8	9	2	6	3	1	9	3	8	6	1	0	0	6	8	5	1	8	4	8	9	7	0	9	1	4	9	9	1	3	9	1	4	8						
5	7	1	0	9	2	5	8	5	2	5	8	3	1	6	2	9	6	7	4	9	3	8	7	6	3	2	7	4	5	2	9	5	8	5	5	1	7	1	7	1	0	9	9	1	3	9	1	4	8						
6	2	1	0	9	1	2	8	2	8	7	0	9	0	9	1	1	0	7	3	2	4	9	7	6	8	1	4	9	9	7	8	4	3	8	7	6	3	9	2	9	2	4	6	3	8	5	8	1	5	7					
7	10	2	6	4	0	9	10	8	7	0	9	0	9	1	1	0	7	3	2	4	9	7	6	8	1	4	9	9	7	8	4	3	8	7	6	3	9	2	9	2	4	6	3	8	5	8	1	5	7						
8	3	7	1	4	5	2	5	8	1	7	6	8	10	5	9	2	5	7	8	1	2	4	4	4	8	1	3	0	10	2	8	3	2	7	7	10	1	8	6	3	1	5	2	2	9	4	1								
9	10	6	7	4	9	7	3	1	9	7	5	7	3	1	3	6	8	1	3	6	4	9	4	9	1	9	1	4	4	8	3	2	7	7	3	1	2	9	3	1	6	3	5	0	5	2	7								
10	8	2	8	7	8	2	0	9	4	2	7	7	4	8	0	9	2	6	7	0	3	7	7	0	2	3	6	1	8	5	3	4	7	5	2	3	6	9	4	6	4	2	8	0	3	2	3	1	4						
11	6	5	1	10	4	7	5	8	0	9	3	4	7	3	9	8	5	1	1	2	1	9	8	1	0	2	2	7	4	3	0	5	6	5	4	7	5	2	3	6	9	4	5	4	4	6	10								
12	8	5	10	8	1	3	2	6	4	1	10	13	7	4	8	5	1	8	4	0	5	6	4	7	3	6	9	5	2	2	1	10	2	6	4	2	1	8	3	2	5	3	6	10	4	7	3	6	4						
13	3	6	7	6	4	4	1	12	13	7	4	4	8	5	2	3	7	4	9	3	6	6	3	9	6	3	9	7	8	5	0	2	5	10	8	4	8	6	10	5	10	1	6	7	4	5	7	6							
14	2	2	2	10	4	10	0	9	202	798	206	5	1	1	7	5	1	7	2	1	1	5	6	3	2	7	10	8	5	5	1	2	3	4	3	1	5	5	0	6	8	3	5	0	6	1	5	8	3						
15	1	8	5	6	6	1	6	14	803	3399	804	18	5	9	4	6	3	6	3	6	1	3	2	2	7	10	8	5	5	1	2	3	4	3	1	5	4	12	6	1	5	2	5	1	5	8	5	3							
16	6	3	10	8	6	8	3	5	204	798	206	6	4	9	5	8	0	10	5	7	2	8	2	8	2	1	4	8	4	9	4	2	7	8	9	6	7	6	3	7	6	5	3	7	6	1	8	3	9						
17	7	1	10	3	2	10	9	4	7	13	8	3	10	5	6	5	3	0	3	7	5	3	6	3	0	2	5	6	2	1	5	10	4	5	10	4	6	1	10	7	8	9	5	3	6	1	6	10	9	2					
18	3	6	8	9	6	1	9	2	3	4	1	6	7	0	10	7	2	3	2	2	3	2	8	4	6	8	7	3	0	6	2	9	0	7	4	3	2	1	8	12	8	2	9	7	3	2	8	7	8						
19	4	5	8	9	5	6	7	8	6	6	2	2	10	2	3	8	4	7	3	9	3	43	565	40	11	10	7	3	8	1	2	4	7	4	5	2	8	10	1	8	0	5	1	9	1	3	5	7	9	1					
20	6	7	5	5	9	6	2	8	9	10	6	5	8	10	2	1	7	9	3	1	3	1	7	9	10	8	4	8	10	7	4	1	3	6	9	9	2	8	9	9	2	8	9	3	2	1	6	10	9	2					
21	1	9	6	4	8	3	5	5	1	8	7	1	8	5	4	0	1	6	2	10	8	2	10	5	10	4	2	8	7	0	4	5	6	2	1	5	1	10	4	6	1	9	10	4	9	1	8	5	3	7	4				
22	4	7	7	2	8	6	7	9	9	1	8	6	9	9	2	8	5	4	4	10	9	8	10	5	10	3	7	0	4	5	6	2	1	9	5	7	6	5	1	9	10	4	9	1	8	5	3	7	8	7	4				
23	4	5	8	9	5	6	7	8	6	6	2	2	10	2	3	8	4	7	3	9	3	43	565	40	11	10	7	3	8	1	2	4	7	4	5	2	8	10	1	8	0	5	1	9	1	3	5	7	9	1					
24	4	7	1	5	2	4	5	9	2	8	2	10	2	3	8	4	4	7	5	8	40	2665	10786	2687	42	4	6	8	10	1	9	7	10	3	1	10	6	2	2	8	6	2	2	9	10	2	3	10	9	6	5	6	1		
25	5	7	4	8	1	7	7	2	4	6	6	3	9	9	1	9	6	1	9	6	185	10785	43705	10780	170	10	6	5	3	9	8	10	4	3	10	10	3	3	10	4	4	5	9	6	9	8	1	1	5	10	3	6			
26	11	5	4	0	3	3	2	6	4	9	1	2	3	0	1	0	9	6	3	1	45	2663	10783	2658	47	10	2	0	4	5	5	4	6	8	5	2	4	5	9	6	9	8	1	1	1	1	5	0							
27	4	6	1	1	7	9	3	1	9	4	8	1	2	10	2	2	8	6	6	8	4	44	564	42	3	3	9	3	9	6	4	7	3	1	7	8	9	4	3	10	6	5	6	0	0	8	6	9	1						
28	1	9	4	1	3	7	6	10	9	9	3	0	4	5	5	4	6	7	5	5	7	2	10	2	6	9	1	5	8	5	9	5	2	2	0	0	1	3	6	2	2	1	1	10	7	7	9	0	2						
29	4	10	2	9	1	5	7	8	5	7	8	2	1	9	9	2	7	10	5	4	3	4	9	6	0	8	3	6	0	3	5	7	0	6	6	0	9	9	9	3	3	3	5	1	1	4	6	6							
30	2	1	8	8	6	4	5	4	3	1	9	2	0	6	3	7	10	5	2	8	2	10	2	5	7	7	9	5	7	8	5	0	6	5	1	5	9	7	7	6	4	6	1	3	8	9	6	3	8	5					
31	3	1	2	5	5	8	4	5	3	1	10	4	0	7	4	3	2	3	9	5	8	3	1	9	5	7	8	7	5	0	8	6	0	1	5	5	6	0	5	9	1	6	2	6	0	3	2	2	4						
32	3	5	4	8	1	3	9	3	5	9	1	9	6	9	8	5	3	6	8	4	4	1	2	2	7	2	2	6	5	1	2	0	9	6	8	5	5	9	0	5	9	7	5	10	2	5	7	1	3	4					
33	3	8	3	6	7	9	3	0	1	3	8	3	3	8	5	1	1	7	9	9	7	5	5	7	5	1	9	7	2	9	4	9	2	6	4	2	2	0	10	3	2	4	1	6	9	4	9	2	3						
34	5	7	0	9	3	5	1	8	0	8	7	6	5	6	1	8	1	4	5	3	5	7	5	10	9	10	8	10	4	1	1	3	8	6	4	5	8	9	4	5	8	9	4	8	9	2	7	3	6	2	0	8			
35	7	6	6	8	9	7	2	8	9	8	5	6	6	8	3	9	6	9	6	2	1	3	3	8	3	8	2	9	7	1	9	2	8	9	5	2	2	0	5	7	3	9	11	95	355	96	7	7	8						
36	1	10	2	8	8	3	0	7	1	5	3	4	2	7	1	0	5	1	5	0	6	1	9	6	0	3	5	4	1	8	1	2	1	5	8	6	5	5	0	2	8	10	10	33	64	25	8	7	0	8					
37	7	9	7	2	5	4	8	0	2	5	3	1	1	3	4	9	0	7	2	5	9	3	6	2	5	3	3	5	8	5	1	2	6	7	10	7	4	6	2	9	6	6	9	11	1	6	2	10	2						
38	6	1	0	6	4	5	7	6	7	7	9	9	9	5																																									

B.5.4 Imagem de CCD (IOAA 2010)

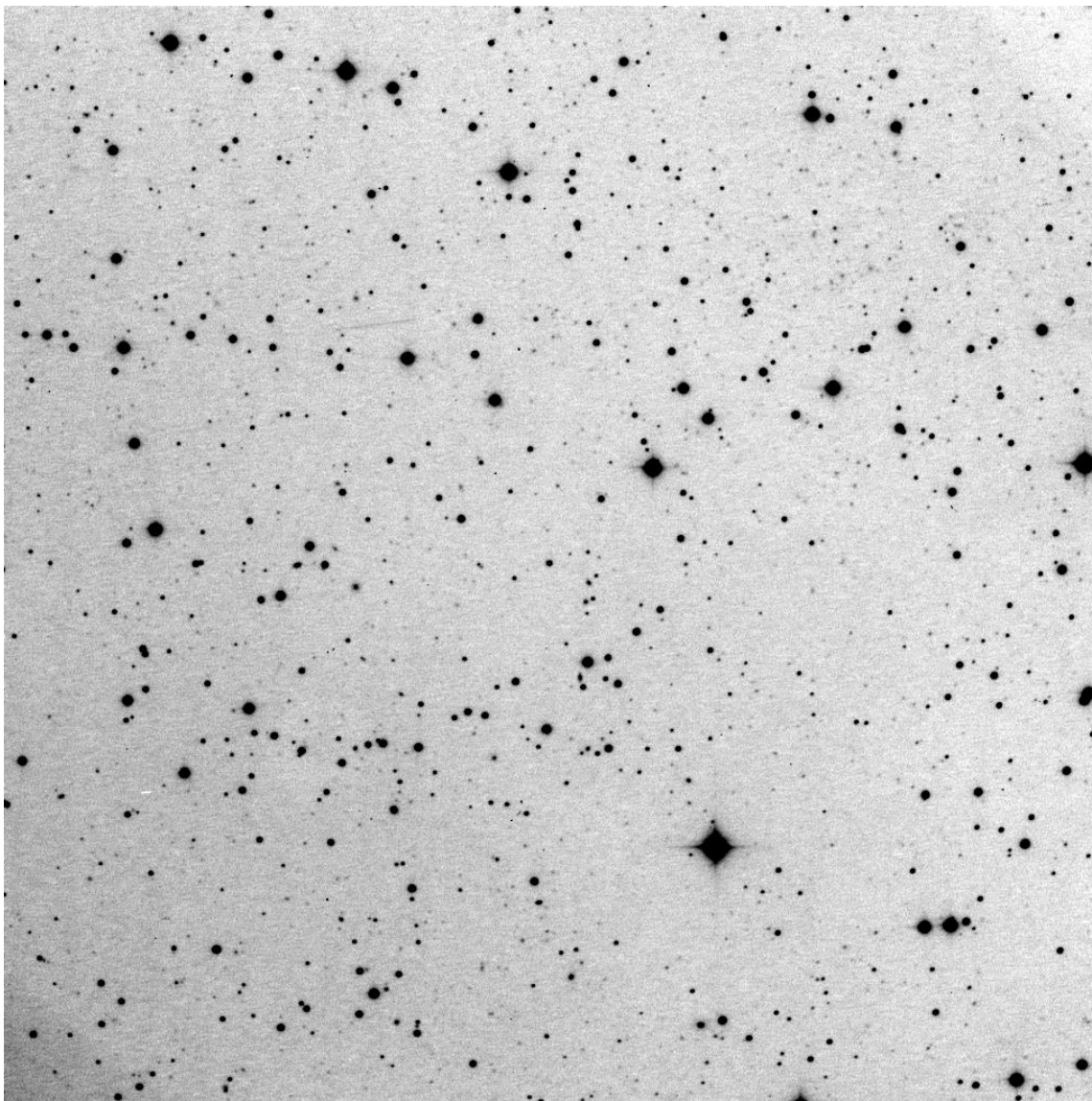
A Figura 1 mostra uma imagem do céu tomada por uma câmera CCD acoplada a um telescópio cujos parâmetros são listados na tabela em anexo (que é parte do cabeçalho da imagem FITS). A Figura 2 é composta de 2 imagens: a da direita (B) é uma ampliação de parte da Figura 1 e a da esquerda (A) é uma imagem ampliada da mesma parte do céu fotografada algum tempo antes. A Figura 3 mostra um mapa do céu que inclui a região mostrada nas imagens CCD.

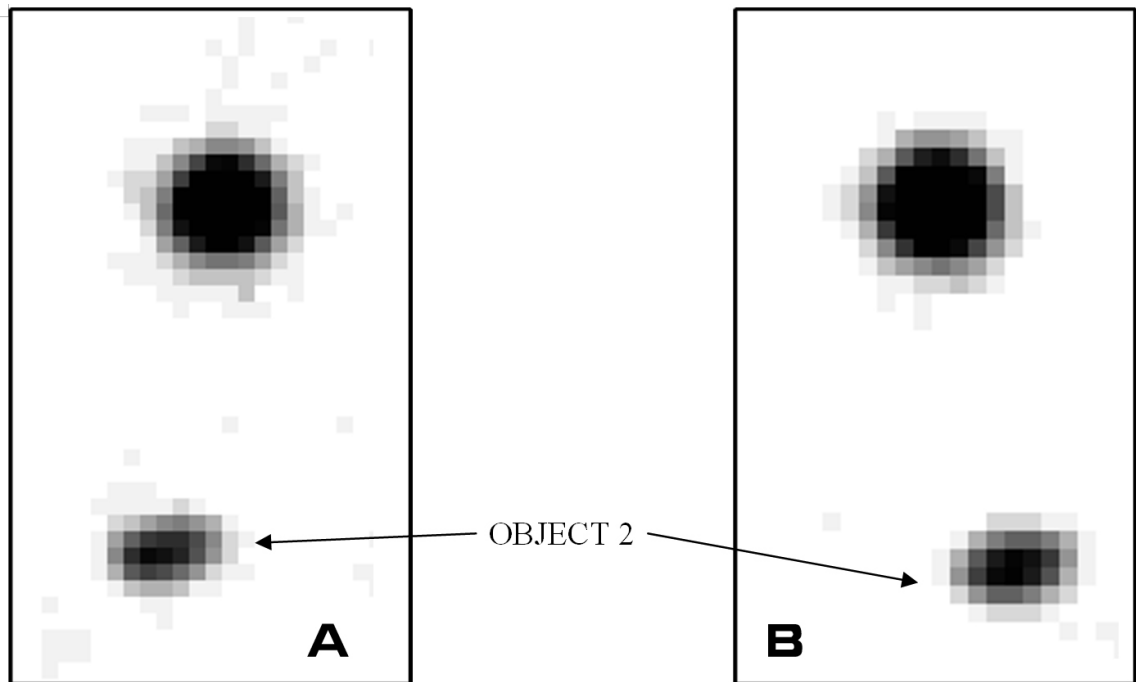
As estrelas nas imagens estão longe e, idealmente, devem ser consideradas como fontes pontuais. Entretanto, a difração da abertura do telescópio e os efeitos de turbulência atmosférica (conhecidos como *seeing*) borram a luz das estrelas. Quanto mais brilhante a estrela, maior é quantidade da luz espalhada que é visível acima do nível de fundo do céu.

- (a) Identifique, marcando com numerais romanos, cinco estrelas brilhantes quaisquer na imagem e no mapa.
- (b) Marque o campo de visão da câmera no mapa.
- (c) Use esta informação para obter as dimensões físicas da placa CCD em mm.
- (d) Estime o tamanho do efeito de espalhamento da luz, em segundos de arco, examinando a imagem da estrela na Figura 2 (note que, devido a variações de contraste necessárias para a impressão, o diâmetro da imagem parece ser 3,5 vezes a largura à meia altura (FWHM) do perfil da estrela).
- (e) Compare o resultado com o tamanho teórico do disco de difração do telescópio.
- (f) Normalmente, um *seeing* de 1 segundo de arco indica boas condições de observação. Calcule o tamanho da imagem da estrela em pixels para um *seeing* atmosférico de 1 segundo de arco e compare-o com o resultado do item d.
- (g) Dois objetos observados movendo-se em relação ao fundo foram marcados na Figura 1. O movimento de um deles ("Objeto 1") foi rápido o bastante para deixar um traço visível na imagem. O movimento do outro ("Objeto 2") é mais facilmente visto na imagem ampliada (Figura 2B), comparada com outra imagem tomada em um tempo anterior (Figura 2A). Usando os resultados acima, determine a velocidade angular no céu de ambos os objetos.
- (h) Escolha, na lista abaixo, quais afirmações são corretas, assumindo que os objetos movem-se em órbitas circulares. Serão dados pontos para cada resposta correta marcada, e serão deduzidos pontos para cada resposta incorretamente selecionada. As causas possíveis para as velocidades angulares serem diferentes são:
 - () diferentes massas dos objetos;
 - () diferentes distâncias à Terra dos objetos;
 - () diferentes velocidades orbitais dos objetos;
 - () diferentes projeções das velocidades dos objetos;
 - () o Objeto 1 orbita a Terra enquanto que o Objeto 2 orbita o Sol.

Para a Figura 1, os dados são:

BITPIX	=	16	/ Número bits por pixel
NAXIS	=	2	/ Número de eixos
NAXIS1	=	1024	/ Largura da imagem (em píxeis)
NAXIS2	=	1024	/ Altura da imagem (em píxeis)
DATE-OBS	=	'2010-09-07 05:00:40.4'	/ Meio da exposição
TIMESYS	=	'UT'	/ Escala de tempo
EXPTIME	=	300.00	/ Tempo de exposição (segundos)
OBJCTRA	=	'22 29 20.031'	/ RA do centro da imagem
OBJCTDEC	=	'+07 20 00.793'	/ DEC do centro da imagem
FOCALLEN	=	'3.180m'	/ Distância focal do telescópio
TELESCOP	=	'0.61m '	/ Abertura do telescópio

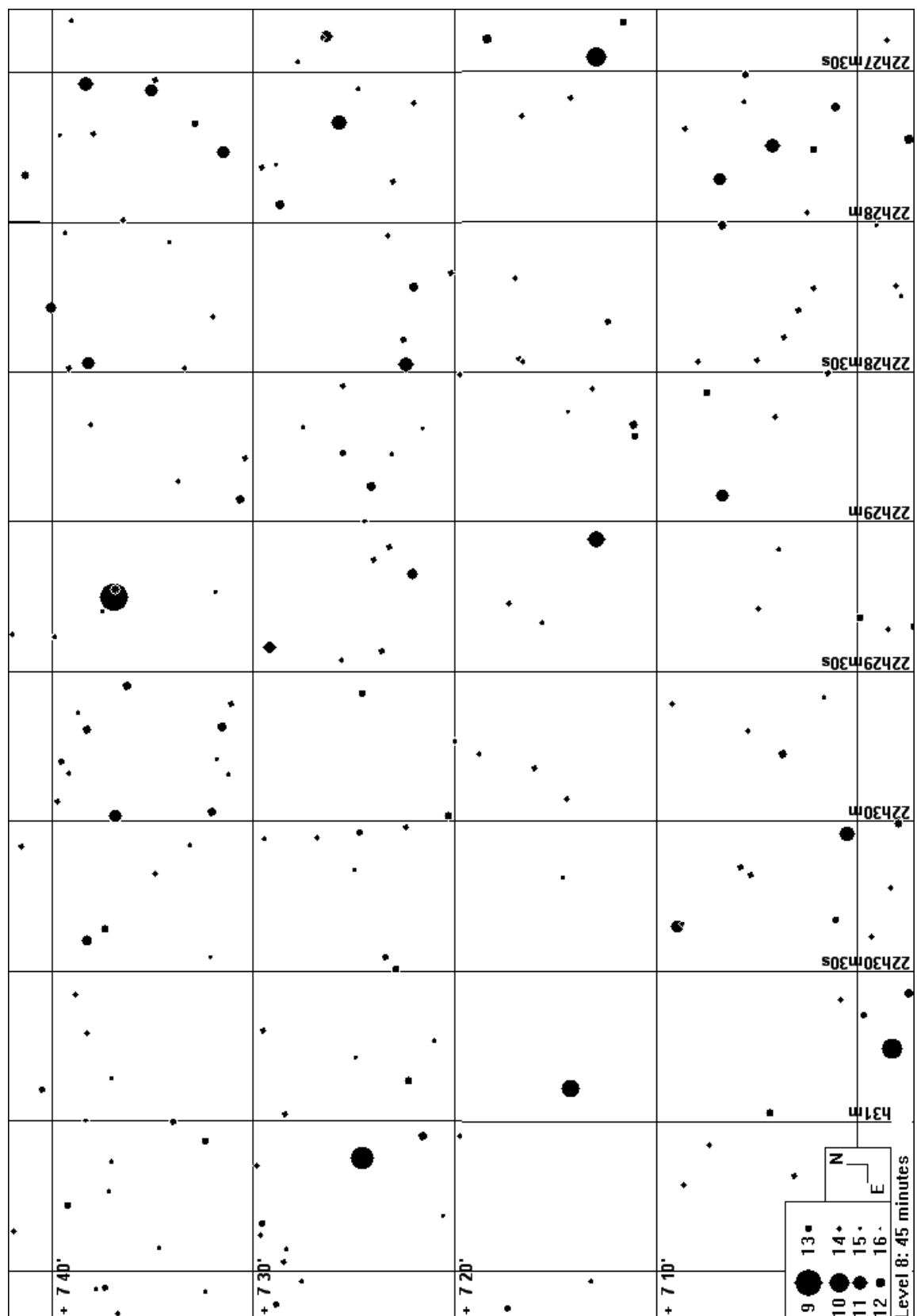




A: Ampliação da área do céu ao redor do Objeto 2, observada em um tempo anterior ao da Figura 1. Para esta imagem, os dados são:

DATE-OBS = '2010-09-07 04:42:33.3' / Meio da exposição

B: Ampliação da Figura 1 ao redor do Objeto 2.



B.5.5 Medindo a Massa de Saturno (IAO 2003)

Desde que Galileu Galilei observou o anel de Saturno através de um telescópio pela primeira vez, este planeta vem sendo considerado um dos principais ícones da astronomia. O anel em si não é um corpo rígido, consistindo de inúmeros fragmentos em órbitas keplerianas em torno do planeta – conforme mostrado, via espectroscopia, simultaneamente por A. Belopolsky e por James E. Keeler. Os resultados deste último foram publicados em 1885, no primeiro número do periódico *The Astrophysical Journal*. Nesse problema você deve reproduzir a argumentação deles usando observações recentes e, com isso, estimar a massa de Saturno.

Saturno foi observado no dia 25.02.2002, às 23:25 UT, pelo *Nordic Optical Telescope* (NOT), um telescópio de 2,5 m em La Palma, Ilhas Canárias. Uma fenda espectroscópica foi posicionada sobre a imagem do planeta, conforme mostra a figura 1. Com isso, mediu-se o espectro solar refletido pelo planeta (figura 2). As linhas retas verticais são telúricas, isto é, linhas de absorção criadas pela passagem de luz através da atmosfera terrestre. As linhas inclinadas, por outro lado, são linhas de absorção solar refletidas no planeta. As duas linhas de absorção mais fortes vistas no espectro provêm do NaI (Sódio neutro), nas transições D2 e D1, com comprimentos de onda de 589,00 nm e 589,59 nm respectivamente.

- (a) O espectro da figura 2 implica que o anel de Saturno não pode ser um corpo rígido em rotação. Faça um desenho que mostre, qualitativamente, como seria o espectro se o anel girasse como um corpo rígido. ^{20%}
- (b) O período de rotação sideral de Saturno é de 10,66 h. Estime o diâmetro equatorial de Saturno usando o espectro fornecido. Considere que o anel de Saturno é plano e paralelo ao equador do planeta. ^{30%}
- (c) Estime a massa de Saturno. Se não lembrar o valor da constante gravitacional, use os dados: $1 \text{ UA} = 1,496 \cdot 10^8 \text{ km}$ e $M_{\text{Sol}} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. ^{50%}

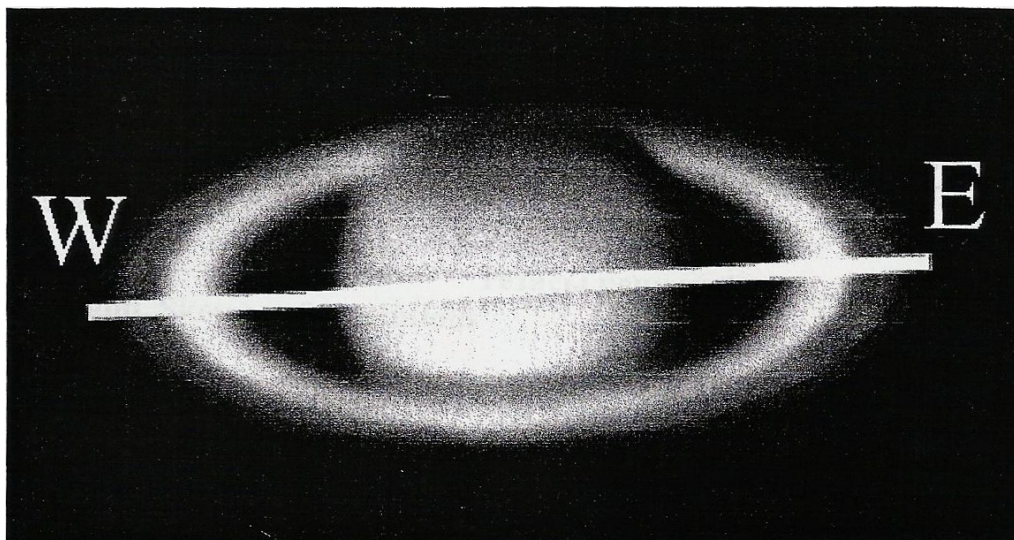


Figura 1

Posição da fenda espectroscópica em Saturno. O Oeste e o Leste estão marcados por W e E respectivamente.

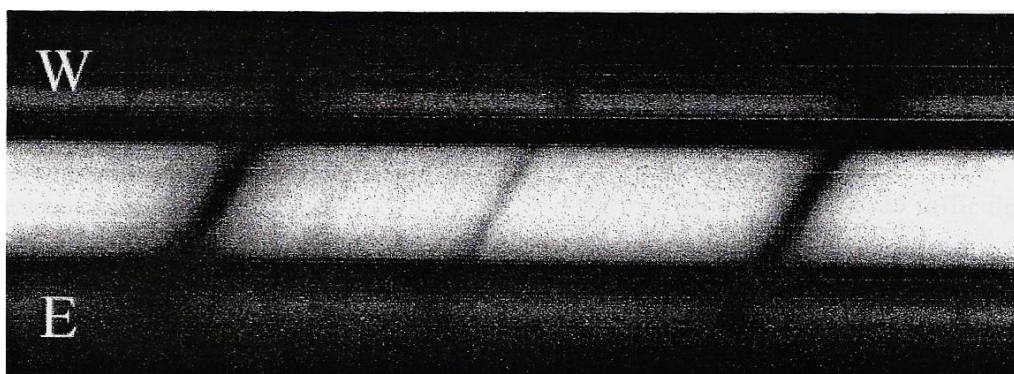


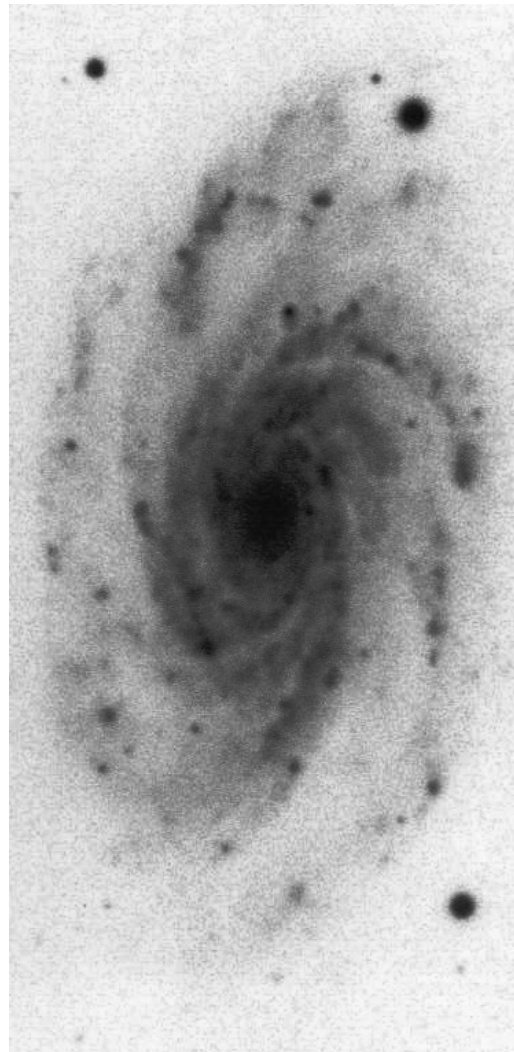
Figura 2

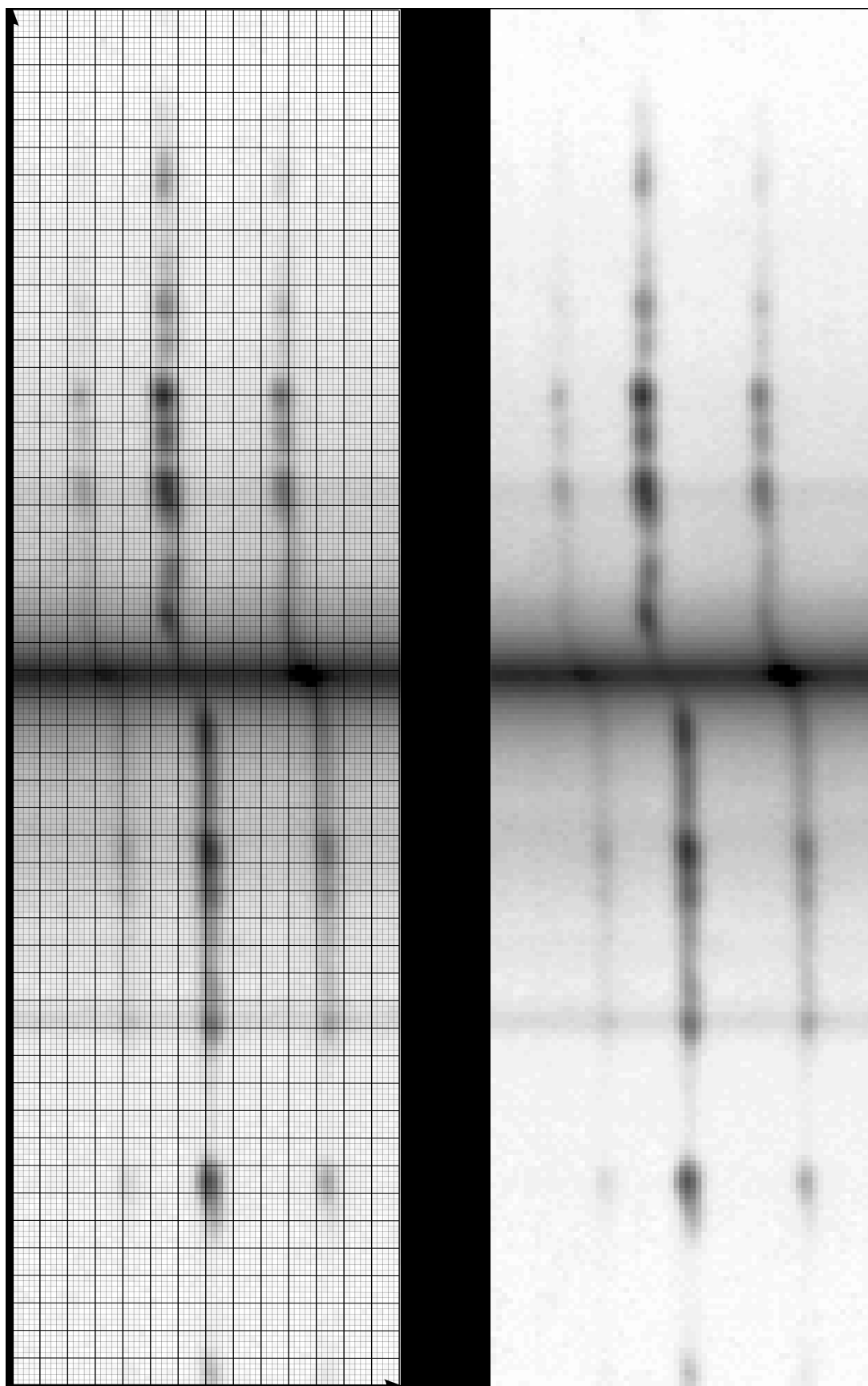
O espectro solar refletido em Saturno. O Oeste está acima, e os comprimentos de onda crescem para a direita.

B.5.6 Pesando uma Galáxia (IOAA 2011)

As imagens anexas mostram uma fotografia da galáxia espiral NGC 7083, que está a uma distância de 40 Mpc, e um fragmento de seu espectro. A fenda do espectrógrafo foi alinhada com o eixo-maior da imagem da galáxia. O eixo x do espectro representa comprimento de onda e o eixo y, a distância angular da região de emissão ao núcleo da galáxia, onde 1 pixel = 0,82 arcsec. Duas linhas brilhantes de emissão são visíveis, com comprimentos de onda de repouso $\lambda_1 = 6564 \text{ \AA}$ e $\lambda_2 = 6584 \text{ \AA}$.

Use o espectro para plotar a curva de rotação da galáxia e estimar a massa do bojo central. Suponha que o bojo central é esférico. A fotografia da galáxia tem as proporções corretas.





Apêndice C

Dados

C.1 Dados do Sistema Solar

C.1.1 Sol

Raio Médio	$6,955 \cdot 10^8 \text{ m}$
Massa	$1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Luminosidade	$3,846 \cdot 10^{26} \text{ W}$
Magnitude Aparente	$-26,74$
Magnitude Absoluta	$4,85$
Temperatura Superficial	5778 K

C.1.2 Planetas Terrestres

	MERCÚRIO	VÊNUS	TERRA	MARTE
Características Físicas				
Raio Médio (km)	2 440	6 052	6 371	3 396
Massa (kg)	$3,3022 \cdot 10^{23}$	$4,8685 \cdot 10^{24}$	$5,9736 \cdot 10^{24}$	$6,4185 \cdot 10^{23}$
Massa (M_T)				
Inclinação Axial	$2,11'$	$177,3^\circ$	$23,44^\circ$	$25,19^\circ$
Albedo (bond)	0,119	0,75	0,367	0,25
Albedo (geometric)	0,106	0,65	0,367	0,15
Características Orbitais				
Semi-Eixo Maior (UA)	0,387 098	0,723 332	1	1,523679
Excentricidade	0,20563	0,0068	0,016710219	0,093315

C.1.3 Planetas Jovianos

	JÚPITER	SATURNO	URANO	NETUNO
Características Físicas				
Raio Médio (km)	71 492	60 268	25 559	24 764
Massa (kg)	$1,8986 \cdot 10^{27}$	$5,6846 \cdot 10^{26}$	$8,6810 \cdot 10^{25}$	$1,0243 \cdot 10^{26}$
Massa (M_J)				
Inclinação Axial	$3,13^\circ$	$26,73^\circ$	$97,77^\circ$	$28,32^\circ$
Albedo (bond)	0,343	0,342	0,300	0,290
Albedo (geometric)	0,52	0,47	0,51	0,41
Características Orbitais				
Semi-Eixo Maior (UA)	5,204267	9,58201720	19,22941195	30,10366151
Excentricidade	0,048775	0,055723219	0,044405586	0,011214269

C.1.4 Lua

Características Físicas

Raio médio:	1 737,10 km
Massa:	$7,3477 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
Período de Rotação:	27,321582 dias
Inclinação Axial (com a eclíptica):	$1,5424^\circ$
Inclinação Axial (com seu plano orbital):	$6,687^\circ$
Albedo:	0,12

Características Orbitais

Raio orbital médio:	384 399 km
Excentricidade:	0,0549
Período Orbital:	27d 7h 43,1min
Inclinação (com a eclíptica):	$5,145^\circ$

C.2 Constantes Físicas

Constante de Planck (h)	$6,626068 \cdot 10^{-34} \frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{s}}$
Constante de Boltzmann (k)	$1,3806503 \cdot 10^{-23} \frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{s}^2 \cdot \text{K}}$
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,672 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$
Velocidade da Luz (c)	$2,9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

C.3 Unidades-Padrão da Astronomia

C.3.1 de Distância

Unidade Astronômica (UA)	$1,50 \cdot 10^{11}m = 1,58 \cdot 10^{-5}al = 4,8 \cdot 10^{-6}pc$
Ano-Luz	$9,46 \cdot 10^{15}m = 0,63 \cdot 10^5UA = 0,31pc$
Parsec	$3,09 \cdot 10^{16}m = 2,06 \cdot 10^5UA = 3,26al$

C.3.2 de Tempo

Período de Rotação	$23h56m4s$
Ano Sideral	$365,2564$ dias
Ano Trópico	$365,2422$ dias

Índice Remissivo

- a priori, 16
- aberração cromática, 76
- Airy
 - Disco de, 81
- algarismos significativos, 12
- amplitude (de dados), 32
- Ano Internacional da Astronomia, 75
- ano-luz, 14
- aumento, 79
- base de vetores, 18
- Bessel
 - equação de, 81
- câncer, 93
- Campo de Visão, 78
- CCD, 79
- ciência moderna, 16
- Copérnico, Nicolau, 75
- dados
 - categóricos e numéricos, 26
- Descartes, René, 16
- desvio de campo, 85
- desvio-padrão, 32
- dimensão física
 - números, 18
 - aceleração, 17
 - energia, 17
 - espaço, 16
 - força, 17
 - massa, 16
 - quantidade de movimento, 17
 - tempo, 16
 - velocidade, 16
- distribuição
 - normal / gaussiana, 35
 - uniforme, 35
- erro
 - sistemático, 38
- escala
 - de placa, 80
- espelho
 - esférico, 76
 - principal, 76
- extinção de cor, 93
- fluxo, 53
 - luminoso, 54
- Foca Bilota, 28
- Fraunhofer
 - Difração de, 81
- Galilei, Galileu, 75
- Galileu
 - Sidereus Nuncius*, 75
- gráfico
 - de barras, 45
 - de dispersão, 46
 - histograma, 45
 - pizza, 46
- Hiparco de Nicéia, 55
- Hubble
 - Constante de, 89
 - Edwin, 88
 - Telescópio, 96
- janelas atmosféricas, 93
- Kant, Immanuel, 16
- Kepler, Johannes, 75
- laser, 54
- lente
 - acromática, 77
 - buscadora, 78
 - convergente, 72
 - de bordos finos, 73
 - de bordos grossos, 73
 - divergente, 72
 - foco, 72
 - Objetiva, 75
 - Ocular, 75
- Lippershey, Hans, 75

- Lua
 - mares lunares, 11
- luneta, 75
 - galileana, 75
 - Kepleriana, 75
- luz
 - infravermelho próximo, 93
 - luz visível, 93
 - radio, 93
- média
 - aritmética, 27
 - geométrica, 29
 - harmônica, 30
- magnitude
 - de Hiparco, 55
 - absoluta, 58
 - aparente, 57
- Maksutov, Dmitri, 77
- mediana, 28
- montagem
 - alemã, 87
 - altazimutal, 84
 - berço, 89
 - chassi, 87
 - dobsoniana, 86
 - equatorial, 84
 - garfo, 86
- movimento uniformemente acelerado, 20
- normalização, 33
- notação científica, 13
- Observatório
 - ALMA, 95
 - E-ELT, 95
 - Gemini, 87
 - GMRT, 121, 126, 143
 - Gran Telescópio Canarias, 96
 - Keck, 87
 - Monte Palomar, 89
 - Monte Wilson, 88
 - NOT, 153
 - SOAR, 87
 - VLT, 95
- Observatório Espacial
 - Chandra, 97
 - COBE, 96
 - Compton, 97
 - Fermi, 97
 - Gaia, 97
 - Herschel, 97
 - Hipparcos, 97, 145
 - Hubble, 96
 - Integral, 97
 - IRAS, 96
 - James Webb, 97
 - XMM-Newton, 97
- olho
 - bastonetes, 73
 - cones, 73
- ornitorrinco, 52
- paralaxe
 - trigonométrica, 62
- placa fotográfica, 79
- Poder de Ganho de Luz, 79
- poder resolutor, 81
- Pogson, Norman, 56
- Princípio
 - da Homogeneidade Dimensional, 19
- radiação cósmica de fundo, 96
- razão focal, 80
- refração atmosférica, 90
- Revolução Copernicana, 75
- Schmidt
 - Lâmina Corretora, 77
- seeing, 93
- Shenzou-6, 109
- taxidermia, 27
- Taylor
 - série de, 40
- telescópio
 - Cassegrain, 76
 - do Canalle, 78
 - Hale, 89
 - Maksutov, 77
 - montagem, 84
 - Newtoniano, 76
 - Planck, 97
 - refletor, 76
 - Refrator, 75
- telescópios
 - defeitos na imagem, 90
- telescópios espaciais, 96
- terceiro quartil, 33
- triangulação, 62
- UNESCO, 75