



CURSO DE ASTRONOMIA GERAL

IOTA



MECÂNICA

**CCD
OBA**

CURSO DE ASTRONOMIA GERAL

versão iota – outubro de 2012

volume III : mecânica

escrito por:

Bruno L' Astorina

Felipe Gonçalves Assis

Vinícius Miranda Bragança

e também por:

Alexandre Bagdonas

Fabício Caluza Machado

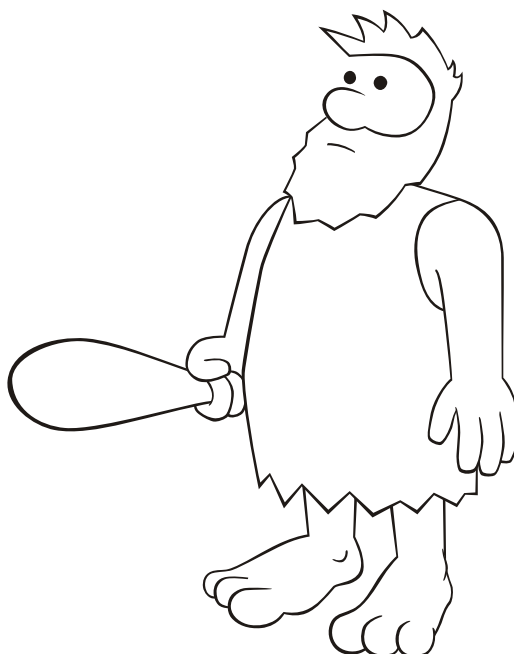
Felipe Gonçalves Assis

Gustavo Amarante Furtado

Pedro Rangel Caetano

Rafael Rodrigues Francisco

Raul Celistrino Teixeira



Clube de Caça às Doninhas

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

Todos os volumes desta obra são licenciados como Creative Commons (CC BY-SA 3.0). Isso significa que você é livre para copiar, distribuir, transmitir ou adaptar este trabalho, desde que citada a fonte (Curso de Astronomia Geral do CCD-OBA) e que qualquer trabalho derivado deste seja liberado com a mesma licença.

Sumário

I	Revolução Copernicana	8
1	Ptolomeu	15
1.1	Mercúrio e Vênus	17
2	Copérnico	21
3	Pós-Copérnico I: Cosmologia	25
4	Pós-Copérnico II: Observadores	29
4.1	A Elipse	30
4.2	De volta ao assunto	32
4.3	Titius e Böde	33
5	Pós-Copérnico III: Físicos	35
5.1	Descartes	36
6	Newton e o fim da curva	38
II	Mecânica Clássica	44
7	Mecânica de Newton	48
7.1	Inércia	50
7.2	Leis	52
8	Algumas Forças	57
8.1	Forças Elásticas	57
8.2	Força Gravitacional	57
8.3	Forças de Atrito	59
8.3.1	Arrasto de Forma	60
8.3.2	Arrasto Viscoso	61
8.4	Força de Sustentação	63
8.4.1	Efeito Magnus	64
9	Referenciais Inerciais	67
9.1	Força de Coriolis	71
10	A Interpretação da Energia	76
10.1	Máquinas de Carnot	78
10.2	Conservação de Energia	80
10.3	Trabalho	81

11 Centro de Massa	85
12 Física de Rotações	88
III Mecânica Celeste	94
13 Gravitostática	98
13.1 Gravidade Subterrânea	99
13.2 Velocidades Cósmicas	101
13.2.1 Primeira	101
13.2.2 Segunda	102
14 Elipse	104
14.1 Definições	104
14.2 Propriedades	109
14.3 Órbitas Elípticas	111
15 Leis de Kepler	113
15.1 Lei II	114
15.2 Lei I	116
15.3 Lei III	118
16 Movimentos Orbitais	123
16.1 Mudanças de órbita, vários ângulos	124
16.2 Mudança de planos	127
16.3 Transferência de Hohmann	128
16.4 Achatamento e Atmosfera	129
16.5 Classes de Satélites	130
16.6 Exercícios	132
17 Órbitas Abertas	134
17.1 Parábola	134
17.2 Hipérbole	135
17.3 Transições Orbitais	136
18 Marés	141
18.1 Lua e as marés	141
18.2 Sol e as marés	142
18.3 Física das Marés	144
18.3.1 Limite de Roche	146
IV Apêndices	148
A Funções	150
A.1 Classificação das funções	150
A.2 Funções entre conjuntos numéricos	151
A.2.1 Funções Polinomiais	151
A.2.2 Função Exponencial e Função Logarítmica	153
A.2.3 Funções Trigonométricas	155
A.3 Limite	155
A.4 Derivada	156

A.5	Integral	158
B	Trigonometria	161
B.1	Teorema de Pitágoras	161
B.1.1	Demonstração de Euclides	161
B.1.2	Outra demonstração	162
B.2	Seno, Cosseno, Tangente e Co-Tangente	163
B.3	Círculo Trigonométrico e a extensão das funções trigonométricas	165
B.4	Lei dos Cossenos	166
B.4.1	Demonstração	166
B.5	Radianos	167
C	Vetores	169
C.1	Operações com vetores	170
C.2	Decomposição de Vetores	172
C.3	Operações com Vetores Decompostos	175
C.3.1	Módulo de vetores decompostos	176
C.4	Produto Escalar	177
C.5	Produto Vetorial	178

Prefácio

Quanto a mim, estou persuadido de que, se me tivessem ensinado, desde a minha mocidade, todas as verdades cujas demonstrações procurei mais tarde, e se eu não tivesse encontrado nenhuma dificuldade em aprendê-las, talvez nunca chegasse a conhecer outras ou, pelo menos, nunca adquirisse o hábito e a felicidade que penso ter para encontrar sempre novas, à medida em que me aplico a procurá-las.

René Descartes, *Discurso do Método*

Estas são as apostilas do Curso de Astronomia Geral do CCD-OBA, versão 1. Nosso objetivo principal, com o curso, é enriquecer a *formação* dos seus participantes. Por “formação”, referimo-nos a um processo que é, em sua essência, individual e único, composto amplamente pelo conjunto de experiências vividas por alguém. Citando Hans-Georg Gadamer, “Não é casual que a palavra formação se pareça, neste aspecto, ao grego *physis*. Como a natureza, a formação não conhece objetivos que lhe sejam exteriores.”

Isso quer dizer que a postura que procuraremos desenvolver se fundamenta na *autonomia intelectual*: cada indivíduo é senhor sobre a formação de seu próprio conhecimento. Tudo o que podemos fazer, enquanto organizadores do curso, é dar incentivo, buscando fornecer uma visão mais ampla a partir de nossas próprias experiências.

Convidamos para este curso pessoas que têm grande vontade de saber, esperamos fornecer conhecimento até elas saciarem essa vontade e, então, perceberem que ter aprendido aquilo tudo não faz sentido se, de alguma forma, não for passado adiante. Com isso o processo se retroalimenta, individual e coletivamente. Individual porque sempre aprendemos muito quando alguém nos ensina, mas aprendemos ainda mais quando nós ensinamos alguém, quando fazemos o esforço de pôr nosso conhecimento em frases organizadas e compreensíveis. Coletivamente porque os que aprenderem conosco agora estarão ensinando depois, como nós. Essa é precisamente a origem da CCD: ex-alunos da olimpíada que aprenderam muito, sozinhos e com a ajuda de livros, professores e astrônomos, e acabaram decidindo que precisavam escrever e organizar cursos com tudo o que sabiam. Dentre os autores desta versão 1 do Curso, há nomes de pessoas que, um ano atrás, eram alunos felizes e curiosos pelo que viria a seguir.

Nesse contexto, a Astronomia, por mais encantadora e atraente que seja para a maioria de nós, não é pensada como um fim em si próprio, mas como um lugar de articulação de saberes. Mostramos, ao longo das apostilas, o quanto a astronomia tem a ver com o desenvolvimento da física, da química e da matemática; mas, mais do que isso, quais são suas relações com a história, a filosofia, as religiões, as diferentes expressões artísticas e, enfim, com as diferentes visões de mundo que surgiram aqui e ali ao longo das histórias humanas. Em suma, não queremos Astronomia pela Astronomia, mas Astronomia por Tudo!

Assim, pretendemos desenvolver uma visão melhor e mais completa do mundo natural e, através disso, do mundo humano também. Fazemos isso, em particular, buscando desenvolver as seguintes habilidades/características individuais:

- Articulação lógica e formal (que tem a ver com a LINGUAGEM)
- Capacidade de abstrair e imaginar (relacionado ao PENSAMENTO)
- Cultura Experimental (característica da CIÊNCIA)
- Reflexão crítica sobre o conhecimento (papel da FILOSOFIA)
- Contemplação estética (o que chamamos de ARTE)

O material está dividido em cinco volumes, na ordem em que os assuntos pareceram mais naturais para nós. O Volume I, *Céu*, discute tudo o que pode ser observado. Discute também algumas interpretações, míticas, poéticas e teóricas, sobre as observações. Toda a matemática desenvolvida nele, portanto, está ligada à geometria dos céus, a Geometria Esférica. Talvez seja o volume com conteúdo mais diferente do que normalmente é visto no colégio. O Volume II, *Medidas*, está mais ligado à idéia e à prática dos experimentos; sua introdução a como tratar dados experimentais é uma introdução à abordagem algébrica que virá nos volumes seguintes. Além disso, ele procura desenvolver uma intuição sobre as técnicas e medição e os instrumentos (em particular os telescópios) necessários para se desenvolver qualquer outro instrumento astronômico. O Volume III, *Mecânica*, é o primeiro que trata de física. Ele introduz a mecânica aprendida no colégio, mas com as intuições nascidas da nossa própria experiência. Discute também a física no contexto da mudança da visão sobre o universo nos séculos XVI e XVII, que culmina com o nascimento da Mecânica Celeste. Discute, finalmente, a construção da própria Mecânica Celeste, com uma abordagem geométrica (que é clássica mas também incomum nos estudos de física de hoje em dia) e procurando criar uma boa intuição sobre movimentos livres em campos gravitacionais. O Volume IV, *Astrofísica*, também fala de física, mas de um caráter bem diferente: da constituição material do mundo, do caráter da luz e das interações atômicas. Nesse sentido, é um volume bastante ligado à química. Ele culmina com o estudo detalhado, dos pontos de vista teórico, experimental e observacional, de alguns objetos de interesse astronômico, passando por estrelas e sua evolução, mas também por aglomerados, galáxias e asteróides. Por fim, o Volume V, *Universo*, trata principalmente de Cosmologia, ou seja, da discussão sobre o universo como um todo. Como não poderia deixar de ser, ele alterna entre discussões filosóficas e matemáticas densas, pontuadas por alguns *insights* poéticos. Na segunda parte, há dois capítulos discutindo sobre a situação atual da pesquisa em astronomia no Brasil – o que é especialmente interessante para quem tem alguma pretensão de estudar ciência na universidade.

Além dessas apostilas, enviaremos outros materiais, como referências e algumas atividades práticas ao longo do curso. Incentivamos que as façam, de forma a complementar o conteúdo das apostilas. Aplicaremos também uma ou duas provas para selecionar os estudantes para a *International Olympiad on Astronomy and Astrophysics* (IOAA) e para a *Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica* (OLAA). Além disso, esperamos engajar os participantes em algumas práticas, ligadas à noção de responsabilidade intelectual discutida acima: ensinar colegas, em discussões de grupo, aulas preparatórias para a próxima OBA ou aulas motivadoras em colégios de baixa renda; observar o céu com outros, em clubes de astronomia amadora e em *star parties*; envolver-se em projetos de pesquisa, junto a astrônomos amadores, professores universitários ou membros do CCD; integrar-se, por fim, ao nosso próprio grupo.

A primeira olimpíada internacional de astronomia foi fundada em 1996; é dois anos mais antiga, portanto, que a sua versão brasileira. Desde a fundação da OBA, há o compromisso de enviar times anualmente à olimpíada internacional – pelo qual sempre foi necessário fazer uma seleção justa e eficiente para montar as equipes. Este curso nasceu dessa necessidade: precisávamos, afinal, fornecer bases de conhecimento necessária aos que tivessem as habilidades

e os interesses necessários. Nossos objetivos, contudo, já ultrapassaram em muito os objetivos da seleção. É o que esperamos que fique claro ao longo das páginas que se seguem.

Sobre este Volume

Enquanto o Volume 1 foi eminentemente observacional e o Volume 2 é de análise de dados, o Volume 3, Mecânica, é tipicamente teórico. Ele trata de física e faz uma abordagem algébrica etc.

A Unidade 1, Revolução Copernicana, tem uma abordagem muito mais histórica e literária do que matemática. Entretanto, alguns dos conceitos discutidos nessa unidade são fundamentais para a compreensão dos aspectos matemáticos discutidos depois. Há também uma discussão geométrica importante (sobre conjunções e oposições, e período sinódico), importante para visão espacial.

A Unidade 2 nada mais é que uma revisão e tudo o que se vê de mecânica nas aulas de física do ensino médio: Leis de Newton, Força, Trabalho e Energia. Inicialmente ela tinha sido pensada para aqueles que ainda não tinham visto todo o conteúdo no colégio, mas sua leitura por quem já viu pode ser proveitosa, pois desenvolvemos algumas intuições que normalmente não são desenvolvidas nas aulas regulares. Mas para quem preferir, a unidade pode ser pulada - com exceção de seus dois últimos capítulos, Centro de Massa e Física de Rotações, que não fazem parte da grade curricular do ensino médio.

A Unidade 3, enfim, tem a Mecânica Celeste. Ela é razoavelmente pesada do ponto de vista matemático, o que pode ser desestimulante para alguns. Mas não desista!, a recompensa do outro lado vale a pena. O capítulo de Leis de Kepler, em especial, é cheio de demonstrações matemáticas; se não entender as demonstrações, siga a leitura somente pelos seus resultados. O capítulo de Astronáutica é o mais importante para desenvolver intuição sobre órbitas e sobre mecânica celeste, e exige relativamente pouca matemática; mesmo se voce tiver entendido pouco das demonstrações dos outros capítulos, leia este.

Os apêndices buscam suprir toda a base matemática necessária para os cinco volumes. Os apêndices A e B, em particular, tratam sobre funções de um modo bastante amplo, começando de definições elementares mas terminando nos conceitos de limite, derivada e integral (que são importantes para a formação matemática geral de um estudante), passando por tópicos interessantes como a demonstração da fórmula de baskhara. O apêndice de trigonometria vale pelas suas demonstrações, raras em aulas de ensino médio. O apêndice de vetores, por outro lado, não destoa muito do que se vê na escola.

Unidade I

Revolução Copernicana

A natureza é composta por quatro elementos: a TERRA, fria e seca; a ÁGUA, fria e úmida; o FOGO, quente e seco; o AR, quente e úmido. Cada elemento tende a se agrupar com seus semelhantes, tomando a forma esférica, que é a forma mais simétrica e perfeita. E isto ocorre segundo o peso de cada um, ou seja, a tendência que cada corpo tem de se aproximar do centro do universo; e que é maior ou menor em cada corpo, segundo a substância que o compõe. Assim, o elemento mais pesado é a terra, que sempre se move para baixo. Ele é seguido pela água. Já o ar é ainda mais leve, formando uma camada acima da água, e o fogo, o mais leve de todos, sempre se move para cima. Em volta dela, cobrindo-a, a Esfera da Água¹ Eles ficam em contato direto com a esfera seguinte: a Esfera do Ar. Cobrindo esta vem, por último, a Esfera do Fogo, cujos vestígios podemos ver em algumas ocasiões, como quando aparecem rastros de fogo no céu [meteoros e cometas]. Essa é a constituição geral das Esferas do Mundo Material.

Acima das Esferas Materiais, encontram-se as Esferas Celestiais. São oito ao todo. A mais externa, o limite do universo, é a ESFERA DAS ESTRELAS FIXAS, limite fundamental e definidor da perfeita esfericidade do Universo. Abaixo dela, outras sete esferas cristalinas; cada uma carrega um dos astros luminosos errantes, os planetas. Os planetas são astros que se movem em relação às estrelas fixas, num movimento oblíquo, inclinado em aproximadamente 23 graus em relação ao movimento da Esfera Primeira. Dos sete, dois são corpos extensos: o SOL e a LUA. Os outros cinco, pontuais como as estrelas e batizados com os nomes de antigos deuses, são: MERCÚRIO, o mais rápido no céu, representando o mensageiro dos deuses; VÊNUS, o mais brilhante com uma luz branca, bonita, associada à deusa das artes, a mais bela do Olimpo; MARTE, o planeta vermelho, associado ao deus das guerras; JÚPITER, também muito brilhante, o Deus Supremo, que rege o Universo; e SATURNO, com uma cor sólida, de movimento muito lento (completa uma volta em 30 anos), associado ao deus do tempo, pai de Júpiter². Eles são ordenados no céu segundo sua velocidade: os mais próximos das Estrelas Fixas têm velocidades menores, afastando-se menos do movimento desta; os mais inferiores desviam-se mais rápido do ciclo das 24 horas. Do mais interno para o mais externo, são: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno. Os objetos e as esferas celestes não podem ser feitos das mesmas substâncias que o mundo material; enquanto este contém movimento, mudança e degradação, o céu é local da perfeição, da imutabilidade, de tudo o que é sempre igual a si mesmo. E qual outra forma geométrica que a esfera, cujas partes são todas iguais entre si, e cujo movimento de rotação não é um movimento, pois move-se mas nunca muda seu aspecto? As Esferas Celestes, então, são compostas de uma substância perfeita, translúcida e cristalina: o éter. Sua propensão natural é o movimento circular em torno do Centro (não a queda em direção a ele). Assim, este esquema perfeito do universo celestial se mantém pela eternidade, enquanto que o nosso mundo, abaixo da Esfera Lunar, permanece sujeito ao caos e à impermanência.

¹Uma questão importante debatida na física medieval foi: se a esfera de Terra é cercada pela de Água, então como vemos amplos espaços de Terra em contato direto com a camada de ar, a atmosfera? Em outras palavras: como pode existir lugares secos? Uma explicação possível é que o centro das esferas de água e de terra não sejam coincidentes; assim, poderia haver uma calota de Terra em uma parte do globo. Outra explicação é a água ser escassa. Assim, considerando as pequenas irregularidades na superfície da Terra, é possível que toda a Água se acumule nas partes mais baixas, deixando ainda espaços de terra seca.

²Esses são os nomes latinos dos deuses gregos, herdados da cultura romana. Os nomes gregos são: Mercúrio = Hermes, Vênus = Afrodite; Marte = Ares; Júpiter = Zeus; Saturno = Cronos.

Schema huius præmissæ diuisionis Sphærarum.



Figura 1: As Quatro Esferas Materiais e as Oito Esferas Celestiais. A figura foi tirado de um livro medieval, contendo mais duas esferas e uma zona além. A nona esfera dá conta da precessão; a décima, o *Primum Mobile* (Primeiro Motor), que imprime seu movimento de 24 horas nas demais esferas. A zona além trás escrito COELVM EMPIREVM HABITACULUM DEI ET OMNIUM ELECTORVM (Céu Empíreo, habitáculo de Deus e de todos os eleitos).

Este esquema de como o mundo funciona, esta Máquina do Mundo, foi, em suas muitas variações, o sistema mais importante da história do Ocidente. No seu primeiro formato completo, foi sugerido pela primeira vez por Aristóteles, no século III a.C. Da Grécia Clássica, passou a Grécia Helenística e ao Império de Alexandre, tornando-se uma referência para os cálculos astronômicos através de astrônomos como Ptolomeu. Com a queda do mundo helênico, em um império romano cristianizado (e depois da Queda deste, em reinos bárbaros cristianizados), essa concepção de universo perdeu importância. Contudo, não se passou muito tempo até o florescimento da civilização árabe, onde as obras e idéias da Grécia Clássica foram amplamente lidas e debatidas. O Universo de Aristóteles passou de letras gregas para letras árabes. Séculos depois, passou das letras árabes para letras latinas, através dos intercâmbios entre muçulmanos e cristãos na Península Ibérica. Então já estávamos no século XII, em plena Idade Média na Europa. Foi nesta época que Aristóteles renasceu ali, junto com o nascimento das Universidades.

Na Europa, o universo de Aristóteles foi cristianizado. Era a Máquina do Mundo criada aqui pelo Deus cristão. Se o céu visível era o espaço da regularidade e da perfeição, então era acima dele que estavam as criaturas ainda mais perfeitas: Deus e os seres espirituais. Por outro lado, era para dentro a Esfera de Terra que encontraríamos o local da danação eterna: o Inferno. Esta concepção de mundo foi cantada por poetas de todas as partes da Europa, incluindo a de nossa ascendência. Assim, podemos reencontrar o modelo na grande obra de Luís de Camões, *Os Lusíadas*. Assim, lemos no Canto X:

Introdução	Vês aqui a grande máquina do Mundo ³ , Etérea e elemental, que fabricada Assim foi do Saber, alto e profundo, Que é sem princípio e meta limitada. Quem cerca em derredor este rotundo Globo e sua superfície tão limada, É Deus; mas o que é Deus, ninguém o entende, Que a tanto o engenho humano não se estende.
Céu Empíreo, onde habitam as puras almas	Este orbe que, primeiro, vai cercando Os outros mais pequenos que em si tem, Que está com luz tão clara radiando, Que a vista cega e a mente vil também, Empíreo se nomeia, onde logrando Puras almas estão daquele Bem Tamanho, que Ele só se entende e alcança, De quem não há no mundo semelhança. (...)
O Mobile Primeiro (tão leve e tão ligeiro) que gira em 24 h	Enfim que o sumo Deus, que por segundas Causas obra no Mundo, tudo manda. E, tornando a contar-te das profundas Obras da Mão Divina veneranda: Debaixo deste círculo, onde as mundas Almas divinas gozam, que não anda, Outro corre, tão leve e tão ligeiro, Que não se enxerga: é o Mobile primeiro.
M. P. arrasta as outras esferas, causando o dia e a noite. Nona Esfera, da precessão	Com este rapto e grande movimento Vão todos os que dentro tem no seio; Por obra deste, o Sol, andando a tento, O dia e noite faz, com curso alheio. Debaixo deste leve, anda outro lento, Tão lento e subjugado a duro freio, Que, enquanto Febo ⁴ , de luz nunca escasso. Duzentos cursos faz, dá ele um passo.
Esfera das Estrelas Fixas e o zodíaco, seu cinturão.	Olha estoutro debaixo, que esmaltado De corpos lisos anda e radiantes, Que também nele tem curso ordenado E nos seus axes correm cintilantes. Bem vês como se veste e faz ornado Co largo Cinto de ouro, que estelantes Animais doze traz afigurados, Aposentos de Febo limitados.
Algumas constelações (figuras que fazem as estrelas)	Olha, por outras partes, a pintura Que as estrelas fulgentes vão fazendo:

³As marcações à esquerda do poema são nossas.

⁴Febo é outro nome para *Apolo*, divindade da luz. Aqui, ele provavelmente representa a luz das estrelas.

	Olha a Carreta, atenta a Cinosura⁵, Andrômeda e seu pai, e o Drago horrendo. Vê de Cassiopeia a fermosura E do Oriente⁶ o gesto turbulento; Olha o Cisne morrendo que suspira, A Lebre e os Cães, a Nau e a doce Lira.
Enfim, as esferas dos planetas	Debaixo deste grande Firmamento, Vês o céu de Saturno, Deus antigo; Júpiter logo faz o movimento, E Marte abaixo, bélico inimigo; O claro Olho do céu, no quarto assento, E Vênus, que os amores traz consigo, Mercúrio, de eloquência soberana; Com três rostos, debaixo vai Diana⁷.
Fechamento	Em todos estes orbes, diferente Curso verás, nuns grave e noutros leve; Ora fogem do Centro longamente, Ora da Terra estão caminho breve, Bem como quis o Padre onipotente, Que o fogo fez e o ar, o vento e neve, Os quais verás que jazem mais a dentro E tem co Mar a Terra por seu centro.
Esferas do fogo e do ar (mais adentro que as celestes)	
Esferas da terra e da água	

Luís de Camões

Esta imagem do universo tem muito a seu favor. Primeiro, porque suas explicações resumem e formalizam, de forma simples, tudo o que efetivamente vemos nos céus, sem explicações adicionais contra-intuitivas (como as que a Física de Newton depois vai dar). De fato, o que vemos todos os dias são os movimentos imutáveis do céu, do Sol, dos planetas, bem como as coisas graves (pesadas) caindo. Por isso sua versão cantada por Camões era importante em Portugal das Grandes Navegações: era (ainda é) o modelo perfeito para sintetizar o conhecimento do céu que os navegadores precisavam ter (hoje em dia, o GPS dispensa essa habilidade). Além disso, era um sistema físico completo, o primeiro universalmente adotado no Ocidente. De fato, como mostra o poema, muito da sua beleza está em fornecer uma imagem *compreensível* do universo, dada de forma simples à nossa razão. Quatro elementos encapsulados por dez esferas cristalinas; toda a dinâmica do céu é descrita apenas ajustando-se as velocidades e inclinações dos eixos das esferas. Tudo se move a partir do movimento do Mobile primeiro, colocado por Deus para se mover no início, fazendo então todo o resto mover-se segundo sua natureza. Uma máquina como um relógio. Enfim, diante de um tal modelo completo, consistente e intuitivo, não é de se espantar que tenha vigorado desde o século III a.C. até meados do século XVII, ou seja, por vinte séculos!

Mas o mundo dos homens sempre está sujeito à mudança, e assim também suas idéias. No século XVII, um novo conjunto de idéias se difundiu, a partir dos textos de Copérnico, Giordano Bruno e outros. A partir de então, lentamente, esta visão de mundo foi sendo abandonada em prol de uma nova imagem. Citando Thomas Kuhn⁸:

⁵Cinosura é o nome de uma ninfa; corresponde à Ursa Menor.

⁶Oriente é uma forma de escrever Órion

⁷Aqui, Diana, deusa da caça, foi tomada como representação mitológica da Lua.

⁸Boa parte desta unidade foi baseada no livro de Thomas Kuhn, *The Copernican Revolution*.

Durante o século e meio seguinte à morte de Galileu, em 1642, a crença no universo centrado na Terra foi gradualmente se transformando de um signo essencial da sanidade a um índice, primeiro, de conservadorismo inflexível, depois de paroquialismo excessivo e, finalmente, de completo fanatismo.

Mas esta imagem de universo não foi abandonada porque ela é “pior” ou “menos certo” que a nossa. Se ela nos parece muito estranha, não é porque ela é uma ilusão da realidade que, hoje, nós conhecemos; ela parece estranho simplesmente porque não é a nossa imagem de universo. Desde pequenos, repetiram muitas vezes para nós (na escola, em casa, na TV) todos os elementos que compõem nossa visão: que o movimento dos céus é aparente, apenas reflexo do movimento da Terra); que é o Sol que fica parado no centro do Sistema, que os planetas se movem em torno dele; que entre os planetas existe apenas espaço vazio; que cada estrela do céu é como um Sol; que cada Sol possui diversos planetas em torno de si, todos mais ou menos semelhantes à Terra. Nós fomos educados segundo os padrões do nosso modelo, e isso foi tão forte que, diante de um modelo diferente (mesmo sendo mais intuitivo), o sentimos como estranho e errado. Não que seja recomendável abandonar nossa visão de mundo atual, claro que não; mas precisamos saber reconhecer outras, quando encontramos com elas. Especialmente se esse encontro se dá na nossa própria história.

Depois de três séculos e meio do declínio do universo das esferas, a compreensão que temos pode ser bem sintetizada pelos versos de outro poeta português, mas este do século XX:

A Máquina do Mundo

O Universo é feito essencialmente de coisa nenhuma.
Intervalos, distâncias, buracos,
 porosidade etérea.
Espaço vazio, em suma.
O resto, é a matéria.
Daí, que este arrepio,
este chamá-lo e tê-lo, erguê-lo e defrontá-lo,
esta fresta de nada aberta no vazio,
deve ser um intervalo.

Antônio Gedeão⁹

A história dessa mudança de visão de mundo, de Camões a Gedeão, é o que começaremos a contar nesta Unidade.

⁹Antônio Gedeão é o pseudônimo de Rômulo de Carvalho, historiador e divulgador de ciência português, membro da Academia de Ciências de Lisboa e falecido em 1997.

Capítulo 1

Ptolomeu

Começamos no grande centro de intercambio e florescimento intelectual que era a Biblioteca de Alexandria no século II. Foi neste século, nesta cidade, que viveram dois nomes importantes, ambos citados no capítulo de história do Volume I. O primeiro foi Euclides, que sistematizou toda a geometria praticada como esporte mental há séculos, na Grécia. Foi ele que criou as noções de axiomas, teoremas, etc. que viriam a ser marcantes na ciência e na matemática modernas. O segundo foi Ptolomeu, desta vez um astrônomo – que não estudava algo tão diferente assim, já que os estudos de astronomia, nesta época, eram uma sequência natural dos estudos de geometria. De fato, a função da astronomia (*astro nomós*, a regra dos astros) era calcular posições e períodos dos astros, para assim prever suas configurações. Era a partir das regras de cálculo que eles podiam praticar a verdadeira *ciência astronômica* (astrologia), que servia para conhecer as implicações do comportamento dos astros¹. O grande mérito de Ptolomeu foi, baseando-se no sistema de mundo de Aristóteles, fazer um sistema geométrico-numérico, de acordo com as tabelas de observações babilônicas, para descrever os movimentos do Céu. Com essas características, além de fornecer uma visão de mundo completa, o sistema aristotélico ganhou o importante poder de fazer *previsões* (de estações do ano, de eclipses, de queda de impérios etc).

No Volume 1, estudamos extensivamente a geometria da Esfera das Estrelas Fixas; nos falta um leve complemento, com a geometria das configurações planetárias. De fato, as astrologias ocidentais (babilônica, egípcia, judaica, grega) são baseadas essencialmente no cinturão do zodíaco e nos sete astros errantes que o percorrem. Assim, para as previsões astrológicas, o que interessa essencialmente são (i) as posições dos planetas com relação às casas zodiacais, e (ii) as posições dos planetas uns com relação aos outros. Com relação às posições entre os planetas, podemos destacar algumas:

- Quando dois planetas estão sobrepostos um ao outro, ou quando estão em um mesmo meridiano (mesma longitude eclíptica), falamos que estão em **CONJUNÇÃO**.
- Quando estão em meridianos opostos (com 12 h de diferença de longitude eclíptica), estão em **OPOSIÇÃO**.
- Quando estão a 9 h (120°) um do outro na eclíptica, estão em **TRÍGONO**, pois três vezes a distancia entre eles completa o círculo inteiro.
- Quando estão a 6 h (90°) um do outro na eclíptica, como que “perpendiculares”, estão em **QUADRATURA**, pois estão como o ângulo interno de um quadrado.
- Quando estão a 3 h (60°) um do outro, estão em **SEXTIL**, pois seis vezes a distancia completam o círculo.

¹ Neste sentido, podemos pensar que a *astrofísica* (física dos astros) foi quem substituiu a astrologia como a ciência dos céus, em uma época em que esta última não era mais levada a sério.

Assim, por exemplo, Marte e Mercúrio em oposição pode significar algo muito ruim (então é importante prever, para se proteger). Quando dissemos apenas que tal planeta está “em oposição” ou “em conjunção”, estamos pressupondo “oposição / conjunção *em relação ao Sol*”. Afinal, em relação ao quanto influencia a Terra, o Sol é incomparavelmente o planeta mais importante.

- 1- Se Marte está em oposição ao Sol, a que horas ele passa pela sua culminação superior? E se estiver em conjunção?
- 2- Suponha que vejamos Júpiter em culminação superior às 20 horas, e saibamos que, naquele dia, ele está em posição de quadratura com relação a Vênus. Onde está Vênus às 20 horas? A que horas será a culminação superior de Vênus?

Mas como prever as conjunções e oposições? Mais do que isso: como prever em que constelações uma tal configuração ocorrerá? A segunda parte é fácil, como já sabemos: grosso modo, um planeta percorre mais ou menos uniformemente a eclíptica em um período bem determinado, que batizamos de PERÍODO SIDERAL (período com relação às estrelas). Vimos como isso funciona para a Lua, e vimos como seu período sideral difere do período de suas fases, o *mês sinódico*.

Para fazer a ligação entre a Lua e nosso problema, basta percebermos que o período das fases da Lua nada mais é que o período das configurações relativas entre Lua e Sol. Cada Lua Nova é uma conjunção da Lua; cada Lua Cheia, uma oposição. Assim, podemos estender o conceito à relação entre quaisquer dois planetas, chamando isso de *período sinódico* de um planeta em relação ao outro.

Assim, seguindo o que fizemos para a Lua, é intuitivo pensar que o período sinódico entre dois astros depende somente do período sideral de cada um deles. Podemos formalizar isso de um modo geométrico simples. Sejam dois corpos L e R que executem movimentos circulares concêntricos. Vamos supor que eles estejam no mesmo plano, para facilitar a análise (com uma boa aproximação, isso é verdadeiro entre os sete planetas). Suponhamos também que eles se movam com velocidades diferentes: R se move mais rápido, L é mais lento. Para facilitar a visualização, colocaremos R mais próximo do centro, e L mais distante. Se quisermos pensar nos termos aristotélicos, podemos pensar em duas esferas cristalinas E_R e E_L , concêntricas e com centro na Terra, carregando os corpos R e L, respectivamente. Se quisermos pensar em termos mais contemporâneos, podemos pensar em R e L percorrendo duas órbitas circulares.

Seja então ω_R a velocidade de rotação (velocidade angular²) da esfera E_R (ou do corpo R em sua órbita) e ω_L velocidade da esfera E_L – veja a figura 1.1. O que estamos interessados em saber, então, é a velocidade relativa entre ambos, isto é, a diferença de velocidades entre eles, $\omega_{rel} = \omega_R - \omega_L$.

Mas dizer que um corpo tem certa velocidade de rotação ω é o mesmo que dizer que ele completa um ciclo (360°) em um período $P = \frac{1}{\omega}$. Então, sendo P_R o período sideral do planeta mais rápido e P_L o período sideral do mais lento, o período S associado à velocidade relativa deles será o que estamos procurando: o período de afastamento relativo entre eles.

$$\omega_{rel} = \omega_R - \omega_L \quad \therefore \quad \frac{360^\circ}{S} = \frac{360^\circ}{P_R} - \frac{360^\circ}{P_L} \quad \therefore \quad \frac{1}{S} = \frac{1}{P_R} - \frac{1}{P_L}$$

Assim, temos uma forma simples de calcular períodos sinódicos!

²Lembrando: velocidade angular é a taxa de variação de um ângulo por unidade de tempo, isto é, quantos graus (ou radianos) por segundo um corpo percorre. A idéia é especialmente usada em movimentos circulares.

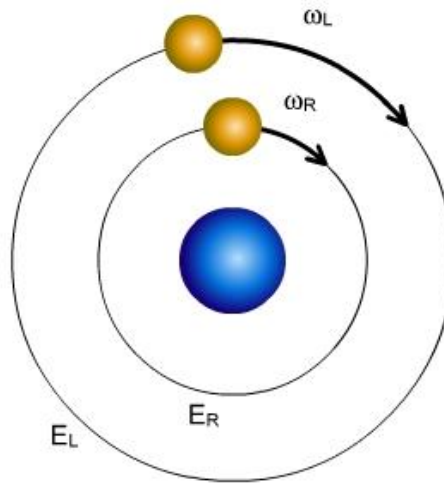


Figura 1.1: Dois corpos em suas respectivas esferas cristalinas (vistas num corte de cima, parecendo círculos) com suas respectivas velocidades angulares.

- 3- Mostre que este modelo serve para calcular a diferença entre duas marcações diferentes de meses lunares (sideral, sinódico, anomalístico, draconiano). Em cada uma das comparações, quais são os corpos R e L?
- 4- Calcule os valores acima, tendo apenas períodos siderais da Lua e do que mais for necessário.
- 5- Mostre também que este modelo serve para calcular a diferença entre dia sideral e dia solar. Neste caso, quais são os corpos R e L?
- 6- Como é possível imaginar, os períodos sinódicos mais importantes são os calculados em relação ao Sol. Assim, sabendo que a última oposição de Marte foi em 24 de dezembro de 2007, quando será a próxima oposição? E a próxima conjunção?
- 7- Sabendo que a última conjunção inferior (a conjunção quando o astro está mais próximo da Terra) de Vênus ocorreu em 18 de Agosto de 2007, quando Vênus passará por outra conjunção inferior? E por outra conjunção superior?
- 8- Agora imagine que passemos a um modelo heliocêntrico. Com isso, introduzimos uma nova variável: o *período orbital* de cada planeta. Como calcular o período orbital dos planetas a partir de seus períodos siderais?

1.1 Mercúrio e Vênus

Até aqui, construímos um modelo bastante simplificado das previsões planetárias. Com ele, cada um de vocês já deve ser capaz de fazer mapas astrais não muito precisos (mas provavelmente não menos precisos que os feitos pela maior parte dos astrólogos). Contudo, há algumas

correções que devemos fazer. A primeira é a de que os planetas não descrevem todos exatamente o mesmo círculo no céu. Em outras palavras, os eixos de rotação de suas esferas não têm todos exatamente a mesma inclinação. A segunda é que o movimento dos planetas em seus círculos não é uniforme. Eles chegam até mesmo a andar para trás, durante pequenos períodos, subindo e descendo um pouco! - no que chamamos de MOVIMENTO RETRÓGRADO.

O Sol e a Lua não retrogradam. Mercúrio e Vênus fazem algo mais estranho, descrito nos parágrafos seguintes. Para os demais planetas, vale a regra de que planetas mais distantes retrogradam com mais frequência, e demoram mais em seus movimentos retrógrados. Os valores são:

- Marte: retrograda por 72 dias a cada 25,6 meses;
- Júpiter: retrograda por 121 dias a cada 13,1 meses;
- Saturno: retrograda 138 dias a cada 12,4 meses.

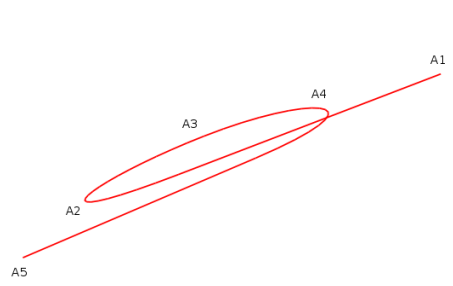


Figura 1.2: Movimento retrógrado de Marte em 2009-2010, na constelação de Câncer. Fonte: Wikipedia.

Entretanto, há outro problema mais gritante, que não necessita de grande precisão para ser percebido: Mercúrio e Vênus *nunca* estão em oposição com relação ao Sol! Na verdade, eles nunca se afastam muito do Grande Olho do Céu. Tecnicamente, chamamos a distância entre Sol e outro astro de *elongação*. Assim, um planeta em conjunção tem elongação igual a zero; em oposição, tem elongação igual a 180° . Mercúrio e Vênus, entretanto, são os únicos planetas cuja elongação não assume todos os valores. Eles têm um afastamento máximo possível em relação ao Sol, depois do qual voltam a caminhar para perto do Sol, e então para o outro lado, com o mesmo limite - como se oscilasse em torno do Lúmen. Essa elongação máxima possível vale cerca de 47° para Vênus e 15° para Mercúrio. Uma consequência direta disto é que Mercúrio e Vênus só podem ser vistos no céu poucas horas depois do Sol se por e poucas horas antes de ele nascer. Vênus, muito brilhante, é por isso conhecida como *Estrela D'Alva*, *Estrela da Manhã*, *Estrela Vespertina* ou outros nomes similares.

Levando em conta estes aspectos, fica claro que o modelo aristotélico-ptolomaico, em sua versão mais simples, não dá conta de fazer boas previsões. Por isso, mesmo que mantenhamos a visão de mundo das esferas, precisamos aperfeiçoar as técnicas geométricas, para explicar essas variações.

Uma forma eficiente é colocar mais esferas cristalinas, com inclinações ligeiramente diferentes e com velocidades de rotação diferentes, arrastando umas às outras. Isso foi proposto já por Eudoxo de Cnido, aluno de Platão e portanto colega de Aristóteles. De fato, já foi demonstrado que qualquer movimento de uma linha sobre uma superfície esférica pode ser descrito com um número suficientemente grande de esferas cristalinas homocêntricas (com o mesmo centro).

A estratégia de Ptolomeu foi diferente; facilmente compreensível mas, de forma sutil, colocando em xeque a cosmologia das esferas cristalinas. Para o problema de Mercúrio e Vênus, sua

solução foi a seguinte: o período de rotação das esferas de Mercúrio e de Vênus seria 365,25 dias, como a da esfera solar. Contudo, Vênus não descreveria diretamente um círculo em torno da Terra; ele descreveria um círculo em torno de um ponto, e esse ponto descreveria um círculo em torno da Terra. Esse *epiciclo* descrito por Vênus seria tal que apareceria no céu com um diâmetro angular de 47° , afastando-se do seu ponto central (que estaria sempre à frente do Sol) a leste e a oeste por este valor (ver figura 1.3). Epiciclos podem ser usados, de forma parecida, para explicar os movimentos retrógrados dos planetas.

Pensando na nossa concepção atual, os epiciclos ainda existem no nosso sistema solar. A Lua, por exemplo, orbita o Sol em um epiciclo; a diferença é que, neste caso, a Terra está no centro desse epiciclo – no caso de Vênus, era um ponto vazio.

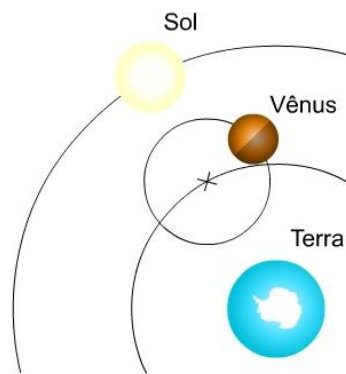


Figura 1.3: Epiciclo de Vênus. Repare que, como as velocidades das esferas são as mesmas, essa posição relativa é sempre preservada, e Vênus nunca se afasta muito do Sol.

Rigorosamente, os epiciclos não são compatíveis com as esferas cristalinas; eles não podem ser encaixados nelas. Além disso, se as esferas de Mercúrio e Vênus têm a mesma velocidade de rotação que a esfera do Sol, então como aplicar critério de ordenação dos planetas segundo a velocidade de suas esferas? No início, esses problemas foram ofuscados pelo sucesso de Ptolomeu com as tábuas babilônicas. Além disso, não eram problemas que afetavam a cosmologia, a visão de mundo das pessoas (que, naquela época, não era tão ligada como hoje ao trabalho técnico dos astrônomos). Entretanto, foram problemas percebidos pelos europeus que, séculos mais tarde, estavam incorporando Aristóteles novamente à sua tradição. Um desses europeus foi Nicolau Copérnico. Sua solução: criar um novo modelo que aperfeiçoasse as previsões geométricas e as re-harmonizasse com as esferas cristalinas.

- 9- Até que horas, no máximo, Vênus pode ser visto no céu noturno, no verão da sua cidade?
E Mercúrio?
- 10- Até que horas, no máximo, Vênus pode ser visto no céu noturno, no verão da sua cidade?
E Mercúrio?
- 11- Qual o planeta com maior período sinódico em relação ao Sol, visto da Terra?
- 12- Visto de Vênus, qual o período sinódico da Terra em relação ao Sol? E visto de Marte?
- 13- (IAO 96) Desenhe um círculo de tamanho arbitrário, representando a órbita terrestre. Desenhe, com base na tabela de elongações máximas (tabela 1.1), as órbitas de Mercúrio e de Vênus. Estime os raios de suas órbitas, em UA.

Tabela 1.1: Elongações máximas de Mercúrio e Vênus

Mercúrio: 1989-1990			Vênus: 1983-1990		
Data	Leste	Oeste	Data	Leste	Oeste
8 Jan 89	19°		15 Jun 83	45°	
18 Fev 89		26°	4 Nov 83		47°
30 Abr 89	21°		21 Jan 85	47°	
18 Jun 89		23°	12 Jun 85		46°
28 Ago 89	27°		26 Ago 86	46°	
10 Out 89		18°	15 Jan 87		47°
22 Dez 89	20°		2 Abr 88	46°	
1 Fev 90		25°	22 Ago 88		46°
13 Abr 90	20°		8 Nov 89	47°	
31 Mai 90		25°	30 Mar 90		46°
11 Ago 90	27°				
24 Set 90		18°			
5 Dez 90	21°				

Capítulo 2

Copérnico

Nicolau Copérnico era alguém para quem harmonias eram importantes. Em certo sentido, sua preocupação era melhorar a teoria ptolomaica nos aspectos em que ela não era suficientemente boa, suficientemente harmônica. No ano de sua morte, 1543, foi lançado o livro em que ele procurava fazer isso, *As Revoluções dos Orbes Celestes* (em latim, *De Revolutionibus Orbium Caelestium*). Neste livro, ele desenvolve e discute um novo modelo de universo, sobre o que comentamos brevemente no volume 1. Vamos deixar que o próprio livro diga por nós:

Por essa razão, julgo necessário, antes de tudo, que cuidadosamente verifiquemos qual é a relação entre a Terra e o Céu para que, ao investigarmos as coisas celestes, não ocorra de ignorarmos as que estão próximas de nós e, por causa desse erro, atribuamos ao Céu o que pertence à Terra.

(...)

É o caso, em primeiro lugar, da rotação diurna. Esta parece envolver todo o mundo, exceto a Terra e as coisas que estão à sua volta. Contudo, se admitirmos que o Céu não tem nenhum desses movimentos e que, ao contrário, a Terra gira de Ocidente para Oriente, refletindo atentamente, concluiremos que tudo se passa da mesma forma em relação ao nascer e se por do Sol, da Lua e das estrelas. E como é o céu que contém todas as coisas e constitui todo o espaço onde todos os corpos celestes têm o seu lugar, não se vê por que não é atribuído movimento ao que está localizado, mas ao que não está.

(...)

Conseqüentemente, não nos envergonhemos de afirmar que toda a região contida entre a Esfera da Lua e o centro da Terra passa através desse grande círculo, entre os restantes planetas, numa revolução anual ao redor do Sol. O centro do Universo está próximo do Sol e, permanecendo este imóvel, todo o movimento que aparece como seu é na realidade devido ao movimento da Terra.

Mas porque o Sol no centro? Isso é tão contra-intuitivo, é uma idéia tão estranha! Na verdade, Sol no centro, isso sim é misticismo! A idéia vem das seitas pitagóricas, na Grécia Antiga; o Sol, de onde provinha toda a luz, deveria ser o Astro Rei, o centro em espaço e em importância do Universo, tendo todos os outros como sua corte. Acontece que a tradição mística dos pitagóricos passava por um certo *revival* na época de Copérnico; os textos das correntes rivais à aristotélica estavam sendo paulatinamente traduzidos para o latim e chegando ao conhecimento da Europa, fundando o que, nesse fim de Idade Média, ficou conhecido como hermetismo. Copérnico, mesmo sendo um homem da Igreja, fazia parte dessa linhagem mística (havia muitos místicos na Igreja, bem como muitos não-místicos). Mesmo com sua insistência em estar tratando unicamente

do problema dos cálculos astronômicos, sua filiação à tradição hermética aparece de forma clara em trechos de seu livro, como:

No meio de todos encontra-se o Sol. Ora, quem haveria de colocar neste templo, belo entra os mais belos, um tal luzeiro em qualquer outro lugar melhor do que aquele donde ele pode alumiar todas as coisas ao mesmo tempo? Na verdade, não sem razão, foi ele chamado o farol do mundo por uns e por outros a sua mente, chagando alguns a chamar-lhe o seu Governador. [Hermes] Trismegisto apelidou-o de Deus visível e Sófocles em Elektra, o vigia universal. Realmente o Sol está como que sentado num trono real, governando a sua família de astros, que giram à volta dele. (...) Nós verificamos, portanto, nesta ordenação, a maravilhosa simetria do Universo e da grandeza das esferas que não se pode verificar em qualquer outra circunstância.

Em seu livro, Copérnico explica os movimentos dos astros de forma mais simples (matematicamente) e mais harmônica, segundo a visão hermética. Muito bonito. Mas nem todos partilhavam da concepção de mundo hermética que, entre outras coisas, é muito mais contra-intuitiva. Aliás, é uma concepção muito comum em seitas e reuniões de mistério: o mundo aparente é uma ilusão, a verdade é algo mais profundo por trás dessa ilusão. Não era a concepção de Aristóteles; este estava verdadeiramente interessado na verdade oferecida aos sentidos.

Segundo esse modelo de universo, a Terra não está parada, mas gira a uma altíssima velocidade, sem que nós sintamos. Além disso, ela não está mais no centro da criação; o Sistema de Mundo é agora um *Sistema Solar* – o Sol, astro errante que iluminava a Terra, aqui é o astro central da Ordem do Mundo. A Terra é que se torna um astro errante. Isso significa que a Terra é como os outros planetas: não deve existir nenhuma distinção entre Céus e Terra, porque agora a Terra também está nos céus, *entre* os planetas. E os planetas são iguais à Terra: cada um deve ser uma Esfera Material própria, com sua própria terra, suas próprias águas, suas próprias plantas, seus próprios seres vivos! É claro que nada disso são conclusões levantadas por Copérnico; mas outros depois dele, como Giordano Bruno, iriam explorar bem mais intensamente as coisas por este ponto de vista.

Olhemos com mais detalhes as conseqüências astronômicas/ matemáticas da concepção copernicana. Como dissemos, nessa nova perspectiva, é necessário distinguir entre as coisas, por assim dizer “reais” e “aparentes”. As posições dos astros no céu, por exemplo, não são mais suas posições reais, absolutas, mas posições aparentes, relativas à posição da Terra na sua própria órbita. Imagine por exemplo como conjunções, oposições e quadraturas de planetas passam a ser representadas como na figura 2.1

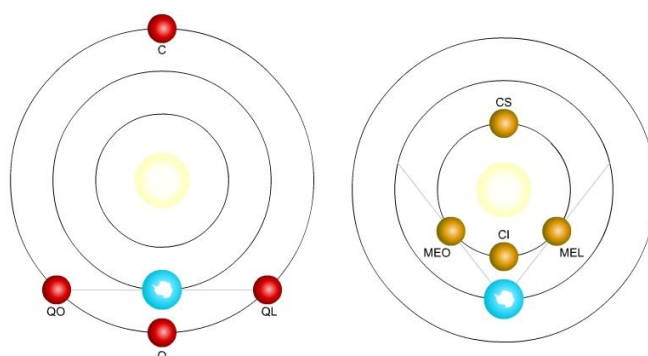


Figura 2.1: Posições especiais de um planeta interno e de um externo à Terra. Para o externo, C = Conjunção, O = Oposição, QL e QO = Quadratura Leste e Oeste, respectivamente. Para o interno: CI = Conjunção Inferior. CS = Conjunção Superior, MEL e MEO = Máxima Elongação Leste e Oeste, respectivamente.

Ou melhor, como os planetas internos passam a ser representados! Nesse modelo, o fato de nunca se afastarem muito do Sol é explicado simplesmente por eles terem órbitas internas à Terra. Assim, em vez de conjunção e oposição em pontos opostos da órbita, os planetas internos teriam CONJUNÇÃO INFERIOR (quando mais próximo da Terra) e CONJUNÇÃO SUPERIOR (quando mais distante).

Nesta última situação é que são observados os trânsitos, que é quando a sombra do planeta é vista se deslocando na superfície do Sol. Claro que isso só foi observado muito tempo depois, com o telescópio.

- 14- Uma característica bem marcante dos movimentos dos planetas no céu é o que chamamos de movimento retrógrado ou “laçadas”: em certos momentos, durante sua trajetória no céu, o planeta parece parar, caminhar na direção oposta no céu até um certo ponto e depois retomar sua trajetória normal. Em princípio, com epiciclos de Ptolomeu, conseguia-se uma explicação geométrica bem simples para o fenômeno (faça os desenhos e veja por você mesmo!) – embora essa descrição geométrica acabasse não se mostrando tão simples assim, em alguns casos. Neste modelo de Copérnico, com a Terra se movendo, é possível uma explicação geométrica simples do movimento retrógrado? (Mesmo que deixemos Copérnico usar alguns epiciclos para acertar os detalhes)
- 15- (OBA 2006) Na figura 2.2 a esquerda, apresentamos como estão dispostos em suas órbitas a Terra e Marte antes, durante e depois de uma situação de oposição e qual a trajetória aparente de Marte no céu, observado a partir da Terra.

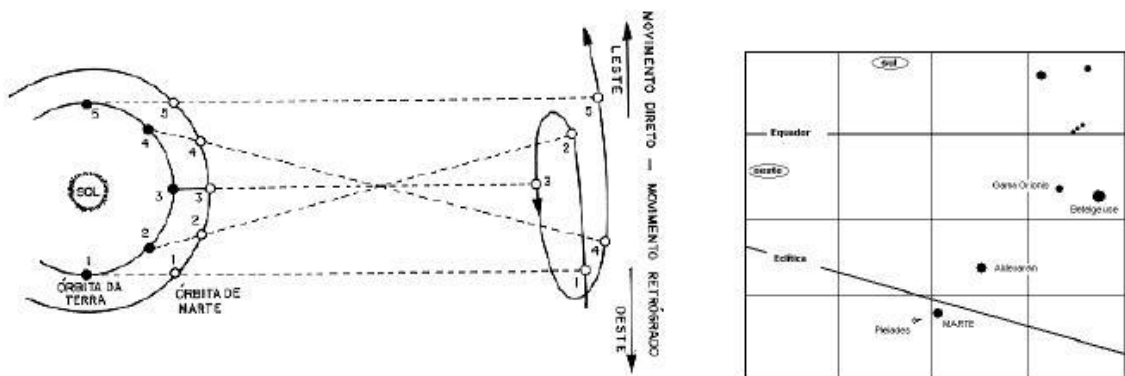


Figura 2.2: Figuras para o exercício 15

A última oposição de Marte ocorreu a 7/nov/2005 e a estação pós-oposição (uma das situações em que o planeta fica “parado” em relação às estrelas visto da Terra) em 11/dez/2005. Em 23/fev/2006 observou-se o alinhamento de Marte com Aldebaran (a estrela mais brilhante da constelação de Touro e portanto chamada alfa do Touro ou alfa Tauris) e com Bellatrix (a terceira estrela mais brilhante da constelação de Órion e portanto a gama de Órion ou gama Orionis), o que é mostrado na figura 2.2, à direita. Para que lado Marte estava se deslocando no céu por ocasião do alinhamento – leste ou oeste ?

- 16- (OBA 2002)
- (a) Sabendo que as distâncias médias do Sol à Terra e do Sol a Vênus são, respectivamente, 150 e 108,5 milhões de km, estime, para uma cidade situada na linha do Equador, até que horas, no máximo, se pode ver Vênus se o Sol se põe às 18h, sendo Vênus neste dia um astro vespertino. Despreze o efeito da refração atmosférica.

- (b) O mesmo exercício para Júpiter, raio 778,3 milhões de Km.
- 17- Imagine que viajemos a Marte. A que distância angular máxima do Sol podemos ver a Terra? Se viajarmos a Netuno, qual será essa distância angular máxima? E se fôssemos a Mercúrio, qual seria?
- 18- Em que locais/ocasiões Vênus pode ser visto à meia-noite?
- 19- Durante um eclipse lunar, a Lua pode cobrir Júpiter? E Vênus?
- 20- Em que condições ocorrem trânsitos de Vênus?
- 21- Sabendo que o período de revolução de Marte é quase o dobro do da Terra (684 dias), e que os períodos de rotação dos dois planetas são muito próximos (o de Marte é 24 h 37 min), calcule a diferença entre o dia solar e o dia sideral marcianos.
- 22- Fobos, um dos dois satélites de Marte, tem uma peculiaridade interessante: seu período orbital é de 7,7 horas – muito menor que o período de rotação do seu planeta! Como deve ser o movimento de Fobos no céu de Marte? Quanto vale seu período sideral, visto da superfície marciana? E o sinódico?
- 23- Fobos está a uma distância de 2,8 raios marcianos do centro do planeta. Quantas vezes maior é o diâmetro da Lua vista no nosso céu que de Fobos visto no céu de Marte (o diâmetro de Fobos é de 26km)?

Capítulo 3

Pós-Copérnico I: Cosmologia

Se há uma lição importante a se passar nos nossos tempos, é a de que os seres humanos é que fazem as coisas, que fazem o mundo como ele é. Se o universo copernicano se tornou o universo como entendemos, é porque homens trabalharam para isso, e conseguiram que sua visão se tornasse a visão compartilhada pelas comunidades. Assim, falar de Copérnico está longe de ser suficiente para justificar a adoção da nova cosmologia; até ali, tratava-se somente de uma visão de mundo minoritária que, apesar de estranha, acompanhada de cálculos geométricos impressionantemente elegantes e simples. Ou, como dito por Thomas Kuhn, seu livro foi aceito nos círculos astronômicos *“apesar de, e não por causa de, suas estranhas hipóteses cosmológicas”*.

Dentre os homens que transformaram a obra copernicana em cosmologia para além de modelo matemático¹, podemos começar mencionando Galileu Galilei. Como ainda veremos, ele foi um nome muito importante nas discussões físicas e cosmológicas do século XVII. Para a cosmologia, sua contribuição gira em torno de um curioso e inovador instrumento, inventado por navegadores holandeses: tratava-se de um tubo com duas lentes que permitia, a grandes distâncias, ampliar as imagens das partes do navio, até mesmo para se ver a bandeira que se aproximava. Naturalmente, uma grande arma contra ataques de piratas – quanto antes se pudesse reconhecer o navio como inimigo, mais fácil era fugir dele. Quando soube da invenção, o matemático e engenheiro de Pisa ficou empolgadíssimo, e de pronto construiu sua própria cópia do instrumento. Mas ele estava menos interessado em navios do que em outras coisas, como aquela que foi a primeira coisa que os povos antigos viram ao olhar para cima.

Galileu foi mesmo muito importante no reconhecimento do universo copernicano. Suas primeiras e mais marcantes contribuições datam de 1610, num dos seus livros mais famosos: o *NUNCIUS SIDEREUS* (“A Mensagem das Estrelas”).

A primeira observação relatada se trata do limite entre luz e sombra na superfície da Lua, em uma certa fase. Ao contrário do que parece a olho nu, esse limite não é um arco perfeito, mas uma linha cheia de irregularidades, cheia de “pontas” que variam conforme a sombra anda. O genial foi como Galileu interpretou essas irregularidades: como acidentes de relevo! Isso mesmo; a Lua (e, como ele imaginava, os outros planetas também) é tão similar à Terra que tem montanhas, escarpas, planícies, vales... Além do que, as manchas escuras na superfície lunar não possuem essas pontas, são bem mais regulares – como *mares*! Não é de se esperar que nosso astro companheiro também possua vegetação, animais, habitantes como os da Terra?

A segunda observação descrita no *Nuncius*, que nos interessa, diz respeito a quatro pequenos “planetas” (astros errantes) que não eram vistos a olho nu, e que nunca se afastavam muito de Jú-

¹Essa distinção lembra a que Thomas Kuhn faz do que são as características de um esquema conceitual: (i) *economia conceitual*, resumindo longuíssimos relatos e tabelas e observações em uma simples fórmula ou princípio; e (ii) crença do cientista, sendo o esquema a forma como o cientista acredita que o mundo *realmente* é. Tudo o que falamos sobre a Esfera Celeste, por exemplo, falamos por que é um resumo conceitual fabuloso, de onde se pode visualizar facilmente quase todos os fenômenos celestes, mesmo apesar de não ser mais um modelo que encaramos como “real”.

pter. Assim, da mesma maneira que já era garantido que pelo menos Vênus e Mercúrio giravam em torno do Sol, a Lua em torno da Terra, esses quatro novos corpos deveriam girar em torno de Júpiter². Além disso, fica aqui desacreditada de vez a idéia da Terra como centro do Universo; um universo assim não pode ter senão muitos centros, cada um tendo os próprios corpos que orbitam ao seu redor, constituindo seu próprio sistema. É de se esperar, também, que cada uma das estrelas no céu seja também centro de seu próprio sistema, como o Sol, cada uma com seus próprios planetas orbitantes, e assim inumeráveis corpos num imensurável universo... Foi o que o frade Giordano Bruno defendeu com tanto fervor: a infinitude do universo e a infinita multiplicidade de toda a criação. Um universo com oito esferas não é digno daquele Deus. A infinita obra de Deus louva sua infinita grandeza.

Com o modelo de Copérnico, esse grande epiciclo se tornava desnecessário (embora permanecessem os menores, para as pequenas correções); mas ninguém contava com o fato de que os dois modelos faziam previsões diferentes sobre a iluminação do Planeta da Manhã. Algumas décadas depois é que Galileu conseguiu observar *fases de Vênus*, como as da Lua!, dando mais um ponto para a teoria copernicana!

- 24- Explique a diferença entre as fases que Vênus teria no modelo dos epiciclos de Ptolomeu e no modelo de Copérnico. O que Galileu deve ter observado que o fez concluir que Vênus realmente girava em torno do Sol? Sem querer dar a respostas mas já dando, aqui vai a figura:

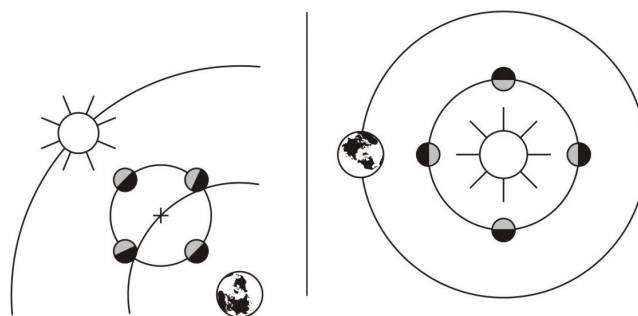


Figura 3.1: Fases de Vênus

- 25- Marte também passa por diminuições de brilho, mas não tão evidentes quanto as de Vênus. De fato, não há a fase nova, nem as fases muito delgadas. Explique porque, e como isso possibilitou a Galileu suas conclusões sobre a posição de Marte em relação à Terra.
- 26- Para os outros planetas, ocorre o mesmo fenômeno, as fases? Se sim, porque Galileu só os observou em Vênus e em Marte?
- 27- Nossa Lua é visível a olho nu de Vênus? O que isso poderia significar para um Galileu venusiano, que estivesse testando os primeiros telescópios da história de seu planeta?

Repare, entretanto, que o livro de Galileu não é astronômico. Em nenhum momento ele discute a qualidade da descrição dos dados; números nem precisam aparecer. A discussão é eminentemente *cosmológica*, e o telescópio de Galileu não serve para nada além de reforçar seus

²Essas luas ficaram, graças a isso, conhecidas como LUAS GALILEANAS. Galileu mesmo referia-se a elas por números: Lua I, II, III e IV. Mais tarde, contudo, elas também ganharam nomes provenientes da mitologia grega, mais precisamente de quatro das amantes de Zeus (Júpiter): Io, Europa, Ganimedes e Calisto.

argumentos a favor de uma nova *visão do universo*. Isso fica claro na sua obra máxima: *Dialogo sopra i Due Massimi Sistemi Del Mondo, Tolemaico e Copericano* (Diálogo sobre os Dois Máximos Sistemas de Mundo, Ptolomaico e Copernicano).

Começemos pelo título, que já apresenta um problema: não havia dois, mas três modelos astronômico-cosmológicos vigentes na época. O astrônomo observacional Tycho Brahe havia desenvolvido um terceiro, que na verdade era o mais aceito dos três, no tempo de Galileu, porque unia o melhor dos mundos: levava em conta as melhorias geométricas e harmônicas introduzidas por Copérnico, mas dispensava os problemas físicos e cosmológicos que aquele havia criado. Tratava-se do seguinte: Mercúrio e Vênus devem mesmo girar em torno do Sol, o contrário não podia mesmo ser sustentado. Também é melhor que Marte, Júpiter e Mercúrio orbitem o Sol. Mas isso não significa que a Terra também precisa girar em torno do Sol. De fato, mesmo que os demais planetas girem em torno do Sol, este pode girar em torno da Terra! Afinal, a Lua mesma não faz isso, mesmo segundo Copérnico?

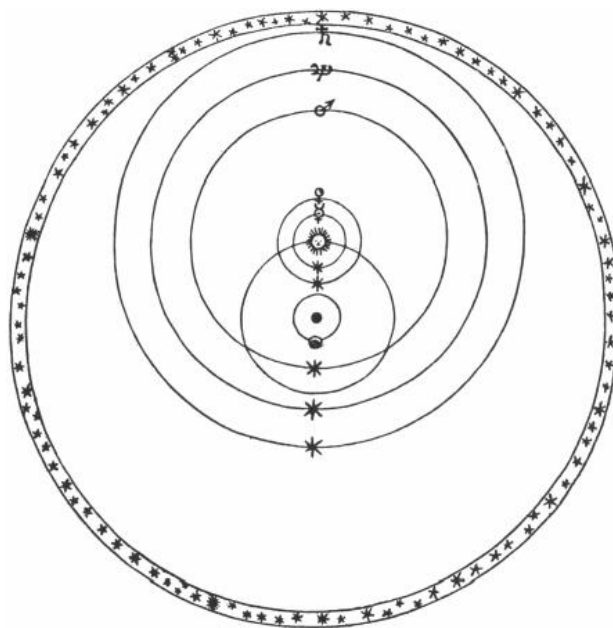


Figura 3.2: O universo de Tycho Brahe, tirado de seu próprio livro, *De mundi aetherei recentioribus phaenomenis* (Fenômenos recentes no mundo etéreo), Uranibourg, 1599. Intuitivo como o de Aristóteles e de Ptolomeu, harmônico e bem constituído como o de Copérnico.

Talvez Galileu pensasse que levar em conta o modelo de Tycho enfraqueceria seus argumentos contra o universo de Ptolomeu, a favor de Copérnico. Talvez realmente não achasse que fosse um modelo original, ou que merecesse ser levado a sério. De uma forma ou de outra, o livro de Galileu não menciona a existência do modelo que era mais usado.

O livro está organizado em forma de diálogo, entre Filipo Salviati, defensor do copernicanismo e Simplicio (interessante a escolha do nome...), defensor da tradição e de Aristóteles. A primeira parte do livro dedica-se a mostrar como o universo aristotélico/ptolomaico é insustentável. Na segunda parte, Salviati se dedica a refutar um a um os argumentos contra o movimento da Terra. É nesta parte que Galileu tem que se contorcer mais, e nascem as idéias físicas mais interessantes. Afinal, é impossível conceber uma Terra movendo-se, com pessoas em cima dela, sem pensar em *inércia* ou no princípio de relatividade dos movimentos.

- 28- Um argumento forte usado contra o movimento da Terra era que uma bola jogada para cima cairia de volta na Terra em outro ponto, já que o planeta mudaria de posição enquanto a

bola subisse. O contra-argumento dessa idéia só foi possível bem depois de Copérnico ter enunciado a sua teoria; o novo modelo só se tornou completo com a Mecânica de Newton. Refute o argumento da bola usando uma idéia newtoniana.

Em suma, nas palavras de Paolo Rossi,

O *Dialogo* não é um livro de astronomia pelo fato de não expor um sistema planetário. Totalmente voltada a demonstrar a verdade da *cosmologia* copernicana e esclarecer as razões que tornam insustentável a *cosmologia* e a *física* aristotélica, a obra não aborda os problemas dos movimentos dos planetas e de uma sua explicação.

Mesmo na apresentação do esquema astronômico de Copérnico, Galileu é muito menos cuidadoso que o autor original, além de suas próprias contribuições astronômicas serem problemáticas. A rigor, como confiar que um instrumento como o telescópio realmente mostre as coisas reais ampliadas, uma vez que não existia uma teoria óptica que o justificasse ou explicasse o seu funcionamento? Mas isso não impediu que Galileu usasse o telescópio como um argumento poderoso a seu favor, nem fez com que deixasse de enxergar as montanhas lunares, os mares e a atmosfera do satélite, que justificaria que há outros mundos como o nosso.

Claro, pode-se argumentar também que o telescópio de Galileu era muito “primitivo”, continha muitas aberrações. Tanto que, no mapa de Galileu da superfície da Lua, aparecem muitas crateras que não são observadas hoje. Podemos argumentar que essas aberrações foram as que fizeram Galileu ver uma atmosfera lunar, ente em cuja existência não acreditamos hoje. Mas, embora a aberração deva ter contribuído de fato para isso, é um argumento claramente insuficiente. O que de mais interessante mostra este exemplo é como as nossas concepções teóricas prévias (que sempre existem) condicionam a nossa observação – mesmo porque são elas que vão determinar o que estamos procurando, que perguntas vamos fazer à natureza. Galileu certamente não fez observações inocentes da Lua e de repente a Verdade o iluminou; ele sabia muito bem o que estava procurando, que ponto de vista ele queria provar, fazer vencer. Assim, a importância de Galileu, muito mais do que como observador ou teórico, é como polemista, como defensor apaixonado de um sistema que, encarado como visão de mundo, tinha muito contra si mesmo. Se o conhecimento humano é produzido como fruto de ardentes debates entre intelectuais, em poucos deles isso fica tão claro como em Galileu.

Para encerrar o assunto, fiquemos com uma poesia inglesa que retrata o clima de confusão e mudanças da época³.

A nova filosofia colocar tudo em dúvida
o elemento Fogo se apagou por completo,
O Sol está perdido bem como a Terra; e em homem algum
a mente não lhe ensina mais onde encontrá-la.
Os homens confessam espontaneamente
que este mundo está acabado,
enquanto nos planetas e no firmamento
muitos procuram o novo. E vêem que o mundo
está despedaçado mesmo em seus átomos.
Tudo cai aos pedaços, toda coerência desapareceu,
toda justa providência, toda relação:
príncipe, súdito, pai, filho são coisas esquecidas,
porque cada homem pensa ter conseguido, sozinho,
ser uma Fênix...

John Donne, *Anatomy of the World*. 1611

³Citado de Lovejoy, A. *A Grande Cadeia do Ser*.

Capítulo 4

Pós-Copérnico II: Observadores

Décadas antes de Galileu, entretanto, o debate já estava estabelecido no meio dos astrônomos profissionais. Aqui, o personagem de destaque é um dinamarquês, longe do centro em que ferviam os debates¹ *Tycho Brahe*, o maior astrônomo observacional da história da astronomia. Suas primeiras observações datam de 1563, quando Tycho tinha 16 anos, e continuaram por toda a vida, chegando a uma precisão assustadora. Dono de técnicas inovadoras e dos melhores instrumentos até então construídos.

Na noite de 11 de Novembro de 1572, voltando para casa, o jovem Tycho (então com 26 anos) viu na constelação da *Cassiopea* uma estrela muito brilhante, que ele nunca havia visto antes! Observando cuidadosamente, de fato, via-se que antes ela não existia! Medindo sua paralaxe, ele chegou então à impressionante conclusão de que aquele brilho estava muito além das distâncias planetárias – na altura das estrelas fixas! Neste ponto, não era possível seguir Aristóteles e relegar aquilo a um fenômeno atmosférico. No ano seguinte, 1573, Tycho publica o livro *De Stella Nova* (Sobre a Estrela Nova), explicando suas observações. A Nova Estrela teve o seu brilho cada vez mais tênue, até que ela desapareceu definitivamente no começo de 1574. De todas as transformações pelas quais o céu passava, então definitivamente não seria mais imutável.

Dois anos depois da publicação do livro, o astrônomo ganhou um singelo presente do rei dinamarquês: uma ilha! Era a ilha Hveen, no Mar do Norte, habitada por 40 famílias (que então se tornariam súditas de Tycho), onde se financiaria observatórios e laboratórios dotados com o que havia de mais moderno em termos de observação (ainda não telescópios), bem como um centro de ensino para jovens astrônomos. O observatório foi chamado de URANIBOURG, o Castelo dos Céus², para onde os melhores astrônomos da Europa passaram a convergir.

Lá Tycho prossegue seu estudos sobre a paralaxe dos corpos errantes; observando o cometa de 1577, conclui que também ele se move acima da órbita lunar, entre os demais planetas. Em carta a um de seus discípulos, escreve:

Na minha opinião, a realidade de todas as esferas deve ser excluída dos céus. Os cometas não seguem a lei de nenhuma esfera, mas agem em contraposição a elas. O céu não é um corpo duro e impenetrável, composto de esferas reais, como muitos acreditaram até o presente momento, mas é fluido e livre, aberto em todas as direções, de tal forma a não colocar qualquer obstáculo à livre corrida dos planetas. (...) As esferas não existem realmente, são admitidas somente em benefício da aprendizagem.

¹O centro político da Europa, naquele tempo, era a Itália. Era onde ficavam os reinos e as cidades mais poderosas (Gênova, Veneza, Florença...) e onde ficava o maior poder político: o do papa. O Reino da Dinamarca, por outro lado, não tinha nenhuma importância especial.

²Na mitologia grega, *Ouranós* é o nome dado ao deus dos céus, ou mesmo ao próprio céu. *Ouranós* é marido de *Gaia*, a Terra, e lança sobre ela seu líquido reprodutivo - a chuva - que gera toda a vida na Terra.

Com a ascensão do novo rei dinamarquês, terminou o financiamento à ilha dos céus, e Tycho deixou Uranibourg e a Dinamarca em 1597, mudando-se para a corte de Praga. Lá contratou como assistente um jovem astrônomo alemão, com quem o prestigiado dinamarquês já vinha trocando correspondências. O astrônomo alemão era Johannes Kepler e o trabalho era elaborar um modelo descrevendo o movimento de Marte, usando os novos e superiores dados que Tycho obtivera em Uranibourg. Kepler aceita o emprego em 1600, mas seu chefe morre logo depois, em 1601, deixando-o sozinho com o abacaxi.

Foram setenta tentativas de Kepler, todas descritas por ele mesmo em um livro (ele achava fundamental que, para entender suas idéias, as pessoas conhecessem em detalhes os caminhos que levaram a elas). Ao contrário de Tycho, Kepler era um vigoroso defensor do universo copernicano. Ele tentou todas as variações de universo centrado no Sol, introduziu epiciclos, equantes, tentou outras figuras geométricas, círculos achatados, círculos com centro deslocado. . . Conseguiu previsões que se diferiam dos dados observacionais de Tycho por no máximo 8' de arco, um erro aceitável por qualquer astrônomo. Mas não por Kepler. Ele confiava na acurácia de seu predecessor; não admitia um erro menor que 4' nas observações!

Kepler estava quase desistindo, até que se voltou ao movimento da Terra (que era tomado como certo por ele). A velocidade do Sol (da Terra) era maior quando eles estavam mais próximos e menor quando eles estavam mais afastados. Partindo de uma premissa errada e efetuando cálculos que continham erros que anulavam o erro da premissa (!), Kepler então chega a uma conclusão relevante: seja qual for a forma da órbita, *a linha que liga o Terra ao Sol varra áreas iguais e tempos iguais* (o que ficaria conhecido como *Segunda Lei de Kepler*). Se vale para a Terra, deve valer também para Marte, bem como para todos os outros planetas. Se o planeta se afasta e se aproxima, ele passou a tentar modalidades de círculos ligeiramente achatados – até que, em 1606, finalmente conseguiu uma forma geométrica simples e aceitável: a *elipse*! Os planetas se moveriam em elipses em torno do Sol, o que se tornaria a *Primeira Lei de Kepler*.

4.1 A Elipse

Uma ELIPSE pode ser construída como uma curva achatada entre duas circunferências: tangenciando uma interna e outra externamente, em seus pontos opostos. Escolhendo um mesmo espaçamento angular em cada um dos círculos e traçando retas horizontais do interior e verticais do exterior, obtemos os pontos da curva que nos interessa.

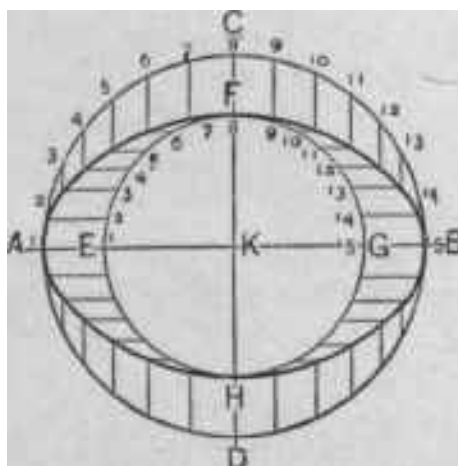


Figura 4.1: Elipse achatada entre dois círculos.

Outra forma é a seguinte: Fixe dois gravetos de madeira no chão, a uma distancia qualquer.

Tome depois uma corda; amarre as duas extremidades da corda nos dois gravetos. Pegue um terceiro graveto, com a ponta fina, e ponha-o em pé, apoiado na corda. Vá movendo o graveto de forma que ele sempre esteja apoiado na corda e as duas partes da corda (entre o graveto solto e cada um dos gravetos fixos) permaneçam sempre esticadas. O desenho feito no chão pelo graveto móvel é o que chamamos de elipse: o conjunto de todos os pontos cuja soma da distância de dois outros pontos é fixa. Esses dois pontos, das extremidades da corda, são os FOCOS da elipse; a distância entre eles, portanto é a distância focal.

Fazendo uma construção mais formal: tome dois pontos quaisquer, F_1 e F_2 (serão os focos da elipse) separados por uma distância $2c$ (o motivo de ser $2c$ e não c é comodismo futuro). Marque agora todos os pontos tal que a soma da distância do ponto até F_1 com a distância do ponto até F_2 seja uma constante, $2a$. O resultado é a curva vista na figura 4.2.

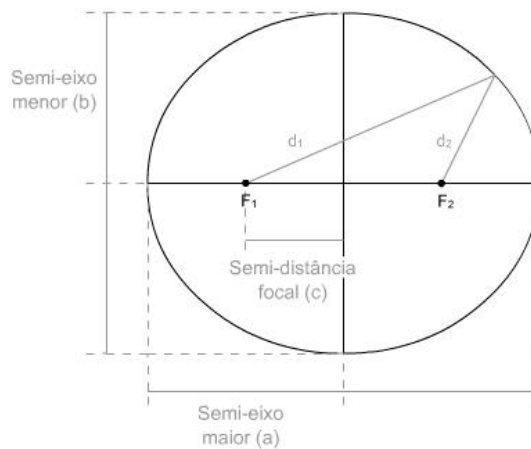


Figura 4.2: A Elipse

Alguns pontos notáveis da elipse são dois: os que ficam na reta que liga F_1 a F_2 e os dois que ficam na reta perpendicular a essa passando pelo ponto médio entre F_1 e F_2 (o centro da elipse). Os primeiros dois pontos estão a uma distância a do centro da elipse. Fica fácil perceber que a distância aos focos é $a - c$. Os outros dois estão a uma distância a de cada um dos focos.

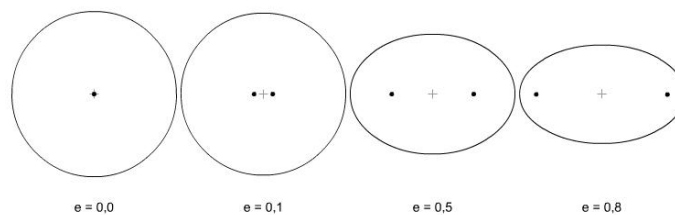


Figura 4.3: Quatro elipses de excentricidades 0, 0,1, 0,5 e 0,8. Repare que a primeira (uma circunferência perfeita) e a segunda (mais excêntrica que as órbitas da maior parte dos planetas), são quase indistinguíveis. Na quarta elipse, por outro lado, os focos quase tocam a borda.

É fácil perceber que, quanto maior a distância $2c$ entre os focos, em relação à distância $2a$ dos pontos, mais achatada é a elipse. Assim, para medir o grau de achatamento de uma elipse, definimos sua EXCENTRICIDADE COMO:

$$e = \frac{c}{a}$$

Ela varia entre zero (caso em que $c = 0$ e a elipse se torna uma circunferência!) e um (caso em que $c = a$ e os pontos estão todos em um segmento de reta, no caso de b ser igual a 0, ou uma parábola). Para a órbita de Marte, $e = 0,093$; para Vênus, $e = 0,0068$. Ou seja: as órbitas são muito próximas da circunferência, e por isso foram necessárias observações muito precisas para que as circunferências não fossem suficientes para descrever os movimentos.

4.2 De volta ao assunto

Os resultados de 1606 são publicados no *Astronomia Nova*, em 1609 – ano em que Galileu observava o céu com o telescópio. O livro explica detalhadamente todas as tentativas de ajustar a órbita de Marte, bem como suas duas conclusões mais acertadas, que deveriam ser estendidas para todos os planetas: as órbitas planetárias são elipses (o que seria encarado como a Primeira Lei de Kepler) e os planetas se movem nessas elipses de forma que a velocidade da área orbital varrida é sempre a mesma (o que se tornará a Segunda Lei).

É relevante dizer que o Kepler, como Galileu, não escreveu lei alguma. Diferente de Newton, ela não pensava no universo como funcionando por leis. Ele, bem como muitos de seus contemporâneos, estavam fundamentalmente interessados nas harmonias que reinavam no universo. O sistema criado por Deus e presidido pelo luminoso Sol deveria ser belo e harmônico; todas as coisas, celestes e terrestres, estavam de alguma forma relacionadas. O que esses homens queriam era, justamente, contemplar essas relações. Se a caricatura de Galileu é a de um polemista, a de Kepler pode ser a de um místico. Em sua linguagem, em suas crenças, nele é que se vê mais claramente a associação do misticismo e do hermetismo com a defesa do universo copernicano governado pelo Sol.

Quando jovem, Kepler já havia escrito um livro buscando harmonias celestes; para ele, a distância entre as esferas de Saturno e Júpiter era a exata para que se inscrevesse um cubo entre elas; entre a de Júpiter e a de Marte, se inscreveria um tetraedro, e assim para os outros sólidos regulares (octaedro, dodecaedro e icosaedro). O livro, *Mysterium Cosmographicum*, foi o meio pelo qual Tycho soube da existência do jovem. A idéia era muito bela, harmônica, mas não podia ser sustentada seriamente pelas observações. Mesmo assim, Tycho ficou bastante interessado na obra, o que iniciou o contato entre eles³.

Sua vida passou, muitas obras importantes foram concluídas e o interesse pelas Harmonias do Mundo nunca esfriou – como se pode ver no seu grande livro de maturidade, *Harmonices Mundi*, de 1618 (já com 47 anos de idade). Neste livro, Kepler poderia finalmente realizar suas aspirações de juventude, e desta vez levando em conta a crítica que Tycho fez, muitos anos antes, ao *Mysterium Cosmographicum*: as harmonias devem ser buscadas *depois* das observações, e não *antes* delas.

No seu livro de maturidade, Kepler insiste na associação entre harmonia musical e harmonia planetária – cada planeta corresponde a uma nota, faz uma voz: o Universo é uma grande Sinfonia. Desta vez, tudo partindo dos dados observacionais de Tycho, tratados por todos esses anos. No terceiro capítulo do livro, ele relata uma interessante conclusão:

É um fato absolutamente certo e exato que a proporção entre os TEMPOS PERIÓDICOS de dois planetas escolhidos à vontade é exatamente como a potência de TRÊS MEIOS da proporção entre suas DISTÂNCIAS MÉDIAS, isto é, entre suas próprias órbitas.

³Galileu, por outro lado, repudiava esse lado em Kepler. Ele não entendia como alguém iluminado, que compreendia a verdade do universo copernicano, podia dar-se àquelas harmonias, a ações a distância, ou a qualquer daquelas infantilidades místicas.

Em linguagem matemática contemporânea: Sendo P_1 e P_2 os períodos de dois planetas, e a_1 e a_2 os raios médios de suas órbitas, temos que

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Dito de outra maneira: o quadrado do período de um planeta é proporcional ao cubo do raio médio de sua órbita; a razão entre eles é uma constante, igual para todos os planetas.

$$p^2 = ka^3$$

Relação que ficaria conhecida mais tarde como Terceira Lei de Kepler. Pela primeira vez, trata-se de um princípio que rege a natureza e foi deduzido exclusivamente da comparação entre dados observacionais sistemáticos. Poderíamos dizer, “a primeira lei observacional escrita”! Quantos legados à ciência deixados por um místico!

- 29- Sem conhecer gravitação, o que garante que o período orbital de Marte seja maior que o da Terra?

4.3 Titius e Böde

Muito tempo depois de Kepler, outra proposta harmônica importante, embora muito menos bela, foi criada em 1766 por Johan Daniel Titius, e publicada sem citação em 1772 por Johan Elert Böde. A então chamada *Lei de Titius-Böde* dizia o seguinte em relação as distâncias médias dos planetas ao Sol: comece com o número 0,4, a primeira distância. Agora some 0,3: 0,7 é a segunda distância. Agora some de novo 0,3, e terá 1, a terceira distância. Agora vá somando o dobro do que somou da última vez: para a quarta distância, some 0,6; para a quinta, 1,2 e assim por diante. Algebricamente:

$$a = 0,4 + 0,3 \times 2^n$$

A comparação da lei de Titius-Böde com os valores observacionais medidos pode ser vista na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Comparação da lei de Titius-Böde com os valores observacionais medidos. Os corpos marcados com asterisco (*) não eram conhecidos na época em que a lei foi formulada.

Planeta	n	A (UA)	Distância Média Observada
Mercúrio	$-\infty$	0,4	0,39
Vênus	0	0,7	0,72
Terra	1	1	1
Marte	2	1,6	1,52
*Ceres	3	2,8	2,77
Júpiter	4	5,2	5,2
Saturno	5	10	9,54
*Urano	6	19,6	19,18
*Netuno	—	—	30,06
*Plutão	7	38,8	39,52

Essa lei só ganhou importância em 1781, quando William Herschel descobriu Urano, que estava exatamente onde a lei previa ($n=6$). Então passou-se a afirmar que algum corpo deveria estar no buraco de $n = 3$; em 1801, Ceres foi observado pela primeira vez. Contudo, em 1846, por perturbações na órbita de Urano, Netuno foi descoberto, e sua distância era muito diferente da prevista pela lei para $n = 7$. Além disso, foram sendo descobertos mais objetos com órbitas próximas à de Ceres (no que se configuraria como Cinturão de Asteróides); diante dessas coisas, a lei foi ficando fisicamente desacreditada, relegada a uma mera coincidência geométrica.

Capítulo 5

Pós-Copérnico III: Físicos

Kepler encerrou as discussões geométricas e observacionais sobre o sistema de mundo. Tornou-se consenso que o dele era o esquema geométrico que descrevia de forma mais simples as observações planetárias – era o modelo que descrevia melhor as melhores observações já feitas, as de Tycho. Mas os aspectos descritivos não eram suficientes; faltava preenchê-los com as explicações físicas, materiais. Um problema que se punha imediatamente ao novo sistema era o da *gravidade dos corpos*. Se antes, a gravidade era a tendência dos objetos irem em direção ao centro do Universo, graças aos elementos pesados que o compunham, agora que o centro é onde está o Sol – ou pior, não há centro – o que dizer? Mesmo a teoria dos quatro elementos fica deficiente! Copérnico mesmo esboçou uma resposta, ainda que bastante incipiente:

Havendo, pois, vários centros, não será temerário duvidar se o centro do mundo será, de fato, o centro da gravidade terrestre, ou qualquer outro ponto. Quanto a mim, penso que a gravidade outra coisa não é senão um certo desejo natural das partes para que se encontrem na sua unidade e integridade, reunindo-se em forma de esfera.

Com isso cada planeta, cada esfera material, terá a própria gravidade, bem como tem seus próprios corpos que os orbitam. Cada planeta é, de fato, um micromundo. Mas os corpos orbitantes também precisam de uma explicação, agora que não faz mais sentido falar do éter que tende a se mover em círculos. Será que, como Descartes sugere, o movimento dos planetas é gerado por algum movimento material, que os arrasta ou os faz girar de alguma forma? Ou há alguma ação oculta que gera esse tipo de trajetória? Será que há alguma relação com a gravidade – que afinal também não tem ainda uma explicação satisfatória?

Além do mais, a falta de simetria das órbitas elípticas agrava o problema da física dos movimentos celestes: nesta situação, o “movimento circular natural dos corpos celestes” já não tem nenhuma validade, porque o movimento não é mais circular. Além disso, em especial depois das observações de Galileu, não há mais nenhum motivo para considerar a *física celeste* diferente da *física terrestre*. De alguma forma, era necessário explicar as razões físicas para os movimentos elípticos. O próprio Kepler, que não conhecia a inércia, sugerira uma: o Sol emana certos “raios” que, como os de luz, vão enfraquecendo conforme se afastam do centro. Esses raios, conforme o Sol gira, geram uma força motriz nos planetas, fazendo-os percorrerem suas órbitas (repare que a explicação está de acordo com a Segunda Lei de Kepler¹).

Contudo, essa hipótese não se sustentaria durante muito tempo; dentre outros motivos, porque a rotação do Sol (calculada pela observação das manchas solares, feita na época com o

¹Como visto na definição de fluxo luminoso, os raios se espalham com o quadrado da distância. Por outro lado, a área de um setor esférico (podemos considerar setores esféricos, se estivermos pegando setores suficientemente pequenos cresce com o quadrado do raio. Assim, os dois efeitos se cancelam e a incidência destes “raios magnéticos” por unidade de área deveria ser constante – gerando uma velocidade constante por unidade de área.

telescópio) era demasiado rápida para estar de acordo com a teoria. Mas a proposta – mística, condenada por Galileu – de que o Sol podia, à distância, fazer os planetas se moverem, esta permaneceria viva em uma das correntes do debate. Pelo menos cinco gerações de físicos, naquelas décadas, trabalharam para uma versão mais aperfeiçoada da idéia.

5.1 Descartes

Claro, como toda discussão, existem sempre as opiniões rivais. Aqui podemos voltar a citar o francês René Descartes. Descartes marca sua posição por defender os fundamentos racionais do conhecimento humano (penso, logo existo) e a descrição matemática, algébrica, da geometria (pense no plano cartesiano e em toda a sua aplicação na descrição das formas). Além disso, ele foi um dos principais nomes defensores da “filosofia mecânica”: todo o universo pode ser descrito por leis e analogias com processos mecânicos; tudo, até mesmo o funcionamento do corpo humano: Afinal, os vasos sanguíneos não funcionam como um sistema hidráulico, cujo bombeamento se faz pelo coração? Os músculos e articulações não são como sistemas de cordas, molas e polias, usados como tração para realizar trabalhos? Os movimentos do pulmão, dos intestinos, da bexiga, todos funcionando em termos de contração e expansão; todos podem ser imitados pelas máquinas.

Assim, como defensor da visão de mundo mecânica, Descartes não podia explicar movimentos de corpos se não fosse por contato entre eles. Segundo sua teoria, o universo inteiro era preenchido por matéria, por um líquido composto de pequenas partículas; para ele a existência do vácuo era impossível (assim como para Aristóteles)². Sendo mais profundo, o espaço e a matéria contida por ele não são coisas diferentes: o espaço é definido pela matéria e pelas suas posições relativas. Um universo que aqui não era mais esférico e fechado (as esferas já haviam ruído, bem como a esfera das estrelas fixas), mas indefinidamente estendido, moldado por matéria indefinidamente abundante. Neste universo, o movimento não é um processo, mas um estado natural dos corpos – e assim é retomada a idéia galileana de inércia. Mas aqui sim a inércia é a tendência de se mover indefinidamente em linha reta; não há mais espaço para movimentos circulares no universo do plano cartesiano³: toda curva é uma composição de movimentos lineares (no eixo x e no eixo y, por exemplo).

Diferente de Galileu, que estava mais argumentando em defesa de uma idéia do que construindo um corpo sólido de conhecimento, em Descartes vemos a genuína construção de um *sistema físico completo*, de um novo universo, uma nova ordem geral que abarcasse todas as coisas. O primeiro candidato a substituir, como um todo, a velha visão de mundo de Aristóteles. Esse era o propósito do seu *Principia Philosophiae* (Princípios de Filosofia). Articulado matematicamente, partindo, como Newton, de leis gerais do universo, é um dos primeiros, naquele debate, a discutir a origem do universo: a partir do estado inicial e regido pelas leis gerais que o regem, como o universo se desenvolveu e chegou a ser como ele é hoje?

Para os movimentos celestes, enfim, Descartes usaria a idéia de força centrífuga. Como o movimento natural é o movimento retilíneo, quando a matéria se move circularmente, ela tende a se desviar, a se afastar do centro da sua trajetória. Assim, da agitação inicial da matéria, formaram-se turbilhões, vórtices, em torno das quais a matéria se afasta, girando. No centro de um dos inúmeros vórtices condensou-se o Sol. Em torno gira um turbilhão de matéria sutil e outros corpos condensados – os planetas. Mas a Terra mesma também é o centro de um turbilhão, no qual gira a Lua; da mesma forma, em torno de todas as estrelas do universo há turbilhões e matéria girando e escapando centrifugamente.

²Sobre o vácuo: Se existisse um nada existente, seria uma realidade contraditória.

³Para Galileu o movimento retilíneo infinito era impossível; “corpos não se movem para onde é impossível chegar”.

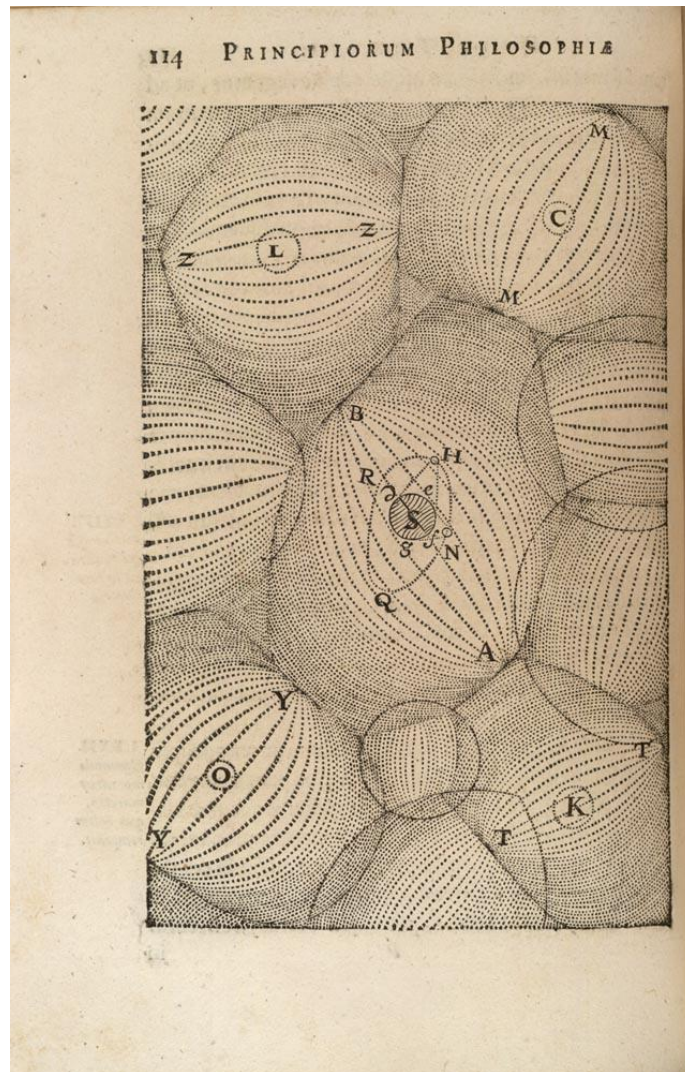


Figura 5.1: Página do próprio *Principia Philosophæ* mostrando os vórtices. Repare, no detalhe do centro, o sistema solar.

Em contraposição aos racionalistas e mecanicistas havia os empiristas ingleses, resumidos na figura de Francis Bacon. Descartes era bastante criticado pelos empiristas por não se perguntar como a natureza efetivamente age, mas ficar discutindo como ela deve agir. O francês certamente não ouviu o conselho de Tycho a Kepler. E nem tinha a intuição de um astrônomo observacional, porque nunca fora um. Havia também outras correntes, como as dos atomistas, de Pierre Gassendi; havia os defensores da filosofia magnética – já então tidos mais unanimemente como “místicos”. Mas a física e a mecânica celeste como conhecemos brota, enfim, a partir do empirismo inglês: da figura de Isaac Newton.

Capítulo 6

Newton e o fim da curva

Embora historiadores tenham ocasionalmente criado vívidas argumentações sobre se Copérnico é, na verdade, o último dos antigos ou o primeiro dos modernos astrônomos, o debate é em princípio absurdo. (...) Isto é como perguntar se uma curva em uma estrada, tipicamente reta afora a curva, pertence à porção de estrada reta que a precede ou à porção que vem depois dela. A curva pertence igualmente às duas seções, ou não pertence a nenhuma. Ela marca um ponto de virada na direção em que a estrada progride, da mesma forma que o De Revolutionibus marca um desvio na direção em que o conhecimento astronômico vinha se desenvolvendo.

Thomas Kuhn, *The Copernican Revolution*

Newton é a figura de convergência da discussão. Se o problema foi aberto por Copérnico nas suas considerações astronômicas e geométricas, e depois desenvolvido paralelamente em diferentes vertentes, ele se resolve em Newton e, depois, na aceitação universal da sua teoria. Sua obra mecânica é filha da postura empírica, muito preocupada com as bases experimentais e observacionais de suas asserções. Mas também é filha do mecanicismo, estabelecendo bases matemáticas para o funcionamento do que é observado (como se pode ver pelo próprio título da sua famosa obra: *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*). É herdeiro das discussões sobre inércia e também das discussões sobre como o Sol poderia fazer girar os planetas. Das discussões sobre vácuo e sobre espaço infinito.

Até hoje, a física que estudamos na escola é a Física Newtoniana, ou outras teorias fortemente baseadas nela. Exploraremos melhor esta física na próxima unidade, mas podemos resumir aqui:

- Espaço infinito como o de Descartes, mas absoluto, independente da matéria contida nele. Por isso, o vácuo não é só permitido como é predominante.
- Tempo também absoluto, seguindo sua marcha independente do que ocorre.
- Movimentos regidos por três leis: a primeira delas é a inércia retilínea de Descartes, mas aqui associada à massa, à quantidade de matéria; a segunda estabelecendo a relação entre força e mudança de movimento; a terceira, a reciprocidade das forças nas diferentes interações.

Contudo, o que mais nos interessa aqui é algo não mencionado na escola: que a principal das bases experimentais que sustentaria e daria credibilidade ao universo de Newton é nada menos que as observações de Tycho Brahe dos planetas, na forma explicada por Kepler. Em outras palavras: o que deu credibilidade às três leis abstratas da mecânica newtoniana era que, a partir destas leis, ele conseguia *deduzir* as órbitas elípticas de Kepler. Vejamos melhor esta relação.

A idéia, permitida pelo plano cartesiano¹, de decomposição de curvas – e assim decomposição de trajetórias, de movimentos – facilitaria bastante as meditações de Newton. Quando um projétil é lançado no horizontal (lembre-se dos canhões de Galileu), seu movimento é composto por duas partes: o movimento horizontal, constante, imprimido pelo canhão, e o movimento vertical, de queda cada vez mais acelerada, pela gravidade natural dos corpos. Como Galileu já estabelecera, a queda dos corpos é a mesma para quaisquer corpos ou movimentos. Assim, se dois projéteis são lançados de uma mesma altura, seus tempos de queda são iguais. Isto quer dizer que, quanto maior a velocidade horizontal de lançamento do projétil, maior é o espaço que ele consegue percorrer antes da fatídica colisão com o solo. Quanto maior a velocidade, menor a curvatura da parábola (mais aberta ela se torna).

Com velocidade suficiente, o projétil pode mesmo ir muito longe, a distâncias para além do horizonte visível. Melhor: com velocidade suficiente, a curvatura da trajetória pode igualar-se à curvatura da Terra e o corpo pode dar a volta no planeta! Se é verdade que a curvatura do corpo é igual à da Terra, então as curvas se acompanham, pareadas, e a distância entre corpo e superfície será sempre a mesma. Assim, depois de uma volta completa, o projétil voltaria para o lugar de onde saiu e atingiria a cabeça de quem o atirou. Se não houvesse atrito com a atmosfera, ele então daria outra volta, e outra, e outra, sempre à mesma altura, preso nesta “queda eterna”. Ele estaria em órbita.

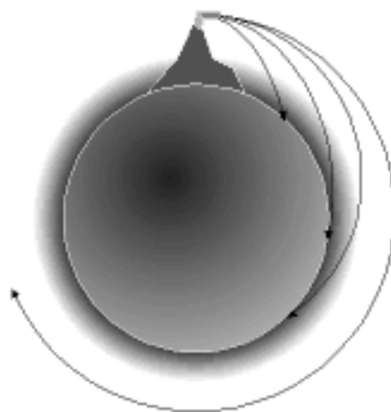


Figura 6.1: Descrição newtoniana de uma bola de canhão entrando em órbita.

- 30- Sendo h a altura da montanha, R_T o raio da Terra e M_T sua massa, calcule o valor dessa velocidade.

Precisamos, contudo, tomar um cuidado: não acreditamos mais na inércia galileana, em que um corpo se move naturalmente em movimento circular; em vez disso, acreditamos na inércia linear de Descartes. Neste caso, portanto, o corpo na órbita é a gravidade, sua tendência à queda, que nunca se concretiza graças à sua alta velocidade. Então o que parecia um problema mostra-se solução. Descartes não analisou o conceito com clareza; a força essencial nos movimentos circulares não é a centrífuga, mas a centrípeta: aquela que prende o corpo à trajetória curva, a despeito de sua tendência retilínea. A força centrífuga é apenas um efeito que aparece no referencial que faz a curva, uma força imaginária. Quando um corpo é lançado para fora de uma curva, na verdade, não há força atuando, apenas sua tendência natural! Em suma, a mesma força

¹Para explorar mais o plano cartesiano, veja Apêndice A

que faz caírem os corpos terrestre faz orbitarem os corpos celestes. Enfim as duas físicas estavam se tornando unidas.

Mas qual será a forma matemática dessa força de gravidade? Para previsões quantitativas, precisamos olhar para as observações quantitativas. Como primeira aproximação, consideremos aqui uma órbita circular e usemos nossa álgebra atual. A lei harmônica de Kepler, deduzida diretamente das tabelas, diz que:

$$P^2 = kr^3$$

Onde P é período orbital de um dado planeta e r seu raio orbital. Contudo, $P = \frac{2\pi r}{v}$ (o tempo gasto para percorrer a órbita é o comprimento desta dividido pela velocidade com que se percorre) e portanto

$$\frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = kr^3$$

A chave é que a força gravitacional atua como força centrípeta dos planetas². Assim, sendo m a massa do planeta, a força gravitacional tem que ser algum termo que esteja igualado a mv^2/r . Como temos um termo v^2 na equação acima, parece que estamos em um bom caminho para chegar a essa expressão. Fazendo as manipulações necessárias, chegamos a

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{m}{r^2} \left(\frac{4\pi^2}{k} \right)$$

Se temos a expressão centrípeta no lado esquerdo, então temos, no lado direito, uma expressão da força gravitacional. Um primeiro aspecto nos chama atenção: para fazer o papel de força centrípeta e satisfazer a Terceira Lei de Kepler, a força gravitacional deve ser proporcional ao *inverso do quadrado da distância* entre Sol e planeta.

Se cortarmos a massa do planeta dos dois lados, temos que a aceleração centrípeta não depende da massa do planeta, e um paralelo entre duas harmonias se destaca: do mesmo modo que todos os corpos caem ao mesmo tempo, todos os planetas obedecem à harmonia da terceira lei de Kepler.

Para completar a nossa forma da força gravitacional, falta levar em conta a simetria da Terceira Lei de Newton³. Essa lei exige que a força de atração gravitacional seja mútua, isto é, que dois corpos que se atraiam sofram a mesma força. Da mesma forma que o Sol atrai gravitacionalmente os planetas, os planetas atraem gravitacionalmente o Sol (se só os planetas se movem, isso se deve à massa muito maior do Sol, que leva a uma inércia muito maior). Em termos mais formais, sejam dois corpos A e B que se atraiam gravitacionalmente. As forças sofridas por cada corpo devem ser

$$F_A = \left(\frac{4\pi^2}{k_A} \right) \frac{m_A}{r^2} \quad \text{e} \quad F_B = - \left(\frac{4\pi^2}{k_B} \right) \frac{m_B}{r^2}$$

O sinal menos serve para dizer que as forças têm sentidos opostos (mas estão na mesma direção). A Terceira Lei de Newton garante que:

$$F_A = -F_B \quad \frac{m_A}{k_A} = \frac{m_B}{k_B} \quad k_B m_A = k_A m_B = K$$

Como m_A e m_B são independentes, k_A deve depender de m_B (como k_B , de m_A):

$$k_A = \frac{K}{m_B} \quad \text{e portanto} \quad F_A = \left(\frac{4\pi^2}{K} \right) \frac{m_A m_B}{r^2}$$

²Para esclarecer o conceito de força centrípeta, veja capítulo 9.

³Para discussão mais detahada das Leis de Newton, veja a unidade seguinte.

Ou seja:

$$F = G \frac{m_A m_B}{r^2}$$

Onde $G = \frac{4\pi^2}{K}$ é uma constante, a mesma para qualquer par genérico de massas m_A e m_B (Isso pode ser provado a partir da própria Terceira Lei de Kepler). Podemos, portanto, chamar essa constante de *constante da gravitação universal*; as melhores estimativas atuais dão a ela o valor de $G = 6,67259(85) \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg.s}^2$. Assim, eis a lei que rege a atração entre todos os corpos do universo: a LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL. Esta lei parece ser a única que rege os movimentos planetários, e depende apenas de possuírem massa. Assim, de posse das três leis de Newton e da Gravitação Universal, podemos descrever todos os movimentos celestes, em todos os sistemas planetários e estelares que conseguirmos observar. Está fundada a Mecânica Celeste.

Traçando então o caminho inverso, partindo desta forma da força gravitacional, conseguimos deduzir uma expressão para a constante kepleriana k_A (quando o corpo A orbita o corpo B):

$$k_A = \frac{4\pi^2}{Gm_B}$$

Constante que só depende de outras constantes universais e da massa do corpo central B. Ou seja, a Terceira Lei de Kepler só é válida se estivermos comparando corpos que giram em torno do mesmo astro central. As luas galileanas, por exemplo, também obedecem a Terceira Lei de Kepler (o quadrado de seus períodos é proporcional ao cubo de seus raios médios), mas a constante de proporcionalidade tem um valor diferente da constante para órbitas em torno do Sol. No primeiro caso, a constante depende da massa de Júpiter; no segundo, da massa do Sol. Da mesma forma, podemos calcular uma constante kepleriana para a Terra, comparando períodos e raios orbitais de nossos satélites artificiais.

- 31- Estime a razão entre a constante de Kepler para o Sol e para Júpiter.
- 32- Estime agora a massa do Sol medida em massas terrestres. Não esqueça de estimar um erro para o seu resultado.
- 33- Qual o intervalo médio entre duas visualizações laterais dos anéis de Saturno? Estime de quanto varia esse intervalo.

Claro que o sistema de Newton também estava envolto em um debate e também foi criticado na sua época por sistemas rivais – em especial o de Gottfried Leibniz. Os mecanicistas o acusavam de místico, vendo na “ação gravitacional à distância” uma “qualidade oculta” ou mágica, da mesma forma como eram mal vistas as explicações magnéticas de Kepler. Em resposta a Leibniz, Newton escreve:

Até aqui não fui capaz de descobrir nos fenômenos a causa dessas propriedades da gravidade, e eu não imagino hipóteses; pois tudo quanto não é deduzido dos fenômenos deve ser chamado de hipótese; e as hipóteses, quer metafísicas, quer físicas, quer mecânicas, quer de qualidades ocultas, não têm lugar na filosofia experimental. Nessa filosofia, as proposições são inferidas dos fenômenos, e depois generalizadas por indução. Foi assim que se descobriram a impenetrabilidade, a mobilidade e a força impulsiva dos corpos, bem como as leis do movimento [dele, Newton] e a gravitação [dele também]. E para nós basta que a gravidade realmente exista, e que atue segundo as leis que acabamos de expor, e que ela seja capaz de explicar plenamente todos os movimentos dos corpos celestes, e os de nosso mar.

E viva o empirismo inglês! É a postura da Navalha de Ockham, postura que se tornará marcante no desenvolvimento posterior da ciência moderna. Mas para além da retórica de Newton, a montagem de seu modelo, unindo uma descrição matemática refinada e os melhores dados observacionais da época, era realmente bem feita. As Leis de Newton, prevendo as observações de Tycho, ganham confiabilidade; as elipses de Kepler, tendo explicação física, ganham consistência.

Mais: uma vez estabelecido, o modelo pode então se arriscar a prever outras observações que não as que serviram de base para o modelo. Assim, a dedução de Newton apontava que órbitas não precisavam ser apenas elipses, mas qualquer curva cônica. Pouco depois do Principia, a tecnologia astronômica permitiu que as órbitas dos cometas fossem descritas com maior precisão; muitas se mostraram elipses muito alongadas ou parábolas! Novas previsões, nova força para a teoria newtoniana.

Um Novo Universo, forjado por todos aqueles homens entre Copérnico e Newton, enfim podia se estabelecer como nova visão de mundo. A dedução das leis de Kepler a partir das Leis de Newton foi repetida inúmeras vezes, em discursos e em livros de divulgação, em triunfo da teoria vencedora⁴. Em cada repetição, um novo tom era adicionado. A própria mecânica já foi reformulada e reformalizada muitas vezes, até a forma que temos hoje. Veremos melhor a articulação desta mecânica e alguns conceitos novos na unidade seguinte, explorando o que ficou conhecido como Mecânica Clássica.

- 34- (IAO 2003) A Grande Oposição de Marte ocorreu esse ano (na ocasião, 2003) em 28 de Agosto às 17^h 56^m in UT. A próxima Grande Oposição de Marte será observada, na Suécia, no verão de 2018. Alguém não entendeu e imaginou que 2018 seria o ano da próxima oposição simples, e não de uma Grande Oposição. Explique a diferença entre as duas coisas. Calcule a diferença de tamanho angular entre Marte em oposição média e Marte em uma Grande Oposição.
- 35- (OBA adap.) Dizemos que um corpo é imponderável quando ele “parece” não estar submetido à ação de forças gravitacionais. Isto é experimentado pelos astronautas em órbita, que ficam flutuando. Algumas pessoas acreditam que isto é devido à ausência de gravidade, o que é incorreto. O que acontece é que o astronauta e o lugar onde está (estação espacial, cápsula e outros) estão sujeitos ao mesmo valor da aceleração.
- (a) Qual seria a duração do dia na Terra para que tivéssemos a sensação de imponderabilidade aqui em sua superfície, num ponto sobre a linha do Equador?
 - (b) Se forem acionados foguetes num ônibus espacial para correção de órbita, a sensação de imponderabilidade dos astronautas continuará?
- 36- Se o Sol subitamente virasse uma gigante vermelha, passando a ter um raio de 0,7 UA, o que aconteceria com a órbita da Terra? E se o Sol virasse um buraco negro?
- 37- (Olimpíada Indiana) Se a metade da massa do Sol simplesmente desaparecesse, qual seria a consequência para a Terra?
- (a) Irá mover-se numa órbita elíptica
 - (b) Irá escapar da gravidade solar
 - (c) Irá continuar na mesma órbita atual
 - (d) Irá se mover em uma órbita circular com o raio maior da órbita elíptica atual

⁴Veja, por exemplo, o papel de Voltaire, um século mais tarde, na corte francesa. Ele divertia as moças da corte explicando, na linguagem delas, a beleza da teoria de Sir Isaac Newton. Como Paris se tornava cada vez mais o espelho cultural do resto do mundo europeu, a versão popularizada da teoria pôde propagar-se rapidamente.

Unidade II

Mecânica Clássica

Gostamos de esquecer que muitos dos conceitos em que acreditamos foram dolorosamente impelidos para dentro de nós durante nossa infância.

Thomas Kuhn, *The Copernican Revolution*

No Apêndice Atualmente Inexistente, percorremos um longo caminho para aprender a descrever o movimento - recomendamos ler, caso seja sua primeira vez com o assunto. Uma tarefa árdua, que nos obriga a discutir um conceito muito importante do universo da matemática: o conceito de função. Este conceito é absolutamente revolucionário, um verdadeiro choque na vida de um estudante! Para você se convencer disto, acostumado que deve estar a trabalhar com funções, lembre-se que, até a oitava série, nossos professores tinham o costume de nos confrontar problemas da seguinte forma:

$$2x - 5 = 0$$

perguntando-nos quanto vale x . Esse é um problema fácil: basta termos a maturidade para perceber que, se $10 \text{ lápis} = 10 \text{ lápis}$, então $(10 + 5) \text{ lápis}$ serão iguais a $(10 + 5) \text{ lápis}$. Isto é:

$$(2x - 5) + 5 = 0 + 5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Bom, mas qual a diferença entre essa simples equação e uma função? A noção de evolução no tempo! Perceba que x tem um valor fixo: vale $5/2$ e pronto. Se x representasse a posição de um carro, ela diria que o carro está naquela posição, e só isso. Mas com as funções, podemos ter a posição do carro para cada instante de tempo, descrevemos um *movimento*! Pense a respeito! Esse tipo de exercício de pensamento é muito importante, pois representa a busca de sentido por trás dos conceitos matemáticos com os quais nos deparamos ao longo da vida.

No Apêndice A, além de revermos, com um olhar diferente, o conceito de função, tivemos o gostinho de ver pela primeira vez o conceito mais importante de toda a matemática moderna: o *limite*. Um conceito muito esperto, que tem por trás uma das maiores revoluções na história do pensamento ocidental. O grande avanço é conseguir lidar com o infinito (seja infinitamente grande ou infinitamente pequeno); se não podemos “alcançar” o infinito, sempre podemos tomar um número maior (ou menor), maior e maior, e ver qual é a tendência que observamos. Isso passa perto da idéia comum entre os cientistas do que é o trabalho deles: fazer sempre *aproximações*, cada vez mais precisas e detalhadas, cada vez obtendo uma descrição mais rica e detalhada da natureza. Pensem sobre isso também.

É só com o conceito de limite que se pôde ter definições precisas de velocidade e aceleração; não à toa que tenha sido o próprio Newton a desenvolver esse conceito para, a partir dele, construir suas idéias físicas. Ele precisava de uma definição mais rigorosa de movimento para relacioná-lo com as coisas do mundo, investigar seus padrões e, com isso, construir sua *Mecânica*. Para começar nossa discussão, entretanto, vamos precisar de uma idéia bem mais recente, sobre a estrutura íntima do mundo que observamos.

Antes de começarmos, fechem os olhos por alguns segundos e imaginem o céu noturno. Nele observamos estrelas, galáxias, nebulosas e outros objetos que só foram bem compreendidos com o desenvolvimento das ciências nos últimos 150 anos. Nos capítulos deste livro, tentamos passar um pouco do que nossos antepassados e contemporâneos aprenderam sobre os corpos celestes, e você já deve ter percebido o quanto a física e a matemática são importantes para alcançar esse objetivo de conhecer o universo.

Infelizmente ou não, a quantidade de conhecimento técnico necessária para seguir nosso caminho é enorme, e isso é certamente um dos fatores majoritários que, para muitos, desencorajam o estudo de matemática e das ciências naturais (física, química, biologia...). Para evitar isso, é sempre bom lembrar:

- (a) Assim como os seus pais tiveram que escolher o seu nome, ao fazer ciência os cientistas precisam nomear muitas coisas. Por mais que estes nomes possam parecer estranhos ou complicados, tentem não se intimidar. Nomes são apenas nomes.
- (b) As equações às vezes podem ser muito grandes ou assustadoras. Ainda assim, em geral, elas trazem conceitos intuitivos, bonitos e elegantes, que são a real importância da expressão matemática. Busque esses conceitos, mesmo que você não saiba como demonstrar a equação. Feito isso, aprender a usá-las é questão de prática, assim como aprender a andar de bicicleta!
- (c) Como veremos ao longo do curso, uma das características fundamentais da ciência, o que lhe dá validade, é seu caráter experimental. É a partir das experiências que se deduzem as leis gerais, e são outras experiências que verificam a validade dessas leis. Entender passo a passo como a observação se transformou em uma expressão matemática é fundamental para o real entendimento da ciência. Assim, para começar a pensar como um cientista, tente verificar, no mundo à sua volta, tudo o que você aprender nas listas. Sem dúvida, é o teste mais seguro!
- (d) Não se limite a conhecer apenas o que você lê em livros ou o que seus professores ensinam. Além de lhe dar conhecimento, o aprendizado serve para lhe fazer ganhar senso crítico, e ser capaz de produzir a sua própria compreensão do mundo. Crie suas próprias experiências, teorias, demonstrações matemáticas; produza você mesmo o seu conhecimento. Afinal, a ciência é feita por homens, tão humanos quanto todos nós.

Capítulo 7

Mecânica de Newton

Suponha que um megadesastre ocorra à nossa espécie, destruindo todo o conhecimento humano; apenas uma frase poderia ser salva para as próximas gerações. O que deveríamos fazer? Que frase condensa mais do nosso conhecimento sobre o mundo? O físico Richard Feynman¹ pensava que a sentença escolhida deveria ser:

Todas as coisas são feitas de átomos: pequenas partículas que se movem perpetuamente, em todas as direções, atraindo-se quando estão a pequenas distâncias, mas se repelindo quando são esmagadas umas contra as outras.

Tomemos como exemplo uma gota de água. Se olharmos bem de perto, não veremos nada além de uma superfície suave, contínua e transparente: água! Mesmo se olharmos a gota através de um microscópio óptico, digamos, um que aumente a gota em 1000 vezes, ainda sim vemos uma superfície suave; mas agora já vemos alguns pontos gelatinosos, arredondados ou alongados: são os paramécios, pequenos protozoários bastante comuns. Se aumentarmos ainda mais a gota, pode ser em mais 1000 vezes (vendo a gota como se ela tivesse 10 km de diâmetro), veremos que ela já não tem aquela aparência contínua de antes; ela parecerá algo granulado, como uma multidão num estádio de futebol, vista de longe. Para vermos com mais clareza, vamos ampliar mais 1000 vezes; no total, nossa gota d'água está aumentada um bilhão de vezes. Caso pudéssemos realmente ver as coisas nessa escala, essa seria a imagem que veríamos:

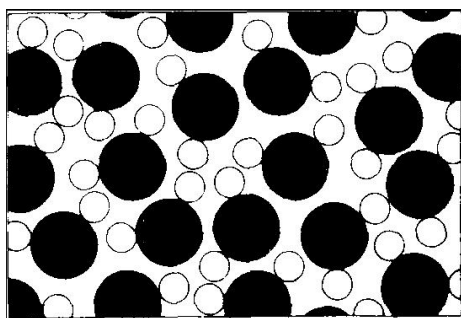


Figura 7.1: Água aumentada um bilhão de vezes.

Na figura, as bolas pretas representam átomos de oxigênio e as brancas, átomos de hidrogênio. Elas se juntam em grupos de dois hidrogênios e um oxigênio cada (H_2O); esses grupos são as

¹Richard Feynman é o principal físico da história dos Estados Unidos, e um dos mais importantes do século XX. Ele escreveu um livro de Física Básica muito inovador, chamado *Feynman Lectures on Physics*. Muitas das idéias desta Unidade são inspiradas em tal livro - que é uma ótima recomendação de leitura para quem quiser estudar mais física.

MOLÉCULAS de água. Perceba que só vimos isso porque ampliamos 10^9 vezes: se uma maçã for aumentada proporcionalmente até atingir o tamanho do planeta Terra, então cada um de seus átomos será aumentando até ter o tamanho original da maçã.

É claro que a figura possui muitas aproximações. A principal delas é que, se formos precisos, não podemos representar átomos como bolinhas. Átomos (e isso também vale para elétrons, nêutrons, etc.) não possuem contornos bem definidos; não é possível dizer exatamente onde eles começam ou terminam. Eles sequer têm “consistência”. Outro erro é a escala do desenho; se átomos estivessem próximos assim, estariam sofrendo uma repulsão imensa! Além disso, mesmo que a figura seja como uma “foto”, temos que ter uma imagem mais dinâmica que estática; não podemos nos esquecer que os átomos estão sempre em movimento, batendo uns nos outros, vibrando e girando.

Vamos voltar à frase-herança do Feynman. Talvez ainda não tenha dado para perceber o poder dessa frase: essa deve ser a causa mais profunda de todos os movimentos dos corpos. Entender porque pedras caem, porque ímãs se atraem, porque a água ferve, porque as barras de ferro são duras, porque o sal dissolve na água, porque a tinta gruda no papel - entender todos os fenômenos físicos e químicos, e mesmo entender como se formam as moléculas orgânicas, e as células vivas - começa em entender as interações entre seus átomos, a entender como se comportam essas bolinhas que vão e vêm, se atraem e se repelem. É preciso algum motivo mais forte para convencê-los do quanto é importante entender os movimentos para entender a natureza?

A matéria como conhecemos possui quatro interações fundamentais, mas só uma delas é importante na interação *entre* os átomos²; ela é conhecida como INTERAÇÃO ELETROMAGNÉTICA. Suas regras de funcionamento são bastante simples:

- As interações dependem de uma propriedade que cada partícula tem, chamada CARGA ELETROMAGNÉTICA. Existem duas classes de cargas: as positivas e as negativas. Se duas partículas têm cargas iguais (ambas positivas ou ambas negativas), elas se repelem; se têm cargas diferentes (uma positiva e a outra negativa), se atraem.
- As interações se estendem até o infinito. Mesmo que um átomo esteja do outro lado do universo, ele influencia os átomos que estão aqui. Ou seja, todos os átomos do universo estão sempre interagindo com todos os outros átomos.
- A intensidade da interação depende da distância entre os átomos. Mais especificamente, ela obedece à seguinte função:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

onde x é a distância entre dois átomos que estejam interagindo. Daí entendemos que, quanto maior a distância entre dois átomos, menor a intensidade da interação entre eles. A influência dos átomos do outro lado do universo existe, mas é tão pequena que pode ser desprezada. Por outro lado, se a distância fica muito pequena, a interação fica muito forte³; se duas partículas de mesma carga estão muito próximas, a repulsão entre elas é muito violenta. Isso significa que elas nunca podem estar muito próximas. O gráfico da intensidade *versus* distância é o seguinte:

² Duas das quatro interações (a NUCLEAR FORTE e a NUCLEAR FRACA) são importantes para a dinâmica de partículas dentro dos átomos. Já a quarta interação, a GRAVITACIONAL, é muito fraca na escala dos átomos. Como veremos, a interação gravitacional só se torna importante em escalas maiores; em escalas muito maiores, ela se torna a *única* importante.

³ Aqui podemos retomar a idéia de limite: imagine dois átomos a uma distância muito grande, e uma certa intensidade de interação. Qualquer que seja essa distância, podemos imaginar uma distância maior, que significará uma interação menor. Assim, o limite da intensidade da interação, quando a distância tende a infinito, é zero. Por outro lado, se temos dois átomos próximos, sempre podemos supor uma distância ainda menor, com uma interação ainda mais forte; quando a distância tende a zero, a interação tende a infinito.

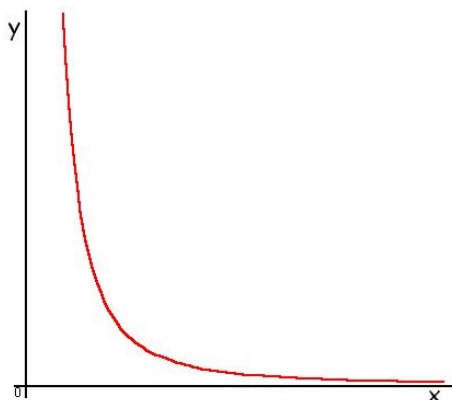


Figura 7.2: gráfico da função $f(x) = 1/x^2$.

Repare que, nas interações, o conceito central é o de mudança de velocidade. Se dois átomos estão se aproximando a uma grande velocidade, quando eles estiverem bem próximos, sofrerão uma forte repulsão muito grande, e tenderão a se afastar. Isto é, quando dois átomos se aproximam um do outro, a interação entre eles faz com que eles sejam desacelerados, parem, sejam acelerados na direção oposta, e assim se afastem. Por outro lado, se dois átomos têm uma interação atrativa, suas interações os aceleram, um na direção do outro, fazendo com que eles se aproximem. Essa é a idéia: interações geram *acelerações* nos átomos!

Agora voltemos ao nosso mundo macroscópico⁴; tomemos dois ímãs que estejam se atraindo. Somando todas as interações de todos os átomos, teremos uma interação resultante entre os ímãs, que os faz se aproximar; o resultado das acelerações sobre cada átomo do ímã nos dá uma aceleração total sobre um ímã, gerando seu movimento na direção do outro ímã. Vamos pensar em um exemplo melhor: você está sentado em um chão muito encerado, e empurra uma caixa. Quando você aproxima sua mão da caixa, os átomos da sua mão começam a repelir os átomos da caixa. Se você pressiona a caixa, os átomos se aproximam mais, e a repulsão entre eles aumenta. Até que a repulsão é grande o suficiente (a *aceleração gerada* é grande o suficiente) para que a caixa, como um todo, se afaste. Foi assim que você empurrou a caixa!

Impressionante o quanto conseguimos explicar com as interações dos átomos, não? No nosso mundo macroscópico, já temos um nome para a interação resultante entre dois objetos grandes: FORÇA. Quando pressionamos mais intensamente a caixa, dizemos que “fizemos uma força maior”; quando isso acontece, a caixa sofre uma aceleração maior! Parece que estamos encontrando propriedades fundamentais dos fenômenos físicos!

7.1 Inércia

Agora vamos voltar no tempo, ver como essas idéias fundamentais foram criadas. Na tradição ocidental, a primeira sistematização lógica das idéias comuns sobre movimento veio de Aristóteles (sempre ele!): um corpo é movido por um *motor* (literalmente, ‘que faz mover’) e o movimento cessa quando o motor pára de mover. É assim que vemos os movimentos no nosso mundo. Quando arrastamos uma cadeira, nós somos o seu motor; assim que paramos de puxá-la ou empurrá-la, ela pára. Um navio só navega enquanto cem homens o movem a remo, ou enquanto o vento é seu motor. Um carro não permanece andando com o seu motor a gasolina desligado.

⁴ Essa palavra, provavelmente, vai aparecer muitas outras vezes; estamos sempre fazendo um paralelismo entre o mundo *microscópico* (literalmente, o mundo das coisas pequenas, nas escalas completamente invisíveis aos nossos olhos) e o *macroscópico* (o mundo das coisas grandes; ou seja, o mundo na nossa escala).

Embora a física aristotélica fosse uma excelente formalização e sistematização do nosso conhecimento empírico comum, sua reapropriação na Europa⁵, no fim da Idade Média, não se deu sem problemas. Naquele tempo, já se tornavam mais patentes os pontos em que a teoria aristotélica dos movimentos não dava uma descrição tão boa. Um desses pontos é o movimento dos objetos no ar: quando uma flecha é atirada, o que faz com que ela continue se movendo? O ar a empurra? E quando se lança um objeto para cima, o ar empurra quando ele sobe e depois também quando ele desce? Era difícil encontrar explicações satisfatórias em situações desse tipo, onde o movimento parecia permanecer por algum tempo, depois que os motores pararam de agir. A questão foi objeto de debate por muito tempo, com explicações alternativas e conflitantes surgindo. Uma delas era a de um engenheiro militar de Florença, Galileu Galilei. Como ela acabou sendo decisiva para a explicação que depois se tornou padrão, vamos nos deter nela.

Nos tempos de Galileu, a forma de encarar as explicações físicas sobre o mundo era já bastante diferente da forma grega ou da forma dos universitários medievais. Ali, a ênfase era menor nas discussões lógicas e maior nos aspectos práticos do conhecimento físico: no que se podia realizar, construir com aquele conhecimento. Galileu era um desses homens; boa parte dos argumentos nos seus livros estava baseada na exibição de resultados de experimentos, mais do que em argumentos lógicos ou teologicamente sólidos (um de seus livros, defendendo especificamente esta postura, era intitulado *O Experimentador* ou, no original, *Il Saggiatore*). Não que ele tenha realmente realizado todos estes experimentos, mas isso não é importante; o crucial é que as experiências *poderiam ser feitas*.

Dentre aquelas sobre as quais ele escrevia nas suas argumentações físicas, uma das mais famosas é a dos planos inclinados: fazer diferentes bolas de canhão descerem por diferentes rampas, verificando como cada uma se movia por ela. Segundo Galileu, fazendo essa experiência, perceberíamos algo bastante interessante: quando chegavam ao fim da rampa, as bolas tinham uma velocidade que dependia de um e apenas um fator: a altura da rampa. Além disso, com uma certa velocidade, saindo da rampa, elas rolavam por um certo trecho num piso horizontal, até finalmente pararem. E mais: quanto maior a velocidade com que a bola saísse da rampa, mais tempo ela demorava a parar, e maior era o espaço percorrido no chão. Era como se o chão interagisse com a bola, tentando freá-la; quanto maior a velocidade inicial, mais difícil para o solo vencer a resistência da bola e fazer cessar seu movimento. Eu disse resistência? Resistência a parar, a mudar de velocidade? Daí vem a idéia: imagine que o chão seja encerado com a melhor das ceras, e fique mais liso que o piso dos mais belos palácios e igrejas. Sendo assim, o chão não freia a bola, e não há resistência: a bola continua seu movimento indefinidamente! Existe uma tendência natural dos corpos de, se estiverem em movimento, manterem seu movimento; se estiverem parados, continuarem parados. Aquele era o PRINCÍPIO DE INÉRCIA DE GALILEU: o estado natural dos corpos é o movimento, sempre com um mesmo valor de velocidade; se os objetos param, é porque as interações com o resto da natureza - que chamaremos de *atrito* - retiram-no do seu movimento natural. Este movimento natural é o que chamamos hoje de movimento circular uniforme, que é aquele que realizam os planetas, aquele que os objetos na Terra que deslizassem sem atrito realizariam (lembrando que a Terra é esférica).

É algo que estava na frase do Feynman: o estado natural de um átomo é se mover eternamente.

⁵ Nota Histórica: Com a queda do Império Romano (sec. V), o conhecimento grego foi, de uma forma geral, deixando de ser importante na Europa; nos novos reinos germânicos que então povoariam o continente, a herança intelectual importante que ficaria de Roma era outra: a Igreja de Cristo. Entretanto, os livros gregos continuaram vivos no Império Romano do Oriente, em Bizâncio (onde hoje é Istambul, na Turquia). É de lá que eles chegam aos árabes, unidos pela fé em Alah e em seu profeta Maomé, e em plena expansão militar no século VIII. Os árabes-islâmicos dominaram todo o norte da África, entrando na Europa pelo seu extremo oeste, a Península Ibérica - que eles dominaram quase inteira. Aquelas terras árabes se consolidaram como o Califado de Córdoba, e lentamente se tornaram o maior centro de saber do mundo árabe - cultivando o conhecimento dos filósofos gregos, herdados dos bizantinos. É lá que as obras eventualmente são traduzidas do árabe para o latim, e assim começam a voltar à Europa. Aristóteles volta a ser lido na Europa Cristã no século XII; seus escritos sobre física, só nos séculos XIV e XV.

Se, por hipótese, um átomo se move isolado no universo, infinitamente distante de qualquer outro átomo, ele vai tender a se mover com a mesma velocidade, sempre na mesma direção. Da mesma forma, se um corpo grande não interage com nenhum outro corpo grande, ele mantém seu movimento, ou se mantém parado. O único motivo para não vermos isso nos nossos objetos comuns (que se movem e param) é que eles interagem com o chão, ou com o ar, ou sofrem a gravidade da Terra.

A introdução da idéia de inércia nas discussões dos movimentos foi fundamental. Mas a inércia de Galileu era diferente da inércia de Newton e dos átomos que Feynman ressaltava. Para o italiano, o movimento natural dos corpos terrestres (assim como o dos corpos celestes) era o *movimento circular*; afinal, se um corpo não fosse freado, ele seguiria ao longo da superfície da Terra, que é esférica. Isto é, um corpo que não sofre ações em contrário descreve um círculo máximo, seguindo indefinidamente pelo chão liso na superfície terrestre. A beleza da inércia galileana, aliás, foi justamente a de fazer com que os corpos terrestres também pudessem ter o movimento circular (belo e perfeito) como seu movimento natural, coisa que era reservada aos corpos celestes⁶.

7.2 Leis

Saltemos da Florença de 1620 à Inglaterra de 1680 de Isaac Newton. As poucas décadas que os separam foram de debate intenso sobre as questões físicas e cosmológicas, e a conversa já era outra nos tempos do filósofo-teólogo inglês. Mesmo em termos de linguagem: a diferença do texto rebuscado e cheio de voltas de Kepler para o texto sóbrio e esquematizado de Newton é marcante. Newton já é herdeiro das discussões de Francis Bacon e dos ingleses em geral sobre experimentação sistemática; é herdeiro também do estudo matemático da filosofia da natureza de Descartes. Isso fica evidente já no título da obra física mais importante dele: *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Princípios Matemáticos de Filosofia Natural), ou só *Principia*. Esse texto tem todo o estilo da geometria antiga; sua própria estrutura é a mesma estrutura do grande texto grego de geometria (o *Elementos* de Euclides): Primeiro as *Definições Fundamentais*, depois os *Axiomas* ou *Leis*; depois Proposições ou Teoremas, seguidos de suas demonstrações, e seu corolário de conseqüências. Essa estrutura casa-se com uma certa corrente filosófica antiga (a estoica⁷), na idéia de que todos os fenômenos físicos obedecem à necessidade lógica, a *Leis da Natureza*. Elas eram condensações de todos os experimentos realizados e, uma vez tendo-as encontrado, todos os movimentos do universo poderiam ser conhecidos, porque tinham que obedecer a essas leis. Vejamos mais de perto o que exatamente Newton escreveu a respeito.

O jovem Isaac foi aluno da Universidade de Cambridge, onde, segundo Paolo Rossi, “estudara a ótica e a astronomia de Kepler, a *Geometria* de Descartes e o *Diálogo* de Galilei, bem como obras de Boyle, Hobbes, Glavill e do matemático John Wallis”. Logo depois de obter seu diploma de *bachelor of arts*⁸, no verão de 1665 (então com 22 anos de idade), a Universidade fechou, em precaução ao surto da peste. É quando Newton volta à casa de seus pais, nos dois ou três anos que seriam talvez do período mais fértil de sua vida intelectual. Ao fim de 1665, ele já tinha

⁶ “É impossível que algum móvel tenha por natureza o princípio de se mover em linha reta, isto é, para onde é impossível chegar, não havendo um término predefinido”. Galileu Galilei, *Diálogo Sobre Os Dois Máximos Sistemas De Mundo*

⁷ Se quiser saber mais sobre os filósofos estoicos, pesquise na Wikipédia (<http://www.wikipedia.org.br>) ou no Citizendium (<http://www.citizendium.org.br>).

⁸ A palavra ‘arte’ não tinha então o mesmo sentido que tem hoje. Nas universidades, o termo remonta à expressão *artes liberais*, que eram as disciplinas destinadas a criar um conhecimento amplo, não restrito a alguma prática profissional ou técnica. Assim, quando se ingressava na universidade, passava-se primeiro pela *Escola de Artes*, para depois ingressar-se nas escolas superiores: de direito, medicina, teologia. Os que tratavam de filosofia natural, de uma forma geral (incluindo, claro, os físicos), eram professores da Escola de Artes.

desenvolvido a regra do binômio (o binômio de Newton, que todos estudam hoje no colégio) e o “método das fluxões” (cálculo diferencial), através do qual podia pensar mais refinadamente nos conceitos de *velocidade* e *aceleração*. Os conceitos de *força* e *massa*, que já vinham sendo bastante discutidos nas últimas décadas, também precisavam de definições mais precisas. Ele estava criando os mesmos princípios de que falamos a respeito os átomos. Com a reabertura da Universidade, Newton voltou à vida ativa dos debates acadêmicos; em 1668, tornou-se *master of arts*; em 1669, tornou-se professor da cátedra de matemática de Cambridge. Debates com Robert Hooke (o da lei das molas) foram fundamentais; Newton chega a publicar um pequeno livro lançando as bases da mecânica celeste, anos antes de se dedicar ao seu tratado de mecânica mais geral, o Principia. Este livro acaba por ser publicado em 1679, quando Isaac tinha 45 anos.

Como já dissemos, a estrutura do livro é a estrutura dos *Elementos* de Euclides. Newton começa com sete definições, de massa, força, movimento, etc., seguidas de comentários sobre o seu conceito de *espaço* e de *tempo*. Como Descartes, Newton acreditava em um universo não esférico como o de Aristóteles, mas infinito, igualmente estendido para todas as direções. Neste universo, a perfeição da esfera e do movimento circular não tinha mais lugar; nas próprias palavras de Descartes, “qualquer parte da matéria, em seu particular, jamais tende a se mover conforma linhas curvas, mas em linhas retas”. É como os átomos que se movem linearmente no vácuo, no espaço infinito, até chocarem-se com outros átomos. Na física de Newton, esse princípio de inércia, reformulado no contexto de um novo universo, tornou-se a PRIMEIRA LEI DE NEWTON ou, como conhecida depois, LEI DA INÉRCIA:

*Todo corpo permanece em seu estado de repouso, ou de movimento uniforme em linha reta, a menos que haja ações em contrário*⁹.

Daí vem a pergunta sobre o que altera esse estado natural dos corpos - e a resposta de Newton: forças, que geram acelerações. Esse é o PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA DINÂMICA, a SEGUNDA LEI DE NEWTON:

*A mudança no movimento é proporcional à força motora imprimida, e produzida nesta mesma direção*¹⁰.

Mudança de movimento o que mais é, senão aceleração? Na linguagem matemática contemporânea, a Segunda Lei pode ser escrita como:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (7.1)$$

A Força exercida em um corpo é igual a uma constante (daquele corpo) multiplicada pela sua aceleração. Exatamente o mesmo princípio que tínhamos deduzido das interações entre os átomos!

Mas o que seria essa constante m ? De alguma forma, é o que mede a *resistência de um corpo a se movimentar*, a INÉRCIA do corpo. Explico: Se uma mesma força é aplicada em dois corpos que têm m 's diferentes, a aceleração gerada é maior no corpo que tem m menor. Ou seja, quanto maior o m de um corpo, maior a força necessária para se gerar uma mesma aceleração nele.

Vamos voltar à nossa intuição: que características de um corpo podem dizer o quão grande é o seu m ? Voltemos ao exemplo da pessoa sentada no chão liso, empurrando a caixa. O tamanho do objeto deve importar, porque se a caixa fosse grande, seria mais difícil de empurrar... Não, não, se fosse uma grande caixa de isopor, seria bem fácil... Então o peso! Sim, o peso da caixa

⁹ *Corpus omne perseverare in status suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

Repare que a formulação original das leis foi feita em latim; afinal, era essa a língua internacional da época.

¹⁰ *Mutationem motis proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

a torna mais difícil de acelerar! Esse m , a medida da inércia do corpo, deve estar diretamente relacionada ao seu peso.

Agora, a hipótese atômica. Como a interação entre os átomos diminui muito rápido com a distância, quando empurramos a caixa, podemos considerar somente a interação dos átomos mais próximos da mão do empurrador. Mas a repulsão daqueles poucos átomos tem que ser suficientemente forte para fazer a caixa se mover como um todo. Assim, devemos esperar que, quanto mais átomos a caixa tem (além dos que estão próximos da mão), mais difícil fica de empurrá-la. Agora estamos chegando a um ponto bom: m é medida da *quantidade de átomos* do objeto, da sua QUANTIDADE DE MATÉRIA¹¹. E sabemos intuitivamente, o peso também é uma medida dessa quantidade de matéria (desenvolveremos mais à frente uma relação mais precisa entre essas duas grandezas).

Para formalizar essa idéia, vamos definir uma grandeza nova, que provavelmente era a que Newton tinha em mente. A QUANTIDADE DE MOVIMENTO de um corpo é o quanto de matéria esse corpo tem se movimentando, e quão intenso é seu movimento. Ou seja, é sua quantidade de matéria vezes a sua velocidade:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Essa quantidade de matéria, ou quantidade de inércia, é o que chamamos MASSA INERCIAL do corpo, ou somente MASSA. Agora fica mais claro o que Newton queria dizer com mudança de movimento; sua Segunda Lei, na verdade, deveria ser matematicamente traduzida como “força é variação da quantidade do movimento”:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Nos casos em que a massa do corpo permanece constante enquanto ele sofre uma força, a variação do movimento de um corpo é apenas sua variação de velocidade - como tínhamos concluído antes, da nossa intuição:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a}$$

Mas Newton propôs três leis; ele sabia que só as duas primeiras não eram suficientes. É uma questão de simetria: um corpo que gera força em outro também sofre efeitos dessa força. Se você empurrar uma caixa muito pesada, terá que fazer uma força muito grande, e seu braço vai doer. Vendo pelo lado dos átomos, a simetria já está embutida: os átomos do seu corpo repelem os da caixa da mesma forma que os átomos da caixa repelem os do seu corpo. Em outras palavras, seu braço deve sofrer a mesma força que a caixa; você não é empurrado para trás porque em geral sua massa (sua inércia, sua tendência a permanecer parado) é muito maior; quando não é, você usa o chão para se apoiar, para se frear.

Galileu certamente conhecia essa simetria: ele trabalhou como engenheiro militar em Florença, e, portanto, sabia que, quando os canhões atiram uma daquelas esferas pesadas, eles sofrem um impulso para trás; se fossem canhões com rodas, era necessário colocar pedras prendendo as rodas, para que o canhão não deslize muito com cada tiro. Newton também conhecia isso, e foi o que escreveu na LEI DE AÇÃO E REAÇÃO, a TERCEIRA LEI DE NEWTON:

*A toda ação há sempre oposta uma reação igual, ou, as ações mútuas de dois corpos, um sobre o outro, são sempre iguais e em sentidos opostos*¹².

¹¹ Repare que quantidade de matéria é algo ligeiramente diferente de quantidade de átomos, porque átomos podem ter diferentes quantidades de matéria. Essa é mais uma discussão a ser aprofundada no Volume 3.

¹² *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones sín se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

Essa é a lei que garante a simetria da teoria e, portanto, grande parte de sua beleza. Com ela, a quantidade de movimento passa a ser um ente muito importante. Veja: a Primeira Lei diz que o estado natural de um corpo é o movimento uniforme (mesmo que seja nulo); de acordo com ela, todos os corpos isolados têm sempre a mesma quantidade de movimento. A Segunda Lei é o elemento perturbador: existem forças, que são responsáveis pela variação da quantidade de movimento dos corpos. Mas a Terceira Lei restaura a perturbação da Segunda, tornando a conservação de movimento ainda mais geral: se um corpo exerce uma força em outro, ele sofre uma força igual, mas em sentido contrário; de forma que a quantidade de movimento que o corpo empurrado recebe é igual à quantidade de movimento que o empurrador perde. Assim, *as forças, e mesmo as interações entre os átomos, são apenas trocas de quantidade de movimento*. E as três leis podem ser vistas como um princípio ainda mais geral, o PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO:

A quantidade de movimento total presente no universo permanece a mesma em qualquer instante de tempo.

Esse princípio é muito bonito porque, além de falar sobre o todo do universo, é aplicável a qualquer fenômeno físico, e torna muito simples a visão sobre alguns deles. Tomemos como exemplo uma bomba presa na parede interna de um grande tubo vertical. Quando a bomba explode, ela se separa em muitos pedaços pequenos, com massas diferentes, e velocidades diferentes. Digamos que sejam N pedaços. O princípio de conservação da quantidade de movimento diz que a soma das quantidades de movimento de todos os fragmentos tem que ser igual à quantidade de movimento inicial da bomba, que valia zero! Isto é:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots + m_N\vec{v}_N = \vec{0}$$

Ou, usando a notação de somas:

$$\sum_{i=1}^N m_i\vec{v}_i = \vec{0}$$

O único cuidado que deveríamos tomar é escrever como negativas as velocidades que fossem para baixo, e como positivas as que fossem para cima; se usarmos a notação vetorial (veja o Apêndice C, sobre Vetores), a última equação se torna ainda mais abrangente, valendo para uma bomba que exploda ao ar livre, com um pedaço para cada direção. E assim passamos a ser capazes de dizer coisas importantes sobre um conjunto grande e complexo de movimentos, partindo de um simples, belo e genérico princípio.

- 38- Porque os astronautas, quando estão do lado de fora da estação espacial, têm que ficar presos a ela por um cabo? O que acontece se um dos astronautas espirrar?
- 39- Digamos que a bala do canhão demore um segundo para percorrer o tubo, e saia com uma velocidade de 120 km/h. Qual foi a aceleração média da bala? Se a bala tem uma massa de 10 kg, qual foi a força média gerada pela queima da pólvora?
- 40- Supondo que a massa do canhão seja de uma tonelada (isto é, 1000 kg), qual a aceleração sofrida pelo canhão quando ele atira a bala? Esse valor é razoável?
- 41- Talvez você já tenha ouvido algumas sugestões de que se todos os chineses pulassem simultaneamente, ou mesmo todo o mundo pulasse, poderíamos mover a Terra de sua órbita. Explique por que isso é absurdo. Se isso realmente ocorresse, pelas Leis de Newton, o que ocorreria com os pulantes?

- 42- A lei da inércia não é apenas um caso específico da 2ª lei para $F = 0$. Ela fornece as condições de validade para esta. Mostre que se um corpo A exerce uma força F_1 num corpo B , medida no referencial inercial R_1 , a força F_2 , medida no referencial inercial R_2 , é igual a F_1 . Considere que o referencial R_2 se move a uma velocidade v_{21} com relação ao referencial R_1 .

Capítulo 8

Algumas Forças

A título de ilustração, vejamos alguns exemplos de forças do nosso dia-a-dia.

8.1 Forças Elásticas

Você já deve ter reparado que, quanto mais se estica uma mola, maior a força com que ela se contrai de volta; e quanto mais você a comprime, maior a força que ela faz para te empurrar. Além disso, quando a largamos, ela tende a voltar para a posição inicial de repouso. Digamos que o comprimento natural de uma certa mola seja L_0 . Neste caso, a força exercida pela mola será algo da forma:

$$F_{mola} = k(L - L_0)$$

em que k é uma constante que depende do material com que é feita a mola – mais especificamente, de seu grau de elasticidade. Tendo uma força desta forma, molas são muito boas para fazer coisas oscilantes. Prendamos uma pedra em uma extremidade da mola, e a outra extremidade, grudemos em uma parede. Se empurrarmos a pedra, digamos para a esquerda, de forma a contrair a mola, esta tende a voltar à sua posição inicial, e a pedra é acelerada para a direita. Contudo, quando a pedra passa pela posição de equilíbrio, ela está com uma velocidade muito alta; a partir dali, a mola começa a se distender, a pedra passa a sofrer uma força de volta para a esquerda. Até que a pedra pára, volta a se acelerar para a esquerda, passa de novo pela posição de equilíbrio, atinge novamente o máximo de contração... E fica assim, oscilando em torno da posição de equilíbrio. O funcionamento dos *pêndulos* segue essa mesma idéia.

8.2 Força Gravitacional

Como dá pra imaginar, essa vai ser a força mais importante nos nossos estudos astronômicos; ela é fundamentalmente diferente das outras duas que apresentamos. Repare que, tanto a força de compressão da mola quanto o atrito, ou qualquer outra força de contato, pode ser explicada pelas interações eletromagnéticas entre os átomos; mas a força gravitacional não pode. Na verdade, a interação gravitacional é um dos quatro tipos de interações entre átomos; mas como ela é muuuuuuuito mais fraca que a interação eletromagnética, ela não é importante para o movimento dos átomos. A interação gravitacional tem basicamente as mesmas regras da interação eletromagnética, com duas diferenças: uma intensidade comparativamente muito menor (ou seja, uma constante, G , muito menor), e só um tipo de carga, a chamada massa gravitacional¹. Com isso, a interação gravitacional é sempre atrativa.

¹ No Capítulo seguinte, discutiremos como essa *carga gravitacional* é igual à *massa inercial* dos corpos.

A força gravitacional tem a seguinte forma:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

onde r é a distância entre os corpos que estão interagindo, e m_1 e m_2 , as massas desses corpos. Contudo, na superfície da Terra, a forma como experimentamos a gravidade é ligeiramente diferente. Primeiro porque a massa da terra é muito maior que a massa de qualquer outra coisa que esteja sobre ela ($M_{Terra} \sim 10^{24} \text{kg}$), o que significa que a atração entre dois corpos sobre a Terra, por exemplo, você e uma caixa, é desprezível, comparada à atração da Terra. O que sentimos é que tudo é puxado para baixo. Segundo porque todas as coisas na superfície da Terra sofrem a mesma aceleração gravitacional - caem da mesma forma!

Vamos explorar melhor esse segundo ponto. De início, é necessário notar o curioso efeito da força gravitacional ser proporcional à massa dos corpos: as acelerações sofridas independem do corpo acelerado! Em outras palavras: *qualquer corpo que esteja a uma mesma altura do solo terrestre sofre a mesma aceleração!* Seja um corpo qualquer de massa μ . Para saber sua aceleração, usamos a Segunda Lei de Newton:

$$F = G \frac{M_{Terra} \mu}{r^2} = \mu g \quad \therefore \quad g = G \frac{M_{Terra}}{r^2}$$

Onde g é a aceleração do corpo, e r é sua distância ao centro da Terra (a altura mais o raio da Terra). Como tanto a massa quanto o raio da Terra são fixos, a aceleração que o corpo sofre, além de não depender de nenhuma propriedade do corpo, só depende da sua altura.

Mas aí entra um detalhe: o raio da Terra é muito maior que nossas alturas cotidianas. Para verificar isso, vamos fazer uma *análise numérica*: como todos sabem, o ponto mais alto na superfície da Terra é o pico Everest, com uma altura um pouco maior que 8000 m. Sendo benevolentes, vamos aumentar esse valor para 10 km. A aceleração é proporcional ao inverso do quadrado da distância ao centro da Terra; sendo assim, considerando o raio da Terra como 6400 km, a razão entre g no nível do mar e g no Everest é

$$\frac{g_{mar}}{g_{everest}} = \frac{G \frac{M_{Terra}}{r_{mar}^2}}{G \frac{M_{Terra}}{r_{everest}^2}} = \frac{r_{everest}^2}{r_{mar}^2} = \frac{6410^2}{6400^2} \approx 1,0031$$

um valor que difere de 0,31%, só aparecendo diferenças na terceira casa decimal, se estivermos usando notação científica. Assim, para as alturas normais, podemos considerar que qualquer corpo sob a superfície terrestre está sujeito à mesma aceleração da gravidade g , sofrendo uma força constante, de módulo $F = \mu g$. O interessante disso é que, *comparar pesos na superfície da Terra é o mesmo que comparar massas, quantidades de matéria!* Isto é, se um corpo tem um peso duas vezes maior que o outro, significa que sua massa também é duas vezes maior, pois o que medimos foi as duas massas multiplicadas pela mesma constante! Agora entendemos porque nossa intuição nos dizia que a inércia era proporcional ao peso dos objetos. É essa constância da aceleração gravitacional que nos permite usar balanças, que medem o peso dos objetos, para saber as massas desses objetos. Pense nisso, da próxima vez que for ao supermercado.

8.3 Forças de Atrito

Chamamos de atrito as forças de contato que tendem a frear objetos. Geralmente, tratamos de três tipos de atrito: atrito com o solo (que impede os corpos de manterem movimentos eternos no chão), atrito com líquidos (pela viscosidade deles), e o atrito com o ar. O primeiro é diferente dos outros dois; enquanto estes falam de um fluido que vai arrastando o corpo contra o seu movimento, aquele trata do arrasto de uma superfície do corpo, devido mais ao seu peso que ao seu movimento. Como vocês vão ver muitas vezes o atrito com o solo no colégio, vamos falar apenas dos outros dois.

Se você já andou contra o vento num dia de vendaval ou já fez natação você já percebeu que movimentos em um fluido não acontecem sem certa resistência. Ainda, ao jogar um aviãozinho de papel você pode perceber que ele perde altura de uma maneira bem diferente do que quando você simplesmente o deixa em queda livre. Por último, ao ver a famosa cobrança de falta do Roberto Carlos (tantas emoções!) em 1997², você pode ter a impressão que toda a física que você aprendeu está furada, pois um corpo bastante simétrico como uma bola de futebol simplesmente faz uma curva, evita a barreira e entra no gol.

Nesta seção queremos apresentar as principais forças fluidodinâmicas do dia-a-dia, em especial suas aplicações à Astronomia e Ciências Afins. Para isso, precisamos fazer algumas considerações preliminares.

Chamamos de FORÇA DE ARRASTO a componente resultante da força que o fluido exerce sobre um corpo que possui alguma velocidade em relação ao fluido (repare que não faz diferença se o corpo ou o fluido se desloca). Essa força é uma força de resistência, ou seja, tende a anular a velocidade relativa. É fácil perceber que ela depende da velocidade relativa: se você estiver parado, não deve haver força alguma, e quanto mais rápido você se desloca, maior a força fica.

Ao ler qualquer texto envolvendo forças de arrasto ou outro tema de dinâmica dos fluidos, você se deparará sempre com o NÚMERO DE REYNOLDS. Tal número é normalmente interpretado, para um fluido em movimento, como a razão entre as forças inerciais (que conhecemos) e as forças viscosas (que tendem a dissipar a energia do fluido). Outra maneira de interpretá-lo, mais útil para nós, é como um número que caracteriza o escoamento do fluido – afinal, para calculá-lo, precisamos conhecer a velocidade do fluido, sua densidade e viscosidade, além da dimensão dos obstáculos a seu escoamento.

Quando dois fluidos incompressíveis (como água ou ar, em velocidade longe da velocidade do som) escoam com o mesmo número de Reynolds, então eles serão parecidos. Suponha, por exemplo, que estudemos o escoamento de duas esferas lisas e sem rotação. Neste caso, o número de Reynolds é calculado como

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

, onde ρ é a densidade do fluido, v é a velocidade do fluido longe da esfera³, D é o diâmetro da esfera e μ é uma constante, conhecida como *viscosidade dinâmica do fluido*.

A primeira esfera tem um diâmetro de 10 cm e a velocidade do ar longe dela é de 10 m/s. Para a segunda esfera, o diâmetro é 20 cm e a velocidade do ar é de 5 m/s. As duas situações, portanto, possuem o mesmo número de Reynolds. Suponha que queiramos saber qual a velocidade média do ar a 20 cm de distância da primeira esfera. Tudo que temos é uma medição da velocidade média para uma distância a 10 cm da segunda esfera. Como o número de Reynolds é igual para

²Assista ao vídeo em <http://www.youtube.com/watch?v=qxntM0eAwAI>.

³Por que falamos da velocidade do ar longe da esfera? Porque, como a figura da esfera sugere, a velocidade perto da esfera não é constante no tempo nem no espaço. Para ver isso mais claramente, aqui vai um vídeo com um cilindro em vez de esfera: <http://www.youtube.com/watch?v=hrX11VtXXsU>.

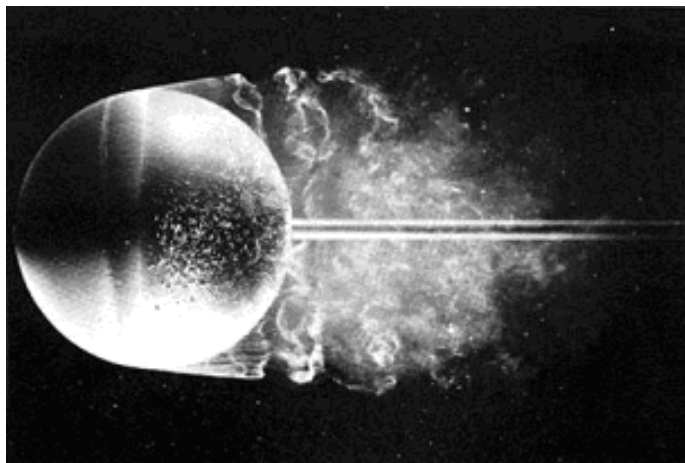


Figura 8.1: Escoamento em torno de uma esfera, $Re = 15000$.

os dois escoamentos, então você pode sair usando regra de três (corretamente)! Ora, em ambos os casos estamos tratando de uma distância igual a duas vezes o diâmetro, então as distâncias são semelhantes (no sentido geométrico de semelhança). A velocidade então será semelhante, isto é, para a primeira esfera será o dobro da segunda.

Podem parecer tentador dizer que se aumentássemos a velocidade do escoamento longe da esfera então a velocidade em todos os outros pontos aumentaria proporcionalmente. Isso não é verdade; como veremos a seguir, o comportamento do escoamento pode mudar drasticamente sua forma. Para entender isso melhor, vamos estudar dois tipos de força de arrasto: a que depende da forma e a viscosa.

8.3.1 Arrasto de Forma

Paremos o estudo da fluidodinâmica e passemos ao da mosquitodinâmica, com o seguinte problema: Um trem se desloca a uma velocidade v e, no caminho, vai colidindo com mosquitos voando muito lentamente. Ao colidir com o trem, o mosquito adere ao mesmo e passa a se deslocar também com velocidade v . Suponha que a densidade de mosquitos ao longo do caminho seja de 1 mosquito por metro e a massa de cada um deles seja 0,1 g. Para escolhermos um motor com potência adequada, queremos calcular a força que os mosquitos exercem sobre o trem em função de sua velocidade.

Vamos calcular tal força para um trem a 10 m/s: A cada segundo, ele deve colidir com 10 mosquitos e cada mosquito sofrerá uma variação de quantidade de movimento de $m \cdot \Delta v = 1 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot 10 = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m/s/mosquito}$. Sendo 10 mosquitos por segundo, teremos que o trem impõe uma variação de quantidade de movimento de $10 \text{ mosquitos/s} \cdot 10^{-3} \text{ kgm/s/mosquito} = 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 10^{-2} \text{ N}$.

Se refizermos para uma velocidade de 20m/s do trem teremos que (i) a variação da quantidade de movimento por mosquito será o dobro, e (ii) a quantidade de colisões por unidade de tempo também será o dobro; a força, portanto, será 4 vezes maior. Finalmente, podemos refazer as contas para uma velocidade v qualquer e uma densidade de mosquitos n qualquer: $F = (m \cdot \Delta v)(n \cdot v) = mn \cdot v^2$. Lembre-se que, neste caso, $\Delta v = v$. Observe que mn é a massa de mosquito por unidade de comprimento, ou seja, a densidade mássica de mosquitos no caminho. Assim, se por acaso os mosquitos forem mais gordos, então a força será maior; o mesmo se houver mais mosquitos por unidade de comprimento.

Nosso exemplo indica que a força que o trem deve vencer por causa das colisões com mos-

quitos depende apenas da velocidade dele e dos mosquitos, mas não da quantidade de vagões; afinal, todas as colisões ocorrem na locomotiva que vai à frente. Além disso, podemos fazer um modelo tridimensional, supondo que os mosquitos estão dispersos no ar em diferentes alturas do chão. Para isso, usaremos a densidade volumétrica de mosquitos. Um trem mais alto colidiria com mais mosquitos pois poderia colidir com os mosquitos mais longes do solo. Chamando de ρ a densidade mássica volumétrica dos mosquitos, fica como exercício mostrar que a força terá a forma $F = \rho v^2 A$, onde A é a área da seção transversal do trem, ou seja, a área sujeita a colisões com mosquitos.

Podemos voltar à fluidodinâmica se substituirmos mosquitos por moléculas do fluido. No caso de moléculas, em vez de aderirem ao trem, elas bateriam e quicariam, mas a equação da força não mudaria muito e ainda valeria o seguinte raciocínio: Ao aumentarmos k vezes a velocidade as colisões ficam k vezes mais "fortes" e ocorrem k vezes mais frequentemente então a força ficaria k^2 vezes maior.

Esse tipo de arrasto é chamado de **ARRASTO DE FORMA** e depende do quadrado da velocidade.

8.3.2 Arrasto Viscoso

Para falarmos do arrasto viscoso deve-se mencionar uma hipótese fundamental da dinâmica dos fluidos, que além de tudo é largamente verificada experimentalmente: a camada de fluido em contato com uma superfície sólida se desloca com a mesma velocidade da superfície sólida. Por exemplo, quando você está parado numa ventania, a camada de ar que está em contato com você também está parada! Incrível! Falando de uma maneira mais técnica: desloquemos uma placa boiando, com velocidade v , em uma piscina rasa. Ao fazer esse experimento (faça!), pode-se verificar dois resultados:

- (a) A força exercida na placa é

$$F = \frac{\mu A v}{L}$$

onde μ é a viscosidade, A é a área da placa, v é a velocidade da placa e L a profundidade da piscina.

- (b) Se a piscina for rasa o suficiente, a velocidade varia linearmente entre o fundo da piscina (zero, pela hipótese anterior) e a placa (v).

Vemos aqui que a força de arrasto é proporcional a velocidade. Olhando para a figura 8.2, vemos que a força de arrasto depende da razão v/L .

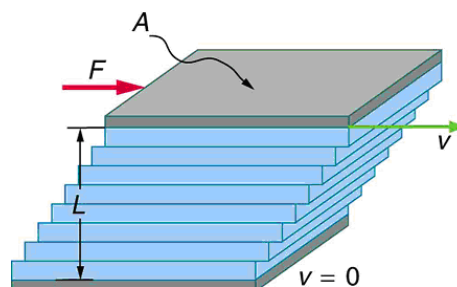


Figura 8.2: Força de arrasto em fluidos com paredes.

Esse experimento nos leva a concluir que a força de arrasto é proporcional a velocidade, ou seja, é da forma $F = C v$ onde C é uma constante que depende do líquido e do corpo que se

desloca. Por outro lado, a analogia com mosquitos nos leva a concluir que a força dependeria do quadrado da velocidade, ou seja $F = Cv^2$. Qual das duas está correta?

As duas. O arrasto viscoso depende da viscosidade do fluido. A viscosidade é um efeito das forças intermoleculares no fluido. Ao contrário dos mosquitos, quando uma molécula se desloca, ela tende a puxar as moléculas vizinhas e por ação e reação, ela tende a ser freada pelas vizinhas mais lentas. Já o arrasto de forma supõe que as moléculas não interagem entre si, ou interagem fracamente, de forma que podemos considerar cada colisão e seu efeito isoladamente.

Para a maior parte das aplicações da astronáutica e aeronáutica, o arrasto de forma é dominante e o viscoso é desprezível. Em algumas aplicações biológicas, como o escoamento do sangue em vasos capilares, o arrasto viscoso passa a ser mais importante. Nem sempre, entretanto, é possível fazer o cálculo teórico dessas duas fontes de arrastos; algumas poucas soluções foram obtidas, como o arrasto viscoso em torno de uma esfera lisa sem rotação. Na prática, os dados são coletados experimentalmente e depois tabelados ou colocados em gráficos. Como mencionado, o arrasto de forma é em geral dominante então a força de arrasto geralmente é expressa da seguinte forma:

$$F_D = \frac{C_D \rho A v^2}{2}$$

Aqui, C_D é o coeficiente de arrasto (a letra D no índice é para *drag*, arrasto em inglês). O coeficiente de arrasto é uma daquelas constantes que variam. Ela depende do corpo que está sujeito ao arrasto mas também depende da velocidade. Ele pode ser razoavelmente constante para grandes intervalos de velocidade, mas pode sofrer variações bruscas para certos valores feito veremos num exemplo mais a frente.

No exemplo do trem, A era a área da secção transversal, aqui ela vai depender do tipo de corpo. Se o corpo for plano ou comprido como a asa de um avião, então A é a área total da asa, caso contrário usamos a área da secção transversal. Ao consultarmos os dados experimentais para um corpo que possa gerar dúvida, provavelmente será indicado como calcular o valor de A em função das dimensões do corpo.

O gráfico a seguir mostra o valor do coeficiente de arrasto sofrido por uma esfera em função do número de Reynolds. Lembre-se que, para uma esfera, o número de Reynolds é $Re = \frac{\rho D v}{\mu}$.

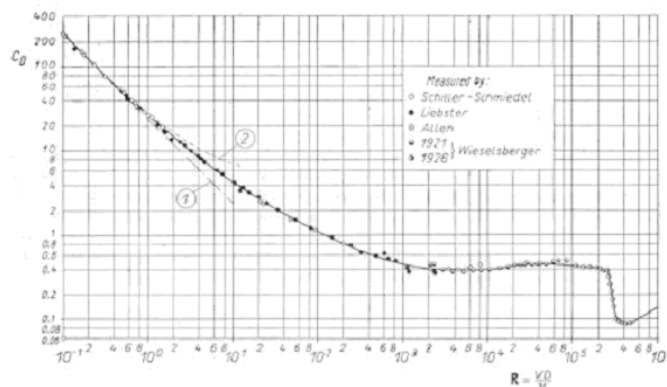


Fig. 1.5. Drag coefficient for spheres as a function of the Reynolds number
Curve (1): Stokes' theory, eqn. (6.10); curve (2): Oseen's theory, eqn. (6.13)

Figura 8.3: Coeficiente de arrasto para uma esfera.

Observe que, para um valor baixo do número de Reynolds o coeficiente é muito alto, chegando a ser maior que 200. Essa é a região dominada por arrasto viscoso, onde esperamos que a força fosse proporcional a velocidade e não ao quadrado dela. Você pode verificar que,

nessa região, até $Re = 10$, a força aumenta com a velocidade apesar de o coeficiente de arrasto diminuir.

Entre $Re = 2 \cdot 10^5$ e $Re = 4 \cdot 10^5$, o coeficiente de arrasto diminui bruscamente, isso é chamado de *drag crisis*. Essa diminuição é tão brusca que uma esfera que se mova mais rapidamente vai sofrer uma força de arrasto menor! Esse tipo de fenômeno acontece também com outros corpos.

8.4 Força de Sustentação

A força de arrasto não é a única força que atua num corpo quando se desloca num fluido. Quando um avião voa, é preciso que exista uma força para cima que contrabalanceie a gravidade. Essa é a FORÇA DE SUSTENTAÇÃO que, como o nome sugere, sustenta o avião. Num caso mais geral, chamamos de força de sustentação a componente da força aerodinâmica ou hidrodinâmicas perpendicular a velocidade que um corpo sofre quando se desloca num fluido.

Para que exista força de sustentação é necessário que o corpo tenha alguma assimetria. Se ele for simétrico em torno de um eixo não se espera uma força perpendicular.

A força de sustentação surge por causa de uma variação da pressão ao longo da superfície. Nesse sentido ela é semelhante ao empuxo: um corpo submerso na água sofre uma força para cima porque a pressão na parte inferior é maior que na parte superior. Contudo, no caso da força de sustentação, a variação da pressão é causada não pelo equilíbrio hidrostático, mas pela variação da velocidade de escoamento do fluido.

A força de sustentação possui um comportamento semelhante à força de arrasto de forma. Ela é dada pela expressão:

$$F_L = \frac{C_L \rho A v^2}{2}$$

O índice L é de *lift*: levantar ou suspender, em inglês. C_L é o coeficiente de sustentação, que também é uma constante que varia. Como agora estamos tratando de corpos assimétricos, o valor C_L também depende do ângulo entre o corpo e a velocidade do escoamento. Isso se aplica também para o coeficiente de arrasto C_D , mas no caso da esfera, que é simétrica em todos os eixos, o valor daquela constante era o mesmo para todas as posições.

Em aeronáutica, uma informação muito importante sobre uma asa é como o coeficiente de sustentação e arrasto varia quando mudamos o ângulo da asa. À medida que se gasta combustível (ou, em aplicações militares, que se lançam bombas e paraquedistas), a força que puxa o avião para baixo, de origem gravitacional, muda. A velocidade do avião também muda. Se não queremos que o avião ganhe ou perca altura, o equilíbrio precisa ser satisfeito. Uma maneira de assegurar o equilíbrio é mudando o coeficiente de sustentação e isso pode ser feito variando o ângulo da asa.

O gráfico 8.4 é de um relatório de 1945 da NACA (predecessora da NASA) que analisa como varia o coeficiente de sustentação do perfil NACA 1412 em função do ângulo e do número de Reynolds. Um coeficiente de sustentação negativo indica que a força passa a ter sentido contrário.

Pelo gráfico vemos que, à medida que o ângulo aumenta, o coeficiente de sustentação também aumenta. Isso acontece um certo valor crítico, próximo de 16° . Quando passa desse valor o coeficiente, cai bruscamente; esse fenômeno é chamado de *stall*. Quando uma aeronave entra em stall o efeito pode ser catastrófico, pois é difícil retornar a um ângulo onde exista mais sustentação. Em aviões convencionais, a pequena asa traseira tem, entre outras funções, a de evitar que o avião consiga chegar a um ângulo de stall.

Devemos lembrar ainda que as forças aerodinâmicas são diferentes em cada ponto das superfícies dos corpos. O efeito disso é que, além das forças, surgem torques⁴ que tendem a fazer os corpos rodarem.

⁴Se você não sabe o que é torque, leia o capítulo 12

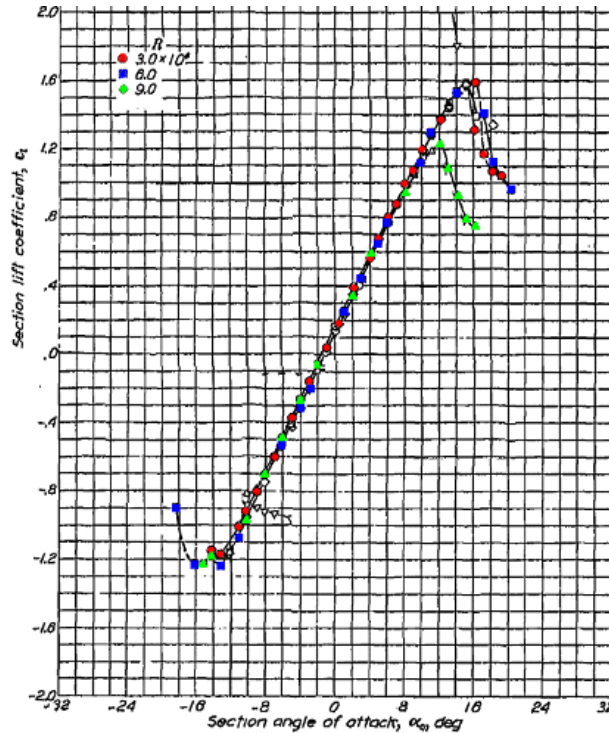


Figura 8.4: Coeficiente de arrasto para uma esfera.

Essa é outra função da asa traseira dos aviões: balancear o torque gerado pela asa dianteira e o torque gerado pelo peso. Um exemplo da necessidade desse tipo de asa é quando uma pessoa se desloca no avião. O peso total do avião (e portanto sua força de sustentação) não é alterado. Mas ao ir da frente da aeronave para trás faz o avião tender a apontar o bico para cima, pois agora existe mais peso na parte traseira. Quando isso acontece, os estabilizadores horizontais (asas traseiras) entram em ação, mudando ligeiramente a inclinação e gerando uma força que estabiliza a aeronave.

8.4.1 Efeito Magnus

Foi dito que corpos simétricos não geram sustentação e a resultante das forças aerodinâmicas fica com sentido oposto à velocidade. Quem já jogou futebol, ping-pong e alguns outros esportes com bola, ou viu qualquer um desses sendo praticado (como o vídeo do início da sessão), sabe que se pode dar “efeito” na bola que a faça descrever uma curva. Para isso, é necessário que exista uma componente da força perpendicular à velocidade.

Para dar “efeito” na bola é preciso que ela gire bastante e quando ela gira surge uma assimetria. A velocidade relativa de um ponto na superfície da bola é a soma da velocidade do centro da bola mais uma componente devido a rotação e esse último componente muda em cada ponto.

A intensidade da força tem uma expressão semelhante à do coeficiente de sustentação, mas em vez do C_L usaremos o C_M e o índice M é para Magnus, lógico.

$$\vec{F}_M = \frac{C_M \cdot \rho A v^2 (\hat{\omega} \times \hat{v})}{2}$$

$\hat{\omega}$ e $\hat{v}$ são os vetores unitários com direção do eixo de rotação e da velocidade, respectivamente. O valor de C_L dependia do número de Reynolds mas também do ângulo de ataque da asa. De

maneira semelhante, o valor C_M depende do número de Reynolds e do fator de spin SP . O fator de spin é definido como a razão entre a velocidade tangencial na esfera (no caso, no equador dela) e a velocidade do escoamento, portanto $SP = \omega R/v$. Ao contrário das expressões anteriores, esta é vetorial. Isso se deve ao fato de que ao inverter o sentido da rotação a força inverte de sentido.

Para baixas velocidades, C_M é proporcional a velocidade de rotação mas quando v ou ω aumentam novamente temos mudanças bruscas no valor de C_M . Um estudo recente mostrou que C_M pode inverter de sinal, isto é, em certas velocidades de escoamento a medida que aumentamos a rotação a força aumenta, depois começa a diminuir e inverte de direção.

A montagem experimental para se medir o valor de C_M é extremamente complicada o que torna difícil a determinação de valores precisos.

Exercícios Forçosos

- 43- Se você solta, do alto da Torre de Pisa, uma bola de vôlei e um saco de café, qual deles chega mais rápido ao solo? E se você soltar uma loira lá de cima?
- 44- Qual o peso de um saco de 5 kg de algodão? E de um saco de 5 kg de chumbo?
- 45- A massa de uma pessoa, em média, é de 70 kg, enquanto a massa da Terra é da ordem de 10^{24} kg. Estime a ordem de grandeza da força entre nosso planeta e uma pessoa. Compare com a força gravitacional exercida entre duas pessoas. A razão encontrada será um número enorme, e por isso sugiro que você tente fazer analogias para conseguir ter uma idéia intuitiva dessa ordem de grandeza (por exemplo: quantas pessoas juntas em um saguão causariam uma atração gravitacional igual à da Terra?).
- 46- Os raios da Terra e da Lua são 6378 km e 1738 km respectivamente, e a massa da Lua, $7,3 \times 10^{22}$ kg. Sabendo que, na superfície da Terra, a aceleração gravitacional é $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, calcule a aceleração da gravidade na superfície da Lua.
- 47- Ao fazer observação experimental da aceleração da gravidade na superfície da Terra, com que precisão nosso aparelho deverá operar para observar variações diárias de g devido à gravidade lunar?
- 48- Uma força constante F produz uma aceleração de módulo 3 m/s^2 em um corpo de massa m_1 , e, de módulo 6 m/s^2 em um corpo de massa m_2 . Qual a aceleração que essa força geraria nos dois corpos juntos?
- 49- Uma força constante de intensidade 20 N imprime em um corpo aceleração de módulo $5,0 \text{ m/s}^2$. Qual será a aceleração que uma outra força constante de intensidade 12 N gerará no mesmo corpo?
- 50- Uma tora de uma tonelada deve ser arrastada com atrito sobre uma superfície, por uma distância de 200m. Um trator a arrasta com velocidade constante igual a 18 km/h. Sabendo que a força no cabo do trator é de 12 kN (1 kN = 1000 N), quanto é o valor da força resultante na tora?
- 51- Um bloco de massa 2 kg está em repouso em uma superfície horizontal sem atrito. Uma força horizontal constante de 2 N é aplicada sobre o bloco por 3 segundos e depois removida. Qual a velocidade escalar do bloco após cinco segundos?
- 52- Um corpo com velocidade inicial de módulo 5m/s recebe, durante 5s, a ação de uma força constante de intensidade igual a 15N, que atua na mesma direção e sentido da velocidade inicial. Nesses cinco segundos o corpo percorreu 100m. Qual a sua massa?

- 53- Três blocos A, B e C, colocados sobre um plano horizontal sem atrito, estão sendo acelerados por uma força constante de 14N. A força é aplicada no bloco A, que está grudado no bloco B, que por sua vez também está grudado no bloco C. Suas massas são, respectivamente, 4 kg, 2kg e 1kg. Qual o valor da aceleração do sistema? Qual a intensidade da força de contato entre A e B? E entre B e C?
- 54- Calcule a aceleração da gravidade terrestre para um ponto a uma altura $h = 400$ km acima da superfície terrestre (essa é a altura da ISS). Porque os astronautas sentem-se como que na ausência de gravidade?
- 55- Considere o vento um fluxo de partículas incidindo sobre uma superfície de área A . Todas as partículas possuem a mesma velocidade v e incidem todas de forma perpendicular à superfície.
- (a) Calcule o volume de ar ΔV que atinge a superfície num intervalo Δt .
 - (b) Se a densidade do ar vale ρ , calcule a massa total de ar que atinge a superfície nesse intervalo de tempo.
 - (c) Calcule a pressão exercida pelo vento sobre a superfície.
- 56- Calcule a resistência do ar sofrida nas CNTP por um objeto com velocidade relativa ao ar v e área A . Considere a velocidade alta o suficiente para que a resistência seja causada principalmente pela pressão (i.e., a viscosidade pode ser desprezada).
- 57- Fótons, apesar de não possuírem massa, possuem momento! Este é dado por $p = \frac{E}{c}$. Assim, calcule a pressão de radiação sofrida por uma placa perpendicular ao chão pela luz do Sol, quando este possui uma altura $h = 30^\circ$.
- 58- Calcule o tamanho (aresta) e a massa de um grão de gelo cúbico que está em equilíbrio estático no sistema solar, considerando a pressão de radiação e o peso deste. A densidade do gelo é de $900 \frac{kg}{m^3}$.
- 59- O mesmo para grãos cúbicos de gelo de nitrogênio ($\rho_N = 0.85 g cm^{-3}$) e de poeira ($\rho_{poeira} = 2 g cm^{-3}$). Considerando que durante a formação do sistema solar toda a matéria estava na forma de pequenos grãos, o que os valores obtidos dizem a respeito da composição dos planetas internos, telúricos (Mercúrio até Marte) e externos, gasosos (Júpiter em diante)?
- 60- Para sondas entrando na atmosfera, existe uma de reentrada do corpo na atmosfera, que depende das forças de arrasto da atmosfera. Elas fazem com que, a partir de uma certa velocidade, as forças se equilibrem e, a partir de então, a sonda desça em movimento uniforme. Calcule uma expressão geral para esta velocidade.
- 61- Sabemos que a ISS perde altura ao longo do tempo e sem impulsos dados por foguetes que se acoplam nela, ela cairia de volta na Terra. Para evitar esse tipo de problema um aprendiz que leu sem atenção o capítulo que termina propôs colocar asas na ISS. Essa solução poderia resolver o problema de queda da ISS?
- 62- Refaça qualitativamente o exercício 43 considerando forças aerodinâmicas. Quem chegaria ao chão primeiro, uma bola de volei sem ou com rotação?
- 63- Pense num disco de acreção e no experimento da placa na piscina.

Capítulo 9

Referenciais Inerciais

Copérnico foi um dos responsáveis pela mudança da visão de universo do Ocidente, fazendo a Terra girar em torno do Sol, em vez do contrário. Um dos argumentos que ele usa em seu livro para justificar o contra-senso que ele propunha é o seguinte:

É que, de uma maneira geral, toda a mudança de posição que se vê ou é devida ao movimento da coisa observada, ou do observador, ou então seguramente de um e outro. Na verdade, entre objetos que se movem igualmente na mesma direção, não se nota qualquer movimento, isto é, entre coisa observada e observador. Ora, a Terra é o lugar donde aquela rotação [da esfera] celeste é observada e se apresenta à nossa vista. Portanto, se algum movimento for atribuído à Terra, o mesmo movimento aparecerá em tudo que é exterior à Terra, mas na direção oposta.

O argumento nos parece bobo, porque estamos acostumados com ele; nossas professoras sempre citam as árvores passando na janela do seu carro. O caso é que a idéia é fundamental para validar a nossa física, o que justifica sua indispensabilidade das nossas aulas na escola. A idéia em si é perceptível para qualquer pessoa que se movimente, mas como foi discutida mais extensamente, no nosso contexto físico, por Galileu, leva na física o nome de RELATIVIDADE GALILEANA: o movimento observado de um objeto é relativo, dependendo da velocidade do observador. Observadores com diferentes velocidades medem diferentes valores de velocidades dos outros objetos. Mas repare como isso não afeta as leis de Newton: se um observador 1 vê um corpo A se movendo com velocidade constante, então outro observador 2, que esteja com outra velocidade, também vai ver o corpo A com velocidade constante. Se 1 vê A acelerado, 2 verá A com a mesma aceleração (com o mesmo Δv). Como as leis de Newton só falam de acelerações, não de velocidades, as leis são equivalentes para todos os observadores que têm velocidade constante (chamados OBSERVADORES INERCIAIS. Na verdade, as Leis de Newton só valem para observadores inerciais. Observadores acelerados detectam acelerações nos objetos (que, olhando de um referencial inercial, entendemos que são devidas à aceleração do próprio observador acelerado) que não correspondem a forças “reais”, que têm alguma proveniência física! A Segunda Lei de Newton estará violada! E, com ela, também as outras.

Para entender o problema, imagine um menino chamado Vinícius, que tenha sido colocado dentro de um trem sem vidros e todo pintado de preto por dentro, de forma que seja impossível ver qualquer coisa do lado de dentro ou do de fora. O trem também tem isolamento acústico, e por isso também é impossível ouvir qualquer som exterior, mesmo que seja do motor ou das máquinas do trem. Imagine também que a preocupada mãe do Vinícius esteja lhe esperando na estação de chegada, observando-o com uma câmera de visão noturna instalada dentro do seu vagão. O trem está seguindo seu caminho normal e, quando se aproxima da estação, freia bruscamente; com isso, Vinícius é jogado para frente. Sua mãe então diz:

– O Junior estava inicialmente com a mesma velocidade que o trem. Como o trem freou, e o irresponsável do meu filho não estava usando cinto de segurança, ele, por inércia, manteve sua velocidade inicial, e caiu de cara no chão.

Já o Vinícius, acidentado dentro do trem, sem nenhuma indicação de qualquer movimento deste, concluiria,

– Eu estava tranqüilamente parado na minha sala escura de sempre, tentando tirar um cochilo na cadeira quando, de repente, uma força me puxou violentamente para frente; por causa dessa desgraçada, eu acabei de quebrar meu nariz!

Pergunta: qual das duas interpretações está correta? Na segunda interpretação, o Vinícius associa uma força ao seu movimento acelerado em direção à porta do vagão – força essa que não existe na interpretação da sua mãe. Para a Mãe, há os trilhos do vagão, o atrito, etc ... Mas Vinícius só pode dizer que uma assombração puxou o pé dele! Para ele, uma aceleração surgiu nele, não associada a nenhum fenômeno físico, nenhuma força! Uma violação das Leis de Newton, de fato. Em um referencial acelerado, isso fatalmente ocorre. Para estender a validação das Leis para tais referenciais, associamos “*forças fantasmas*” a essas acelerações. Outro exemplo: quando um elevador começa a subir, você se sente levemente puxado para baixo; se houvesse uma balança ali, você se veria mais pesado. Mas nenhuma assombração do elevador puxou seu pé; a máquina apenas acelerou para subir, enquanto você tendia a permanecer parado no solo – uma força fantasma da inércia. Pelo mesmo motivo, quando um elevador começa a descer, você é “puxado” para cima, e se sente mais leve.

Outro exemplo interessante pode ser visto com alguém em pé sobre um grande disco girando. Se você tenta caminhar para a borda do disco, vai se sentir puxado na direção oposta à da rotação. Isso porque, conforme se afasta do centro do disco, você vai passando a zonas de maior velocidade¹; com isso, você, que tinha uma velocidade menor que a da sua nova zona, tende a cair para trás. Da mesma forma, se for em direção ao centro, você passa a zonas de velocidade menor e cai no sentido da rotação. Esse efeito é conhecido como FORÇA DE CORIOLIS, e é muito importante para os meteorologistas: se uma massa de ar desce na direção do equador, é desviada para oeste; se se afasta dele, é desviada para leste. Assim surgem enormes massas de ar que tomam forma espiral, os tais furacões e ciclones. O mesmo efeito atinge também as correntes marítimas.

A Terra mesma, claramente, não é um referencial inercial – ela gira sob seu próprio eixo, se movimenta em uma órbita elíptica, precessiona... Claro, estamos falando isso a vendo em contraste com as Estrelas de Fundo, ou a Esfera Celeste que, esse sim, consideramos um referencial parado. Mas podemos contornar o problema de morarmos em um corpo acelerado usando dois argumentos. O primeiro é que as nossas velocidades cotidianas geralmente são ordens de grandeza mais baixas que as dos movimentos do nosso planeta em relação às estrelas de fundo; portanto, podemos desprezar os efeitos das acelerações planetárias. Segundo, mesmo quando são velocidades comparáveis, basta não esquecermos de levar em conta as nossas forças fantasmas (a de Coriolis, a centrífuga – ver próxima página) que nossas análises físicas estão salvas.

¹ Esse tipo de discussão costuma causar confusão por uma pequena imprecisão conceitual. Como o disco é rígido, sua velocidade angular (graus por segundo) é igual em todos os pontos. Contudo, os pontos da borda têm que percorrer uma circunferência de comprimento maior que os pontos próximos ao centro, num mesmo tempo; e por isso tem velocidade linear (metros por segundo) maior.

- 64- Você está em um elevador que, quando começa a subir ou a descer, acelera em 2 m/s^2 . Se houver uma balança dentro do elevador, qual será seu peso medido por ela quando o elevador estiver subindo? E quando ele estiver descendo?
- 65- Considere um satélite artificial da Terra isento de rotação. Este satélite tem órbita circular contida no plano equatorial da Terra, completando em um dia sideral uma revolução em torno do planeta. Ele:
- (a) Estará em repouso somente para um observador fixo na superfície terrestre que esteja localizado na linha do Equador.
 - (b) Estará em repouso para um observador fixo na superfície terrestre localizado na cidade de São Paulo.
 - (c) Estará em movimento para qualquer observador fixo na superfície terrestre.
 - (d) Estará em repouso para observador fixo na superfície da Lua.
 - (e) Estará em repouso para um referencial fixo em relação ao centro da Terra.

Explique porque cada opção correta está correta, cada opção errada, errada.

- 66- Você dispõe de um canhão, balas apropriadas (não de açúcar) e pólvora, e pretende atingir certo alvo. Suponha que, com a quantidade de pólvora que você põe, a bala está caindo exatamente na metade do caminho até o seu alvo. O que você deve fazer para a bala cair no alvo? Como isso influiria no tempo de voo da bala?

Considere o movimento da Lua ao redor da Terra como um círculo perfeito, percorrido por ela com velocidade constante. Pergunta: a Lua está sendo acelerada? Bom, se a velocidade é constante, sabemos que a aceleração é nula. Por outro lado, sabemos que a Lua gira em torno da Terra por causa da atração gravitacional entre eles; e se existe força, existe aceleração! E então, o que responder?

Na verdade, há aí uma confusão. Leia o Apêndice C, sobre Vetores. Quando dizemos que a velocidade orbital da Lua é constante, estamos nos referindo à sua *intensidade*; se olharmos o vetor velocidade lunar, veremos que, em cada ponto da órbita, sua direção é diferente. Se não houvesse aceleração, pela Primeira Lei de Newton, a Lua deveria rumar pelo espaço em linha reta (com o vetor velocidade constante)! O que acontece é que, já que se está num movimento circular, a aceleração gravitacional (que obviamente aponta para a Terra) é sempre perpendicular à velocidade. Acelerações desse tipo só mudam a *direção* da velocidade, e não seu valor numérico. Elas recebem o nome de ACELERAÇÕES CENTRÍPETAS. Podemos explorar algumas características geométricas dessa aceleração.

Como a aceleração é sempre perpendicular à velocidade, o módulo da velocidade é sempre constante ao longo da trajetória. Como a velocidade é sempre perpendicular à distância ao centro, a mesma também permanece constante. Assim, em um sistema que possui apenas aceleração centrípeta, a trajetória é necessariamente uma circunferência.

Dizemos que a trajetória é circular quando, no espaço vetorial das posições, os vetores-posição possuem todos o mesmo tamanho e apontam para todas as direções. Podemos ver, contudo, que o mesmo vale se desenharmos os vetores-velocidade com a mesma origem, no espaço vetorial das velocidades. Repare que as velocidades também possuem o mesmo tamanho e percorrem todas as direções.

Podemos calcular facilmente o módulo da velocidade, se soubermos o período em que o círculo é percorrido: $v = 2\pi R/T$. Mas nesse mesmo período, as velocidades também completam uma volta. Ou seja, podemos calcular da mesma forma o módulo da “velocidade da velocidade”: $a = 2\pi v/T$. Juntando ambas, temos:

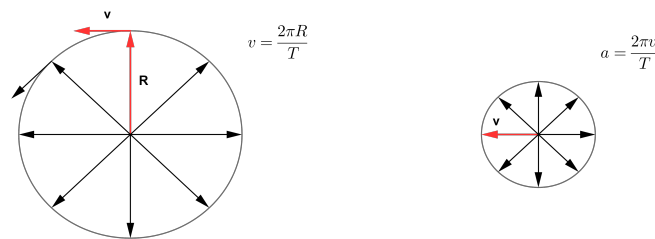


Figura 9.1: Movimento circular no espaço das posições e no espaço das velocidades.

$$a_{cp} = \frac{2\pi v \cdot v}{2\pi R} = \frac{v^2}{R}$$

Assim, temos uma relação geométrica entre a aceleração centrípeta, a velocidade com que se percorre o ciclo e o raio de curvatura. No caso da Lua, quem faz o papel de aceleração centrípeta é a atração gravitacional, o que nos leva a

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{V^2}{R}$$

E podemos pensar em outros exemplos. Numa curva de Fórmula 1, é o atrito com o asfalto que gera aceleração centrípeta, e permite que os carros completem a curva. Por isso, quando chove e a pista fica menos aderente, torna-se bem mais fácil para o piloto sair da pista pela tangente, em direção ao muro. Pra isso existem pneus de chuva ultra-aderentes.

Podemos ir ainda mais longe com nossa análise vetorial: imagine certo corpo com certo vetor velocidade v , que esteja sendo acelerado em uma direção qualquer. Podemos sempre decompor a aceleração em duas componentes: uma na *direção* da velocidade, responsável por aumentar o módulo (o tamanho do vetor) dela; e uma *perpendicular*, centrípeta, responsável por mudar a direção dela. O que são órbitas elípticas? Pense nisso.

Mas como ficam esses conceitos a partir do referencial de quem está fazendo a curva? Imagine você mesmo dentro de um carro, em uma pista circular. Em cada ponto, você tende a sair tangencialmente da curva, seguindo uma trajetória reta; mas o carro está sempre sendo puxado “para dentro”. Por isso, você tem a impressão de ser continuamente empurrado para fora. Essa é a ACELERAÇÃO CENTRÍFUGA (“fugindo do centro”), mais um exemplo de aceleração fantasma, que aparece em referenciais em movimento – neste caso, em qualquer referencial que descreva uma trajetória não-retilínea.

- 67- Considere a Terra perfeitamente esférica; em que parte de sua superfície a atração gravitacional é sentida maior? Calcule as acelerações da gravidade máxima e mínima na superfície terrestre.
- 68- Chamamos de *satélites geoestacionários* aqueles que são geoestacionários, ou seja, que aparecem parados, vistos da superfície terrestre. Sabendo que a velocidade de revolução dos geoestacionários é de 3×10^3 m/s, calcule sua altura em relação à superfície terrestre. Calcule também sua aceleração.
- 69- Sabendo apenas que um certo satélite é geoestacionário (sem saber sua velocidade), calcule os mesmos elementos orbitais do problema anterior.
- 70- Um corpo está em uma órbita circular de raio R , em torno de uma estrela de massa M . Calcule a velocidade orbital v do corpo.

- 71- Considere um planeta em órbita circular em torno de uma estrela. Em um intervalo de tempo Δt , o raio da órbita do planeta varre uma área ΔS . A razão $\Delta S/\Delta t$ é denominada velocidade areolar do planeta, e é denominada por η . Determine o valor da aceleração do planeta em função de η e do raio da órbita R .
- 72- Tomando as órbitas circulares, deduza a Terceira Lei de Kepler a partir da Gravitação Universal. Com isso, encontre uma expressão algébrica para a constante K da Lei.
- 73- Astrônomos descobriram um planeta de 1 massa terrestre com período de 1 dia sideral e raio de 42000km ! O que aconteceria com um astronauta na superfície desse planeta? O que pode-se dizer sobre a atmosfera dele?
- 74- Seja um disco rígido de raio $R = 1\text{m}$ girando com velocidade angular $\omega = 1\text{rad/s}$.
- Calcule o momento angular de um ponto com a sua massa (sim! Você!) parado no disco à distância de 1 e 0.95 metros do centro, e a diferença entre elas.
 - Suponha que você estivesse na beirada do disco (1 m do centro) e se deslocasse para uma distância de 0.95 m do centro a uma velocidade constante $v_r = 1\text{ m/s}$, puramente radial (repare que velocidades radiais *não* alteram o momento angular). Calcule o torque sofrido por você.
 - Calcule a força média exercida sobre você, como vista para alguém fora do disco. Como isso é interpretado por um observador no disco, i.e., que tipo de forças inerciais aparecem?

OBS.: Para fazer este exercício, leia primeiro o capítulo de Física de Rotações.

9.1 Força de Coriolis

²No exercício 74 você percebeu, e calculou, o efeito da força inercial conhecida como *força de Coriolis*. Ela, assim como a força centrífuga, é uma força inercial que aparece em referenciais em rotação, e é uma velha conhecida daqueles que já andaram em um carrossel, além dos meteorologistas. Vamos deduzi-la agora.

Veja a situação da Figura 9.2. Suponha que um corpo no ponto A está inicialmente parado com relação ao disco. Ele, então, passa a possuir uma velocidade puramente radial *no referencial do disco* em direção ao ponto B, que dista $\Delta x = v_r \cdot \Delta t$ do ponto A (onde Δt é o intervalo de tempo que se passou). Suponha ainda que o intervalo de tempo é tão pequeno quanto se queira.

Se o disco fosse um referencial inercial não deveria haver nenhuma força agindo sobre o corpo, já que, neste referencial, o vetor velocidade é constante (a velocidade é sempre radial, e mantém o módulo constante). Porém o disco não é um referencial inercial por ser um referencial em rotação. Portanto, surgem duas forças inerciais: a força centrífuga e a força de Coriolis.

Dois efeitos geram a força de Coriolis:

- Uma vez que o disco gira como um corpo rígido, a velocidade (medida num referencial externo, inercial) de rotação dele é maior no ponto A do que no ponto B, i.e., $v_t > v'_t$. Um corpo em repouso com relação ao disco na direção tangencial sofre, portanto, variação de velocidade Δv_t entre os pontos A e B. Sabendo que o disco gira como um corpo rígido, podemos calcular as velocidades v_t e v'_t em função da velocidade angular do disco, ω :

$$v_t = \omega \cdot r$$

²Antes de ler essa seção, é útil ler o capítulo de Física de Rotações e o apêndice de Vetores.

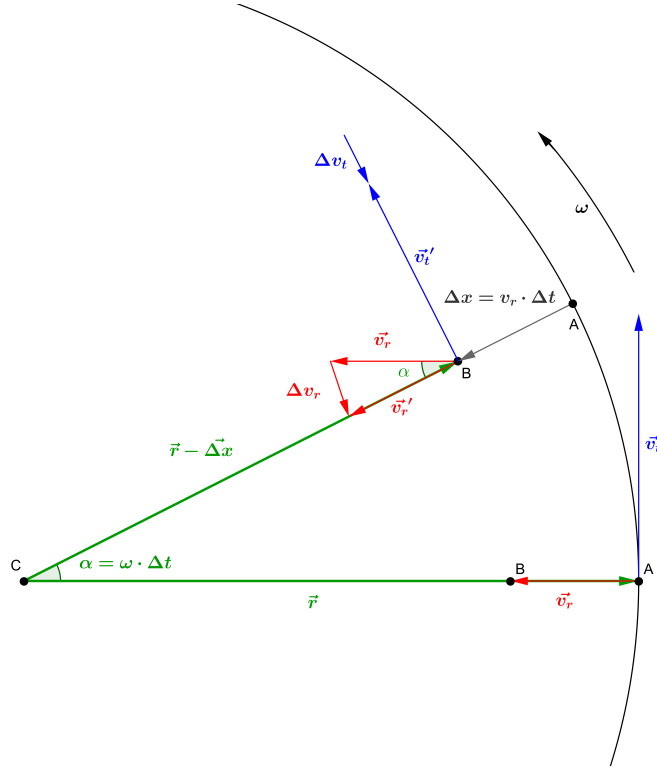


Figura 9.2: Corpo rígido em rotação.

$$v'_t = \omega \cdot (r - \Delta x) = \omega r - \omega \Delta x$$

E, portanto, a variação Δv_t :

$$\Delta v_t = v'_t - v_t = \omega r - \omega \Delta x - \omega r$$

$$\Delta v_t = -\omega \Delta x$$

Como $\Delta x = v_r \cdot \Delta t$:

$$\Delta v_t = -\omega v_r \Delta t \quad (9.1)$$

- (b) Para que o corpo possa manter uma trajetória retilínea e puramente radial no referencial do disco sua velocidade radial deve girar um ângulo $\alpha = \omega \cdot \Delta t$, ou seja, deve sofrer uma variação Δv_r . Como sabemos o ângulo α em função de ω e do tempo, podemos calcular Δv_r (repare ainda que, como a velocidade radial possui módulo constante, $v_r = v'_r$). Supondo que Δt é muito pequeno, temos:

$$\Delta v_r = -\alpha \cdot v_r$$

$$\Delta v_r = -\omega v_r \Delta t \quad (9.2)$$

Como a velocidade radial do corpo é constante, no referencial do disco, todas as variações de velocidade que calculamos ocorrem na direção perpendicular ao raio-vetor (vetor ligando o centro do disco ao corpo). Ou seja, as acelerações sofridas são perpendiculares à velocidade radial. Assim, podemos calcular a variação de velocidade total Δv somando os efeitos calculados nas Equações 9.2 e 9.1:

$$\Delta v = -\omega v_r \Delta t - \omega v_r \Delta t$$

$$\Delta v = -2\omega v_r \Delta t$$

Mas, usando a segunda lei de Newton:

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$F = -2m\omega v_r$$

Essa força é a força que deve ser aplicada sobre o corpo para que ele possa descrever a trajetória radial retilínea no referencial do disco. Ela é, geralmente, aplicada pelo disco sobre o corpo (força de atrito). Porém, no referencial do disco a aceleração resultante sobre o corpo é zero, portanto a soma de todas as forças (inerciais ou não) deve ser zero. Desprezando as forças na direção radial (que são a centrífuga e centrípeta, que também somam zero), temos, para a força de Coriolis F_{cor} :

$$F_{cor} + F = 0$$

$$F_{cor} = 2m\omega v_r \quad (9.3)$$

Porém a análise que fizemos não é completa. A força de Coriolis aparece para qualquer corpo se movendo num referencial em rotação, não somente para corpos cuja velocidade é puramente radial. Assim vamos, agora analisar o outro caso: quando a velocidade é puramente tangencial.

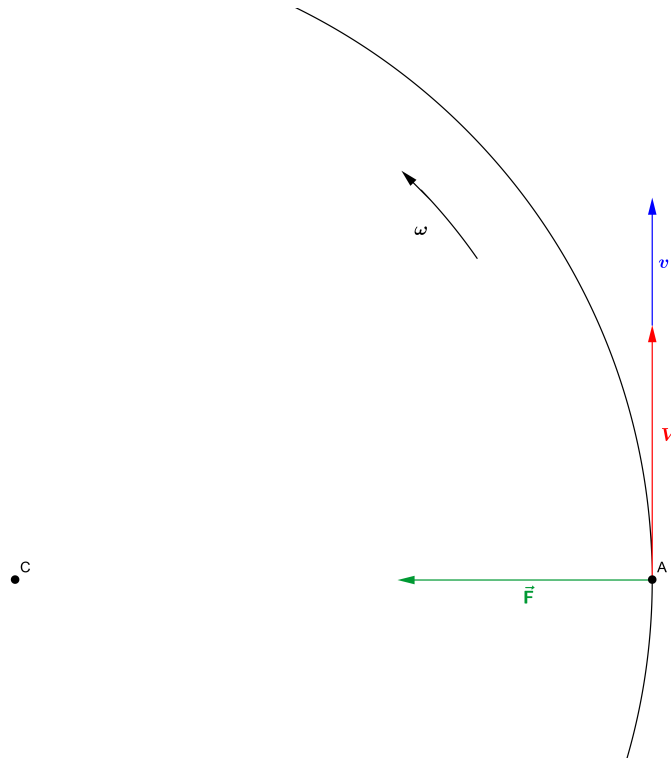


Figura 9.3: Referencial (corpo rígido) em rotação. Um objeto em A possui uma velocidade puramente radial v com relação ao referencial rotante, e um ponto do referencial em rotação no ponto A possui velocidade V (devido à rotação do referencial).

Observe que, para um observador externo, um objeto em A que possui velocidade v com relação ao disco em rotação gira, em Movimento Circular Uniforme, ao redor de C com velocidade

$V + v = \omega R + v$ (sendo R a distância de A a C). Portanto a força F terá de ser igual à resultante centrípeta:

$$F = F_{cen} = \frac{m(v + \omega R)^2}{R}$$

$$F = \frac{mv^2}{R} + 2mv\omega + m\omega^2 R$$

No referencial em rotação, porém, o objeto em A é visto em MCU com velocidade v , e sua resultante centrípeta vale $\frac{mv^2}{R}$. Como a velocidade tangencial é constante em módulo, a força resultante (contando forças inerciais e "normais") no referencial em rotação deve ser a resultante centrípeta. Assim:

$$\frac{mv^2}{R} = F + F_{inerciais} = \frac{mv^2}{R} + 2mv\omega + m\omega^2 R + F_{inerciais}$$

$$F_{inerciais} = -2mv\omega - m\omega^2 R$$

Perceba que o termo $-m\omega^2 R$ nada mais é do que a força centrífuga! O outro termo, portanto, corresponde à força de Coriolis, que possui módulo $2mv\omega$ e aponta para fora da circunferência.

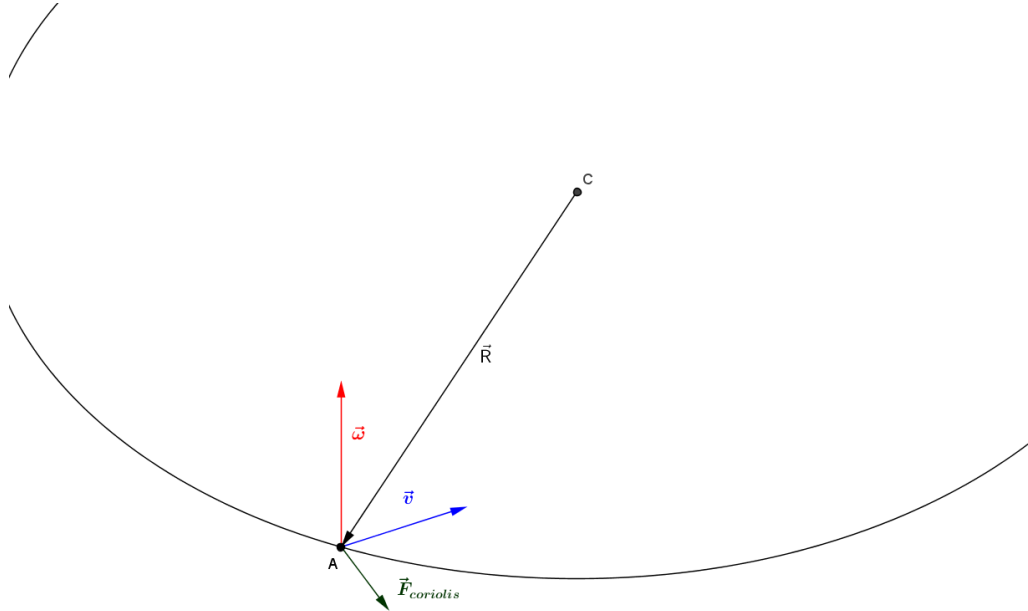


Figura 9.4: Força de Coriolis sofrida por um corpo com velocidade $\vec{v}$ num referencial com velocidade angular $\vec{\omega}$.

Para encerrar, vamos analisar a força de Coriolis como vetor. Perceba que nas duas situações acima a força de Coriolis possuía direção perpendicular às direções do eixo de rotação (velocidade angular) e da velocidade. Isto sugere que possamos escrever a força de Coriolis como um produto vetorial. E podemos!

$$\vec{F}_{coriolis} = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega}) \quad (9.4)$$

Como pode ser visto na situação da Figura 9.4. Verifique que isso é verdade para os casos anteriores! A força centrífuga também pode ser escrita na forma vetorial:

$$\vec{F}_{centrifuga} = m(\vec{\omega} \times \vec{R}) \times \vec{\omega} \quad (9.5)$$

- 75- Calcule o desvio sofrido por uma bola de beisebol num percurso de 20 m que é atirada, no equador, com velocidade $v = 30 \text{ m/s}$.
- 76- Suponha que uma cunha seja solta de uma altura de 20 m no equador. Calcule o módulo, a direção e o sentido da componente da velocidade paralela à superfície da Terra no instante em que a cunha atinge o solo. Tente desenvolver um experimento capaz de medir o efeito calculado. O que esse experimento significaria na disputa entre os modelos heliocêntrico e geocêntrico? (De fato a experiência foi realizada, numa colaboração entre Newton e Hooke. Mais detalhes em <http://www.hfleming.com/newtonexp.html>).

Capítulo 10

A Interpretação da Energia

Até agora, vimos que podemos descrever todos os movimentos do universo partindo de três leis fundamentais, criadas por Isaac Newton em 1687. Mas vimos também que essas três leis podem ser “resumidas” em um princípio ainda mais fundamental – da conservação da quantidade de movimento – e que, com ele, parecemos conseguir descrever e entender todos os movimentos dos corpos, bem como suas causas. Esse foi o grande sucesso da Teoria de Newton; desde Aristóteles, não se havia construído no Ocidente nenhum modelo da natureza que fosse tão geral e que abrangesse tantos fenômenos. A teoria newtoniana é tão poderosa que nós ainda descrevemos nosso mundo tendo essa teoria como nossa principal referência.

Contudo, a beleza e a abrangência de uma teoria não garantem sua aplicabilidade prática. Vamos usar a gravidade como exemplo. Conhecemos a forma dessa força, e portanto sabemos como é a aceleração que ela gera nos corpos. Como a aceleração gravitacional depende basicamente da distância entre os corpos, podemos imaginá-la funcionando como uma aceleração centrípeta; daí, compreendemos que podem haver órbitas circulares. Mas órbitas circulares são um caso ridiculamente simples de movimento possível sob forças gravitacionais; basta imaginarmos as órbitas parabólicas dos cometas, as marés, as ressonâncias dos satélites, a estranha estabilidade dos Troianos¹. . . Sabemos que nossa teoria de gravitação permite essas coisas, mas você consegue imaginar o quanto seja difícil calcular, entender os mecanismos desses intrincados fenômenos? Por isso, temos que ser mais espertos; se não conseguimos saber todos os detalhes de um certo fenômeno, podemos prestar atenção em algumas características “especiais” deles. Sabendo escolher, essas características podem nos dizer muito do que realmente queremos saber sobre os fenômenos.

Para isso, vamos voltar a um exemplo já discutido aqui: a experiência do Galileu com os planos inclinados. Já discutimos como a força gravitacional atua, trazendo a bolinha até a extremidade da rampa; e como, depois, o atrito com o chão a fazia parar. Tendo já a Física Newtoniana completa, conseguimos descrever com grande facilidade esse fenômeno. O próprio Galileu, entretanto, estava prestando atenção em duas características especiais: fazendo as experiências, ele descobriu uma relação entre elas. As características que ele observou foram (i) a altura da rampa e (ii) a velocidade que a bolinha tinha quando chegava no chão; o que ele descobriu sobre essas duas características foi que, quanto maior a altura inicial da bolinha, maior a velocidade com que ela saía. Ele não precisou conhecer as Leis de Newton, e saber como a gravidade atuava na bolinha ao longo do percurso; só sabia como cada condição inicial de altura correspondia a uma condição final de velocidade.

Vamos explorar isso mais a fundo, usando um caso mais simples, mas essencialmente igual. Imagine uma bolinha que esteja presa a uma certa altura e, depois de solta, caia verticalmente,

¹ Para quem não conhece, os Asteróides Troianos são dois grupos de pequenos corpos que têm a mesma órbita de Júpiter; cada um a 60° do planeta, na órbita.

até atingir o solo. A velocidade inicial da bolinha é zero, e ela é uniformemente acelerada pela gravidade; de forma que podemos escrever a velocidade v da bolinha em qualquer instante que quisermos:

$$v = gt$$

Por outro lado, a altura h que a bolinha percorre também é determinada pelo tempo da queda:

$$h = \frac{g}{2}t^2$$

Mas não estamos interessados no tempo de queda; apenas na velocidade e na altura. Assim, isolando t e substituindo-o pela primeira equação, na segunda:

$$h = \frac{g}{2} \left(\frac{v}{g} \right)^2 \quad \text{ou, arrumando melhor:} \quad gh = \frac{v^2}{2}$$

e chegamos a uma expressão satisfatória: a velocidade final (o quadrado dela, na verdade) só depende da altura, e da aceleração da gravidade – este último, de fato, o agente de mudança de velocidade. Para ficar com a força gravitacional, e não só a aceleração, multiplicamos pela massa m da bolinha:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

O que podemos concluir da equação? Existe altura no início, e velocidade no final. A altura vai diminuindo, e a velocidade aumentando. Sendo mais formais: se pegarmos dois instantes t_1 e t_2 , no meio da queda, teremos uma relação parecida; em t_1 , o corpo vai ter uma velocidade v_1 e estar a uma altura h_1 . Em t_2 , sua altura h_2 será menor, e sua uma velocidade v_2 , maior – a altura vai gradativamente se transformando em velocidade (se me permitem o abuso de linguagem). Refazendo as contas:

$$v_2 = v_1 + g\Delta t \quad \text{e} \quad \Delta h = v_1\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2 \quad \rightarrow \quad mg\Delta h = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

ou, escrevendo melhor:

$$mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2} \quad \text{ou} \quad mgh + \frac{mv^2}{2} = \text{constante}$$

Dois números, duas características especiais, cuja soma é a mesma em qualquer instante da queda. Um deles depende da altura; o outro, da velocidade. Conforme o corpo vá caindo, o primeiro diminui e o segundo aumenta; até que, no fim, a bolinha só tem velocidade e não altura. É realmente como se a altura se transformasse em velocidade; ou melhor dizendo, o “espírito da altura” passasse a ser “espírito de velocidade”, ou “espírito do movimento”. a “quantidade do espírito” na bolinha é a mesma, o tempo todo; mas a forma dele é que muda.

Achamos uma ótima característica a ser observada! Sabemos agora que, pelo menos nas quedas na superfície de um planeta, existe uma “quantidade de espírito” que se conserva; e a força gravitacional é responsável por tirar esse “espírito” da forma de “espírito de altura”, ou “espírito de *potencial* de movimento”², e torná-lo “espírito de velocidade”. Vamos usar nomes gregos: Aristóteles tinha um conceito que era a materialização de um potencial em ato, coisa que ele chamava *energéia*, ou na forma latina, ENERGIA. Um bom nome. Assim, o “espírito do movimento-em-potencial”, ou da altura, vai se chamar ENERGIA POTENCIAL (GRAVITACIONAL, no caso); e o “espírito do ato do movimento” será batizado de ENERGIA CINÉTICA³.

² Repare que o principal de se estar no alto é poder cair. O “espírito da altura”, no caso, é como um espírito de movimento em potencial; e por isso esse nome.

³ Kinétos é “movimento”, em grego.

Com isso, marcamos dois elementos “especiais”, identificáveis em qualquer movimento sob ação da gravidade na superfície da Terra. O movimento de uma, ou várias bolinhas, pode ser o mais complicado; se as únicas forças atuantes forem o peso de cada uma, podemos calcular sua energia (potencial e cinética) num instante qualquer e afirmar categoricamente que, em qualquer outro instante, essa energia deve ser a mesma!

- 77- A Torre de Pisa tem entre 55,86 m e 56,70 m de altura. Com que velocidade a bolinha tacada lá de cima chega ao solo? (desprezando o atrito com o ar)
- 78- Suponha que você tenha uma vizinha muito chata, e queira quebrar a vidraça da casa dela. A janela principal do segundo andar da casa fica a sete metros e meio do solo. Qual a mínima velocidade com que você deve tacar a pedra para acertar a janela? (*Não resolvam esse exercício experimentalmente!*)
- 79- Um atleta de massa 80 kg, com 2m de altura, consegue ultrapassar um obstáculo de 6 m de altura passando por cima dele (ele faz salto com vara)! Considerando que a energia do atleta tenha sido conservada, calcule:
- O ganho de energia potencial gravitacional do atleta no ápice do salto.
 - A velocidade inicial mínima necessária para o atleta conseguir saltar.

10.1 Máquinas de Carnot

Nosso novo conceito de energia parece muito útil! Mas será que essas características que encontramos podem nos ajudar a encontrar características similares em outras situações, com outras forças atuando? Ou seja, será que podemos enxergar semelhanças em outros fenômenos, de forma que, por analogia, possamos estender nosso conceito de energia para outras situações? Para responder à pergunta, vamos analisar a situação gravitacional por uma outra forma. Imagine uma máquina de levantar pesos, como a que é mostrada na figura 10.1:

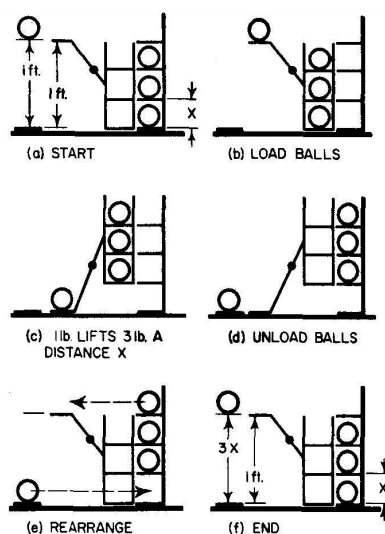


Figura 10.1: A Máquina de Levantar e Abaixar Pesos. 1 ft. = one foot (um pé). Adaptado como um metro.

Esta máquina, que apelidaremos de M é capaz de levantar e abaixar bolinhas, cada uma pesando 1 g, por exemplo. Colocando três bolinhas de um lado e uma do outro, adequadamente, a máquina é capaz de levantar as três bolinhas de uma altura X abaixando a outra de 1m. Faremos as seguintes considerações no nosso estudo:

- *Não pode existir no mundo nada análogo a um movimento perpétuo de tal máquina.* Por isso entenda-se que uma máquina dessas não pode repetir o processo indefinidamente e voltar à sua condição inicial sem receber energia externa deixando um peso levantado a cada vez, que poderia ser usado pra rodar outra coisa. Isso seria equivalente a fazer um carro andar sem gasolina! Essa idéia é conhecida como PRINCÍPIO DE CARNOT.
- *A máquina M é reversível.* Isso indica que ela pode funcionar ao contrário. No caso, ser capaz de levantar três bolinhas abaixando uma implica poder levantar uma abaixando três. Uma máquina irreversível não faz isso.

Seja também uma outra máquina N , irreversível, mas de funcionamento semelhante à M . Ela abaixa um peso de 1m para levantar outros três de uma altura Y . Demonstraremos que Y deve ser menor que ou igual a X .

Demonstração. Para tal, suponha por absurdo que $Y > X$. Neste caso, podemos acoplar M a N fazendo M trabalhar ao contrário. Assim, M abaixaria três pesos de uma altura X para levantar um outro de 1 m; este seria usado por N para levantar mais três pesinhos de uma altura Y . Ora, mas como $Y > X$, as três bolinhas levantadas no final poderiam ser usadas para rodar novamente M e a altura restante poderia ser aproveitada para fazer funcionar outra maquininha. Mas isso seria um moto-perpétuo, ABSURDO! Se a máquina N também fosse reversível, seria fácil provar que $Y \leq X$ e $X \geq Y \Rightarrow X = Y$. $\square$

Esse resultado é fantástico. Ele nos mostra que, independentemente do nosso nível de tecnologia, nunca poderemos criar uma máquina de levantar e abaixar pesos com uma eficiência maior que uma máquina reversível! Além disso, todas as máquinas reversíveis possuem a mesma eficiência, não importa sua constituição interna!

Baseado nesse resultado, usando nossa maquininha M reversível, será que conseguimos determinar a altura X em que três bolinhas são levantadas, enquanto uma quarta é abaixada em um metro? É claro que conseguimos! Para resolver o problema, suponha primeiramente que $3X > 1$. Nesse caso poderíamos construir uma outra máquina imgalzinha à primeira e rodá-la ao contrário. Como $3X > 1$, poderíamos, em princípio, utilizar esse excesso de altura por uma terceira máquina para fazer uma outra coisa – levando-nos novamente ao Movimento Perpétuo. Logo, $3X \leq 1$ m. Por um raciocínio análogo, temos que $1\text{m} \leq 3X$, de onde concluímos que $3X = 1$ m de altura $\rightarrow X = 1/3$ m!

A generalização desse experimento pode então ser feita. Se uma máquina análoga abaixa n bolinhas de uma altura X para levantar b bolinhas de uma altura Y , esses valores serão tais que $bY = nX$. Esse produto sempre se conserva, em qualquer transformação reversível! E como nenhuma máquina, nenhuma transformação na natureza pode ser mais eficiente que nossa máquina reversível, essa quantidade nunca pode aumentar, no máximo diminuir! É claro que estamos falando da mesma energia potencial gravitacional que vimos lá em cima.

ENERGIA POTENCIAL é o nome dado a tipos de energia que *dependem da localização dos corpos no espaço*, em relação a algo. Poderíamos ter uma máquina análoga à nossa, submetida a um campo elétrico, levantando e abaixando cargas; com isso encontraríamos uma outra quantidade conservada: a energia potencial elétrica. Se tivermos bolinhas movidas horizontalmente, presas a molas, teremos a energia potencial elástica. E todas essas formas de energia são intercambiáveis: podemos construir uma máquina que abaixe uma bolinha enquanto puxa uma mola, ou movimente uma carga...

10.2 Conservação de Energia

Voltemos a analisar o experimento do Galileu, do início dessa seção: a bolinha, no alto da rampa, tem uma energia potencial armazenada. Conforme ela cai, essa energia vai lentamente se transformando em energia cinética, graças ao trabalho realizado pelo seu peso, até que ela chega ao solo com uma certa velocidade, e com sua energia totalmente transformada em cinética. Então ela começa a rolar, mas conforme a bolinha vai sofrendo atrito com o chão, ela vai freando, perdendo quantidade de movimento. Não há nada estranho nisso, pois o atrito funciona como uma força externa. Mas o que acontece com a energia cinética perdida pela bolinha? Ela parece sumir; mas vamos procurar melhor. O atrito acontece pela interação entre os átomos da bolinha e os do chão. Os átomos que vêm se movendo com a bolinha, vão sendo freados ao se aproximarem dos átomos do chão que estão mais à frente; quando estão ainda mais próximos, acabam sendo acelerados em uma outra direção qualquer. Pelo mesmo motivo, os átomos do chão também são acelerados em direções aleatórias. O atrito tem este efeito: transformar o movimento médio ordenado dos átomos, que dá o movimento da bolinha, em um movimento desordenado de agitação.

Contudo, não precisávamos conhecer o modelo atômico para ter certeza que a energia se conservaria, e aí bastaria uma experiência – andar de skate ou bicicleta – para saber o que acontece: as rodas esquentam! Ora, o que mais é o CALOR de um corpo que não a agitação térmica dos seus átomos?! É o mesmo princípio que usamos quando estamos com frio, e atritamos as mãos. Ou quando estamos perdidos em uma floresta, e atritamos gravetinhos para produzir fogo. É por esse motivo que os ônibus espaciais precisam ter um bom revestimento térmico: o calor gerado pelo atrito com a atmosfera na reentrada esquentava muito o casco do ônibus (foi por problemas no revestimento térmico que a Columbia explodiu em 2001). E é esse mesmo atrito atmosférico que queima os meteoros que entram a toda hora na atmosfera, e nos protege, pobres seres humanos, da violência impiedosa do universo-lá-fora.

O próprio Carnot, quando criou seu princípio, estava preocupado com as máquinas industriais do século XIX, movidas por queima de carvão. Portanto, seu foco era transformar ENERGIA TÉRMICA em energia cinética das peças das máquinas. A maioria das máquinas atuais transforma a energia elétrica que vem pela tomada em outras formas de energia (em energia térmica, no microondas; em luz, no caso da televisão). Existem, afinal, inúmeras formas nas quais a energia pode se manifestar; sempre que temos um novo fenômeno, podemos encontrar uma nova grandeza, um novo número especial, dimensionalmente compatível com os espíritos de velocidade ou de movimento em potencial (pelo peso, pelo campo elétrico, pela contração de uma mola); uma nova característica com a qual sempre podemos imaginar uma maquininha operando, tal que todas as energias, juntas, obedecem a um princípio mais universal de conservação: o PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA:

“A energia total presente no universo é sempre a mesma, em qualquer instante de tempo.”

Curioso que a primeira demonstração da lei de conservação de energia não foi feita por um físico, mas por um médico. Ele fez uma experiência com ratos: ao queimar comida, pode-se medir quanto calor é gerado, entretanto, alimentando ratos com a mesma quantidade de comida ele percebeu que os ratos convertiam oxigênio em gás carbônico da mesma forma que a comida que era queimada. Quando se mede a energia em ambos os casos encontramos que as criaturas vivas fazem exatamente a mesma coisa que os sistemas não-vivos. A lei de conservação de energia é válida para a vida tanto quanto para outros fenômenos. Interessante que qualquer lei ou princípio físico que nós conhecemos para coisas não-vivas também funcione para coisas vivas, de fato, não há por que os fenômenos em criaturas vivas serem diferentes, a não ser pelo fato de geralmente serem muito mais complicados.

Podemos analisar o que acontece dentro de um organismo mais de perto: o trabalho do nosso sistema digestivo é quebrar as moléculas dos alimentos que comemos; a energia que era

responsável pelas ligações químicas das moléculas é transformada em energia de ligação das ATP⁴, moléculas que se distribuem por todas as células do corpo. Assim, quando esticar o braço, ATPs são quebradas no cérebro, gerando energia elétrica para os pulsos dos neurônios, que correspondem ao seu pensamento de esticar o braço. Depois, outras ATPs se quebram nos neurônios, liberando a energia para o pulso elétrico que percorrerá os nervos até seu braço, atingindo seu bíceps. Aí, mais ATPs são quebradas, dando energia cinética para as fibras do seu bíceps, de forma que elas possam se distender e, com isso, você finalmente estique o braço.

Na prática, quando calculamos a energia de um sistema, às vezes ela sai do sistema e às vezes entra; portanto, para assegurar a conservação de energia, precisamos tomar o cuidado de delimitar um sistema que possa ser considerado isolado do ambiente externo. Um jacaré parado sobre uma rocha, sem se mover e aparentemente sem qualquer tipo de metabolismo, pode aquecer muitos graus. Não vamos entender a conservação se tentarmos pensar no jacaré isoladamente; temos que considerar o sistema jacaré-sol, ou jacaré-atmosfera. Se este réptil estiver dentro de uma estufa aquecida, à noite, aí sim podemos considerar essa estufa como um meio isolado, e todo o calor que o jacaré ganha é calor que a estufa perde. Répteis fazem isso: entram em equilíbrio térmico com o ambiente ao redor; é assim que conseguem regular suas temperaturas corporais que, por isso mesmo, podem variar muito. É o que chamamos de animais *poiquilotérmicos*. Mamíferos e aves, por outro lado, são *homeotérmicos*: produzem o seu próprio calor interno, que permite o bom funcionamento das suas complexas atividades metabólicas. Por isso, são bem menos sensíveis a variações de temperatura: o corpo humano, em condições normais, tem sempre sua temperatura interna média entre 35 e 37 graus celsius; uma variação de um ou dois graus para além desta faixa já é motivo de grande preocupação nossa, dos nossos familiares e amigos.

10.3 Trabalho

Vamos investigar mais de perto como acontecem essas transformações e transferências de energia. Para isso, façamos um sistema fechado, com uma certa quantidade de energia, e geremos nele uma força externa constante. Pensaríamos de cara: essa força externa deve acelerar alguma parte do sistema, mudando sua quantidade de movimento. Mas agora não estamos interessados na Interpretação Newtoniana dos fenômenos, mas na Interpretação da Energia. Suponhamos, de fato, que uma parte do sistema se mova. Podemos imaginar uma maquininha que mova essa parte, usando energia de outras formas para compensar. Se o movimento ocorre na direção da força aplicada, um raciocínio como o da máquina de levantar pesos nos levaria a

$$(\text{Mudança de Energia}) = (\text{Força}) \times (\text{Distância})$$

De fato, quando analisamos o experimento do Galileu, a única característica que usamos da gravidade foi o fato de ela ser uma força constante e paralela à queda das bolas de canhão. Suponhamos então uma bolinha sobre um daqueles pisos perfeitamente lisos e horizontais. Inicialmente, a bolinha tem velocidade v_0 . Em um certo instante, começamos a exercer uma força constante na bolinha; força que, depois de um certo tempo, para. Sendo $a = F/m$ a aceleração sofrida pela bolinha, refazendo os cálculos do início da sessão, chegaremos a

$$F \cdot \Delta s = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Aqui temos a vantagem de ter a energia cinética (com a máquina, tanto no instante inicial como no final do “levantamento”, a bolinha estava parada) e, por suposição, só ela. No lado esquerdo da equação, temos a força F multiplicada pela distância Δs que a bolinha percorreu

⁴ ATP = Adenosine Tri-Phosphate ou Tri-Fosfato de Adenosina. Vocês ainda ouvirão muito falar dela nas aulas de biologia, como a molécula de armazenamento de energia do corpo humano.

enquanto sofria a força. Podemos encarar esse termo como um agente responsável pela *variação da energia* da bolinha. Um termo que era importante no tempo do Carnot: estava-se preocupado com como o calor gerado pela queima do carvão podia gerar *movimento* em engrenagens e pistões; como ele podia *realizar trabalho*. Usando a Mecânica Newtoniana, sabia-se que o TRABALHO realizado pela força F , isto é, a variação da energia cinética da máquina, era dado pela equação acima. Desta forma, definindo $W = F \cdot \Delta s$ (W vem de Work), podemos escrever uma equação fundamental da energia dos movimentos – a VERSÃO ENERGÉTICA DA SEGUNDA LEI DE NEWTON:

$$W_{total} = \Delta E_{cinetica}$$

Voltando ao exemplo da rampa: conforme a bolinha vai rolando pelo chão, a força de atrito vai realizando um outro trabalho, desta vez negativo (já que a força está no sentido contrário ao do deslocamento). Com isso, a bolinha vai perdendo energia cinética, até parar. Reparem que é a mesma experiência do fim da página 51, com uma descrição diferente: agora não se trata mais de um jogo de forças e acelerações, mas de trabalhos e formas de energia. Com isso, podemos reinterpretar todos os fenômenos mecânicos pelo ponto de vista energético, com a vantagem adicional de o princípio de conservação de energia ser ainda mais geral: como vimos nas maquininhas, não precisamos ter movimento para ter energia, e observar sua conservação.

- 80- Sabendo que uma caloria (unidade de energia bastante conhecida) equivale a 4,18 J, quantas calorias, no mínimo, você precisa ingerir para realizar o trabalho muscular equivalente a levantar uma caixa de 10 kg até a altura da sua cabeça?
- 81- Uma partícula de 1 kg, inicialmente parada, percorre 1 m durante 1 s, em um movimento uniformemente acelerado. Qual a energia cinética da partícula no fim do percurso?
- 82- Existe uma temperatura limite a que uma sonda, entrando na atmosfera, pode chegar?
- 83- Uma força constante, horizontal, com intensidade de 20N, atua durante 8,0s sobre um corpo de massa 4,0kg que estava em repouso numa superfície sem atrito. Qual foi o trabalho realizado pela força aplicada?

Para completar nossa Interpretação Energética da Mecânica, vamos agora fazer um último pequeno refinamento: analisar o trabalho realizado por forças não constantes. A própria força gravitacional, por exemplo, aumenta conforme a distância entre os corpos diminui; só a consideramos constante para as pequenas alturas do nosso dia-a-dia. Como fica a energia potencial gravitacional, nesse caso geral?

Já discutimos na página 58 que, para alturas como as das nossas construções e do nosso relevo, podemos considerar a aceleração gravitacional igual à aceleração no nível do mar. Ou seja, alguém que caia do alto de um prédio está sofrendo uma aceleração (quase perfeitamente) constante. Mas imagine que começamos a construir cidades voadoras, a 50 km de altura. Nessas cidades, a aceleração da gravidade já vai ser significativamente menor que aqui na superfície; para os prédios que eles vão construir lá em cima, entretanto, ela vai ser também constante, como para os nossos prédios. E se resolverem construir dez andares na ISS⁵, a gravidade vai ser aproximadamente igual no décimo e no primeiro andar. Ou seja, por mais que a atração gravitacional mude com a distância, ela sempre pode ser considerada constante num intervalinho muito pequeno, em uma certa altura. Epa, já esbarramos nessa idéia: Se temos um gráfico, seja de força ou de velocidade, por mais estranho que ele seja, sempre podemos dividi-lo em pedacinhos pequenos nos quais a força, ou velocidade, parece constante. Veja a figura 10.2.

⁵ ISS = *International Space Station* (Estação Espacial Internacional)

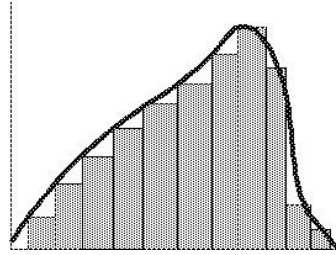


Figura 10.2: Como calcular a área de um gráfico? Veja como no apêndice A.

Vamos então dividir o espaço em torno da Terra em várias cascas bem finas, em cada uma das quais a variação da energia potencial em uma queda – ou seja, o trabalho realizado pelo peso – é $mg\Delta h$, ou $mg\Delta r$. Sabemos que a aceleração da gravidade vale:

$$g = -\frac{GM}{r^2}$$

onde r é a distância ao centro da Terra, o sinal é de menos, pois a gravidade aponta sempre para alturas menores. Logo o trabalho em um *pequeno* deslocamento é dado por:

$$\delta W \approx -\frac{GMm}{r^2}\delta r$$

Logo, para calcular o trabalho da força gravitacional, precisamos *somar sobre os intervalos infinitesimais*, isto é, integrar⁶. Ao realizar (ou receber) trabalho, a força gravitacional deve perder (ou ganhar) uma energia equivalente, logo, a variação da energia potencial gravitacional é

$$\Delta E_{\text{potencial}} = \int_{r_i}^{r_f} \frac{GMm}{r^2} dr$$

A solução dessa integral pode ser vista na página 159, apêndice A. A partir dela, chegamos a

$$\Delta E_{\text{potencial}} = -\frac{GMm}{r_f} + \frac{GMm}{r_i}$$

ou seja, a energia potencial gravitacional fica:

$$E_{\text{potencial}} = -\frac{GMm}{r}$$

Com uma curiosidade: ela é negativa! De fato, conforme nós vamos caindo, a distância ao centro da Terra diminui, e a fração acima aumenta. Mas a energia potencial tem que diminuir, para se transformar em energia cinética. Quando a fração aumenta, a energia fica “mais negativa”, ou seja, diminui. No sentido contrário, afastando-se, a energia cinética tende a diminuir – a não ser que haja um motor acionado – e a potencial a aumentar, esta chegando a ser zero quando a distância tende a infinito.

Assim, refazendo nossas contas do início chegamos no caso geral da conservação da energia sob um campo gravitacional:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \text{constante}$$

⁶ se essa palavra fez despertou um pânico inexplicável ou fez um calafrio correr por sua espinha, ou ainda somente despertou alguma curiosidade, corra para o apêndice e A

- 84- Usando esse mesmo raciocínio (desenhando o gráfico, dessa vez), tente encontrar uma energia para um corpo preso a uma mola, ou seja, submetido à força elástica da página 57. Essa energia será chamada de *energia potencial elástica*.
- 85- Um exemplo de sistema complicado de descrever que citamos no início foram as órbitas parabólicas dos cometas. Pois bem; sabendo que sua energia total é a mesma em todos os pontos da órbita (inclusive no infinito), calcule a velocidade do cometa no periélio (em função da massa do Sol M , e da sua distância R ao Sol no periélio). Essa velocidade é a famosa *velocidade de escape*; pense por quê.
- 86- Quanto tempo o Sol é capaz de brilhar convertendo sua energia potencial gravitacional em luz? Em quanto ele encolheria por ano? Você pode usar o fato de que uma esfera de densidade uniforme possui energia potencial gravitacional $U = \frac{3GM^2}{5R}$.
- 87- Uma molécula num gás diatômico possui energia cinética média $E = \frac{3k_B T}{2}$ (onde k_B é a constante de Boltzmann). Calculando a velocidade quadrática média das moléculas de hidrogênio na atmosfera terrestre, explique a pequena presença de hidrogênio em nossa atmosfera. A massa molar do hidrogênio é de 2 g/mol , e a constante de Avogadro vale $6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
- 88- Um asteróide caiu na Terra! Ele possui um raio $R = 20 \text{ km}$ e densidade igual à da Terra. Supondo que ele caia no mar após atingir sua velocidade-limite, em quanto aumentará a temperatura da atmosfera? E a temperatura do mar? Considere que a densidade do ar vale $\rho = 1.225 \text{ kg m}^{-3}$, a pressão atmosférica vale 10^5 Pa e que o oceano possui profundidade média de 1 km . O calor específico do ar vale $1.0 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ e da água vale $4.2 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$. OBS.: No exercício 56 você calculou a força de resistência do ar sofrida por uma superfície. Os cálculos realizados chegam próximos da resposta, mas não exatamente a ela, devido às inúmeras simplificações realizadas. Você deve ter encontrado $F_{res} = A \cdot \rho \cdot v^2$. Porém, costuma-se usar uma expressão ligeiramente diferente: $F_{res} = C_d \cdot A \cdot \frac{\rho v^2}{2}$, onde C_d é o chamado coeficiente de arrasto aerodinâmico, que depende, principalmente, da forma do objeto. Para uma esfera, $C_d = 0.5$.

Capítulo 11

Centro de Massa

A Gravitação, como colocada por Newton, afirma que existe uma força de atração entre todos os corpos do universo que possuam massa. Ou seja, quando dois corpos se atraem, cada parte de um dos corpos atrai todas as outras partes do mesmo corpo, bem como todas as partes do outro corpo. A atração visível é apenas a atração resultante (da mesma forma que a força total sobre um corpo, quando ele é empurrado, é a soma da repulsão eletromagnética entre todos os átomos).

Assim, antes de pensarmos na atração entre Sol e planeta, devemos pensar na atração entre as partes do próprio planeta. Neste ponto, vale a pena retomar o ponto de vista de Copérnico. Porque se temos certa quantidade de partículas se atraindo gravitacionalmente, como a atração é sempre *entre* os corpos e não tem uma direção preferencial, a tendência é, na média, que a massa se agrupe homogeneamente em todas as direções, ou seja, tome forma esférica! De fato, para uma quantidade de massa razoável, a gravidade que a mantém pode ser pensada como sua tendência à esfericização.

Essa tendência facilita bastante as coisas. Usando um argumento geométrico, a esfera é a única figura em que todo ponto tem como correspondente um ponto oposto em relação ao centro. O resultado importante que se tira disso é que a atração gravitacional exercida por uma esfera é igual à atração que seria exercida por uma massa pontual, como se toda a massa estivesse concentrada no seu centro. É possível demonstrar isso formalmente¹, para não começarmos o capítulo de forma muito assustadora, deixaremos isso como exercício para quem se interessar.

Por isso nós podemos dizer que somos atraídos para o centro da Esfera de Terra, o nosso planeta. Além do mais, quando tratamos da atração entre Sol e Terra, por dois motivos, consideramos uma força resultante como se ambos os corpos fossem pontos de matéria concentrada: (i) Tanto o Sol quanto a Terra têm a forma muito similar à de uma esfera, ou seja, de perfeita simetria; (ii) mesmo que não fossem, suas dimensões são muitas ordens de grandeza menores que a distância que os separa – seus raios são desprezíveis para causar alguma variação na força média sentida. Como a massa da Terra é muito menor que a massa do Sol, consideramos que o *centro* da Terra é atraído pelo *centro* do Sol.

Mas, de uma forma mais geral, a definição de centro de um objeto não é tão simples. O centro do nosso corpo, por exemplo, deve estar na região do estômago, talvez. Em um halter de musculação (duas esferas iguais ligadas por uma barra), onde ficaria o centro deste corpo? Pelo mesmo argumento de simetria que usaríamos com uma esfera, diríamos que é no centro da barra, que a divide em duas partes iguais! E se agora removermos a barra, e ficarmos só com as duas esferas? O “centro” do nosso “objeto” continua sendo o ponto médio entre as duas esferas,

¹ Dado um ponto P, e uma esfera de massa M e raio R, distante D do ponto P, o campo gravitacional total neste ponto, gerado por todos os pedaços da esfera, é equivalente ao campo gerado por um ponto de massa M colocado à distância D, isto é, vale GM/D^2 e aponta na direção do ponto (o centro da esfera).

apesar de não haver matéria neste ponto! É, acontece às vezes: o mesmo se poderia dizer sobre o centro de uma esfera oca. . .

Sendo mais diretos, a pergunta a se responder é a seguinte: como se comportaria gravitacionalmente um sistema de duas estrelas que tenham massas iguais? Responderíamos: ambas tenderiam a cair em direção ao ponto médio entre elas. E se uma das estrelas tiver uma massa que é o dobro da outra? Nesse caso, o centro estará duas vezes mais próximo da estrela mais massiva.

Formalmente, parece então razoável que definamos o CENTRO DE MASSA como o ponto que está na posição média, ponderada² pelas massas, entre as posições das porções de massa. Para dois corpos de massas m_1 e m_2 e posições r_1 e r_2 , a posição r_{CM} do centro de massa é dada por:

$$r_{CM} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

EXEMPLO

Imaginem dois corpos de massa 5 kg e 10 kg, separados por uma distância de três metros. Como um corpo tem o dobro de massa do outro, é de se esperar que o centro de massa esteja duas vezes mais próximo da segunda massa que da primeira – ou seja, a um metro de distância da segunda massa, e a dois metros da primeira. Fazendo as contas: se adotarmos nosso sistema de referência como partindo da massa 2 (ou seja, $r_2 = 0$), teremos que a distância do centro de massa à massa 2 será

$$r_{2-CM} = \frac{m_1 r_1}{m_1 + m_2} = \frac{5 \times 3}{15} = 1m$$

Da mesma forma, adotando a origem na massa 1:

$$r_{1-CM} = \frac{m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{10 \times 3}{15} = 2m$$

Como outro exemplo, vamos voltar à bomba que explodiu em algum lugar do capítulo 10. A cápsula explodiu em vários pedaços, mas voaram de forma que a quantidade de movimento total do sistema permaneceu zero. Para muitos corpos, estenderíamos a definição de centro de massa:

$$r_{CM} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \dots + m_{N-1} r_{N-1} + m_N r_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_{N-1} + m_N} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

Se a bomba estivesse voando a uma velocidade V quando explodisse, o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento diria que:

$$(m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_{N-1} + m_N) \cdot V = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots + m_{N-1} v_{N-1} + m_N v_N$$

Ou, reescrevendo:

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots + m_{N-1} v_{N-1} + m_N v_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_{N-1} + m_N} = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i}$$

Esse V é ninguém menos que a VELOCIDADE DO CENTRO DE MASSA! Esta é uma outra forma de escrever a conservação da quantidade de movimento: na ausência de forças externas, a velocidade do centro de massa do sistema permanece constante! Observe que esta fórmula é análoga à da definição da posição do centro de massa; podemos chegar daquela nesta tomando a variação das posições em relação à variação de tempo, ou, em outras palavras, derivando as posições em

² Este é o sentido original da MÉDIA PONDERADA: *pondus* em latim (que deu origem também a *pound*, em inglês) significa peso, ou massa.

relação ao tempo. Pelo mesmo processo, poderíamos ainda calcular ACELERAÇÃO DO CENTRO DE MASSA, com o cuidado adicional de, neste caso, levar em conta as forças externas.

No caso de um corpo como a Terra, ou qualquer corpo contínuo (não dividido em pedaços), teríamos que usar o artifício de dividir em pedaços cada vez menores, tendendo a zero; de forma análoga ao que fizemos para calcular áreas de gráficos, chegaríamos ao conceito de integral. Além disso, com corpos tridimensionais, as posições são vetores; teríamos então que calcular três médias, uma para cada um dos eixos x , y e z . Calcular formalmente a posição do centro de massa de uma esfera contínua de massa, como a Terra, daria muito trabalho; mas como a esfera é simétrica, podemos saber a resposta sem passar por isso.

Com isso, já podemos responder à nossa pergunta inicial: se duas estrelas de massas quaisquer estão próximas, e têm velocidade suficiente, perpendicular à atração entre elas, para não se chocarem, elas orbitarão o centro de massa comum! Pode parecer estranho a princípio, mas boa parte das estrelas no universo está em um sistema deste tipo, de duas ou mais estrelas³. Para o caso de apenas duas, se colocarmos a origem das coordenadas no centro de massa, ficaremos com

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \quad \text{ou} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

e a mesma relação com as velocidades das estrelas:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

Podemos então usar a segunda lei de Newton para verificar como é o movimento de um dos corpos (que chamaremos de corpo 1) ao redor do centro de massa.

- 89- (IOAA 2012-adaptada) Calcule a posição do centro de massa do sistema Terra-Lua. Qual o ângulo percorrido pelo centro da Terra com relação ao centro de massa do sistema durante 1 mês sideral, visto do Sol? Calcule o diâmetro mínimo de um telescópio operando no visível a 1 UA da Terra capaz de detectar esse movimento.
- 90- Devido à presença dos planetas, o Sol bamboleia ligeiramente ao redor do centro de massa do sistema solar. Calcule a velocidade do Sol com relação ao centro de massa do sistema Júpiter-Sol (despreze a influência dos outros planetas). Faça o mesmo caso Júpiter estivesse a 1 UA do Sol.
- 91- Num experimento realizado na Terra, mede-se, no vácuo, o tempo de queda de um corpo de 100 g e de um corpo de 1 ton, com precisão de 0.1 ys (yoctosegundos = 10^{-24}). Desprezando a influência gravitacional de quaisquer corpos celestes e a resistência do ar, calcule a diferença entre os dois tempos medidos.

³Um caso bastante curioso e conhecido é o da estrela Castor (α *geminorum*), que na verdade é um sistema sêxtuplo, sendo três sistemas duplos orbitando um centro de massa comum às seis!

Capítulo 12

Física de Rotações

Na física, definimos CORPO RÍGIDO como um conjunto de N partículas que estejam a distâncias sempre fixas entre si (Repare que sistemas duplos com órbitas circulares são corpos rígidos de duas partículas, segundo essa definição). Vejamos o que essa definição pode dizer sobre como determinar o movimento de um corpo rígido.

Tomemos uma partícula P_1 do corpo rígido em questão. Essa partícula, considerada pontual, pode estar em qualquer ponto do espaço, precisando das três coordenadas espaciais para ser localizada – dizemos, por isso, que ela tem três graus de liberdade. Tomemos agora uma partícula P_2 . Dela, já temos uma informação: sua distância a P_1 é fixa, de forma que ela só tem liberdade de mudar de posição ao longo de uma casca esférica em torno de P_1 – dois graus de liberdade. Uma terceira partícula P_3 tem distâncias fixas de P_1 e de P_2 ; portanto, só pode se mover em uma circunferência, cujo centro é cortado pela reta formada por P_1 e P_2 : um grau de liberdade. Uma quarta partícula, P_4 , com posição fixada a três outros pontos não-colineares, não tem mais nenhuma liberdade de movimento em relação às outras.

Assim, no total, o corpo rígido tem $3 + 2 + 1 = 6$ graus de liberdade de movimento. Três desses graus – ou seja, metade deles – correspondem aos graus de translação do corpo rígido como um todo (do seu centro de massa, para facilitar), que são os três graus da primeira partícula que observamos. Além disso, o movimento circular de P_3 em torno da reta formada por P_1 e P_2 é uma rotação tendo essa reta como eixo! E os movimentos de P_2 são, na verdade, os dois graus de rotação desse mesmo eixo! Três graus de translação, e três de rotação: determinando esses seis movimentos, o movimento de um corpo rígido fica completamente determinado.

O movimento de um ponto da superfície terrestre, por exemplo, é bastante complicado; para visualizá-lo, dividimos esse movimento em uma translação (que é, na verdade, uma revolução em torno do Sol) e duas rotações: a rotação em torno do eixo polar (rotação propriamente dita) e a rotação em torno do eixo eclíptico, que, por ser muito lenta, nos parece um deslocamento gradual do eixo de rotação polar (a precessão). Ademais, ainda podemos considerar o sistema Terra-Sol como um corpo rígido (uma aproximação razoável neste caso); nesse caso, a revolução da Terra seria vista como uma rotação, e este corpo ainda faria uma translação em torno do centro da galáxia; assim seguimos sucessivamente.

Para facilitar o estudo de um corpo em movimento, podemos ignorar a translação do corpo como um todo, colocando nosso referencial sobre um ponto do próprio corpo, que se move junto com ele. É o que sempre fazemos na Terra: para sabermos o quanto viajamos durante um cruzeiro marítimo, não é relevante saber sobre o trecho da viagem devido à revolução da Terra em torno do Sol – mesmo que o cruzeiro dure, digamos, três meses. Para a maioria dos casos é conveniente colocar sobre o centro de massa, o que simplifica tanto o estudo da translação do corpo com o da sua rotação.

Assim, o primeiro problema é como descrever uma rotação. Para uma rotação estar bem definida, precisamos determinar três características dela: (i) em que eixo o corpo gira?, (ii) quão rápido ele gira?, (iii) no sentido horário ou anti-horário? O item (ii) é o mais fácil de responder, se já estivermos familiarizados com o conceito de velocidade angular. E quanto às outras? Repare que estas três perguntas são muito similares às que fazemos para definir um vetor¹: (i) em que direção aponta o vetor?, (ii) qual o seu tamanho?, (iii) qual o seu sentido? Parece então que já temos uma ferramenta matemática ideal: definamos o vetor velocidade angular: sua direção será a direção definida pelo eixo de rotação e seu módulo será o valor numérico da velocidade angular (ângulo varrido por unidade de tempo). Para o seu sentido, adotaremos a seguinte convenção: olhando o corpo rodando “de cima”, se ela aparecer como uma rotação anti-horária, o vetor aponta para cima; se for uma rotação horária, ele aponta para baixo².

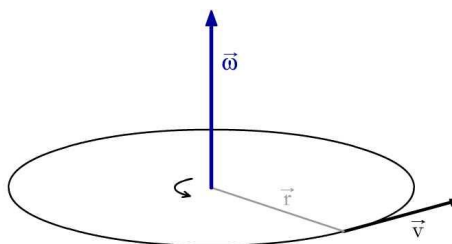


Figura 12.1: O vetor velocidade angular de um disco girando. Repare que, como o disco é supostamente rígido, todos os pontos têm a mesma velocidade angular, apesar de cada um ter uma velocidade linear diferente.

Não podemos, ainda, perder de vista a relação com as grandezas lineares. Para relacionar, por exemplo, o vetor velocidade angular de um corpo rígido com o vetor velocidade linear de um certo ponto, também temos em mãos uma operação conveniente: o PRODUTO VETORIAL³:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (12.1)$$

- 92- Uma milha marítima é definida como o comprimento de um arco de um minuto no equador. Quanto mede a milha marítima em quilômetros?
- 93- Com que velocidade se move Curitiba (25°25' S - 49° 15' W) por causa da rotação da Terra? Cite uma cidade que se mova com o dobro da velocidade

É conveniente se definir também a variação da velocidade angular, a chamada ACELERAÇÃO ANGULAR. No caso específico em que o eixo de rotação de um corpo é fixo, o vetor aceleração angular tem a mesma direção do vetor velocidade angular.

Agora que já temos a cinemática de rotações, precisamos de uma dinâmica. Como já possuímos uma dinâmica de ponto material (leis de Newton), basta adaptá-la para o caso de corpos extensos em rotação.

Um bom ponto de partida pra esta tentativa é usar um valor escalar muito famoso que aparece de coadjuvante de uma das leis mais aceitas pela física: o trabalho. Caso consideremos que o deslocamento ($\Delta \vec{x}$) é pequeno o suficiente para a força ser considerada constante, o trabalho é dado por:

¹ Ver apêndice C

² Repare que esta definição independe de qual lado elejamos como “para cima”.

³ Veja no apêndice C

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} \quad (12.2)$$

Podemos assumir que existe uma grandeza, análoga à da força para rotações (nomeada comodamente de τ), responsável por realizar trabalho neste tipo de movimento:

$$W = \vec{\tau} \cdot \Delta \vec{\theta} \quad (12.3)$$

A partir desta analogia, podemos descobrir como τ se relaciona com F . Consideremos um deslocamento muito pequeno (tal que possamos aproximar $\sin \theta = \theta$), como podemos ver na figura 12.2.

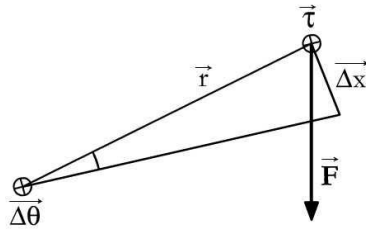


Figura 12.2: Um corpo pontual se movendo sob uma força F por um trecho Δx , ou, de forma equivalente girando por um ângulo $\Delta \theta$ sob a ação da grandeza τ . Os vetores $\Delta \theta$ e τ estão representados por $\otimes$, o que significa que eles apontam “para dentro” da folha.

Da expressão do trabalho (equação 12.3), temos que:

$$\vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = \vec{\tau} \times \Delta \vec{\theta} \quad (12.4)$$

Da equação 12.1, podemos chegar em $\Delta \vec{x} = \Delta \vec{\theta} \times \vec{r}$. (Aqui, $\vec{r}$ é a distância do ponto que estamos estudando à origem do nosso referencial⁴). Substituindo em 12.4:

$$\vec{F} \cdot (\Delta \vec{\theta} \times \vec{r}) = \vec{\tau} \times \Delta \vec{\theta} \quad (12.5)$$

No primeiro termo, temos o que chamamos de produto misto: um produto duplo em que um é produto escalar e outro é produto vetorial. Podemos explorar algumas propriedades destes produtos: a comutatividade do produto escalar e alternância entre produtos escalar e vetorial num produto misto:

$$\vec{F} \cdot (\Delta \vec{\theta} \times \vec{r}) = \Delta \vec{\theta} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \Delta \vec{\theta} \quad (12.6)$$

Com isso, temos que:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (12.7)$$

Nossa “força” para rotações. Essa grandeza é chamada de TORQUE⁵. De posse dela, podemos também forjar uma versão da segunda lei de Newton para a mesma:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (12.8)$$

⁴Basta considerar que, como o intervalo é muito pequeno, $\vec{v} \approx \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ e $\vec{\omega} \approx \frac{\Delta \vec{\theta}}{\Delta t}$

⁵ A grandeza já era usada nos tempos de Newton; o nome vem do latim *torquere*, torcer – já que era a influência que causava a torção dos corpos.

Pela regra da derivada do produto⁶:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{p}] = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (12.9)$$

Como o momento linear e a velocidade são obviamente paralelos (pois $\vec{p} = m\vec{v}$, o primeiro termo se anula e

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{p}] = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (12.10)$$

Logo, podemos definir um MOMENTO ANGULAR como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (12.11)$$

Esquemáticamente, podemos fazer uma tabela comparando as grandezas lineares conhecidas por nós com as grandezas angulares que acabamos de cunhar (tabela 12.1).

Tabela 12.1: Grandezas análogas nas translações e rotações

Movimento Linear		Movimento Angular	
Posição:	$\vec{r}$	Ângulo de rotação:	$\vec{\theta}$
Velocidade:	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Velocidade angular:	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$
Aceleração:	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Aceleração angular:	$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Momento linear:	$\vec{p} = m\vec{v}$	Momento angular:	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Força:	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	Torque:	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

A analogia com o momento linear nos leva a pensar se não podemos também conseguir uma lei de conservação análoga.

Seja um sistema de N partículas, numeradas de 1 até N . Cada partícula marcada com um número i tem definida, em cada instante, sua posição $\vec{r}_i$ em relação à origem do referencial, sua velocidade $\vec{v}_i$ e a força resultante $\vec{F}_i$ que atua nela. O sistema inteiro pode ser caracterizado também por uma posição e uma velocidade: as do centro de massa. Ele também sofre uma força resultante $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (12.12)$$

E, portanto, um torque resultante $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (12.13)$$

Aplicando a versão para rotações da Segunda Lei de Newton, achamos também uma expressão envolvendo o momento angular total $\vec{L}$ do sistema.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (12.14)$$

Consideremos agora que este sistema é isolado, isto é, não existem forças externas. Isso quer dizer que todas as forças são forças trocadas entre as N partículas. Deste modo, a força que age sobre a partícula i é a soma das forças exercidas sobre ela por cada outra partícula j ⁷:

⁶ Ver apêndice A

⁷ Note que segundo essa nomenclatura, $\vec{F}_{ij}$ é a força que a partícula j exerce na partícula i

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij} \quad (12.15)$$

E a força resultante do sistema:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij} \quad (12.16)$$

Da mesma forma temos, para o torque:

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (12.17)$$

Podemos reescrever a somatória, usando que $x = \frac{1}{2}(x + x)$ e simplesmente chamando i de j e j de i na segunda somatória:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right] \quad (12.18)$$

Podemos inverter a ordem da soma na segunda somatória:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right] \quad (12.19)$$

Agrupando as duas em uma somatória só:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right] \quad (12.20)$$

Graças à terceira lei de Newton, temos que a partícula i exerce na j força de mesma intensidade e sentido oposto que a j exerce na i – isto é, $F_{ij} = -F_{ji}$ (para valores diferente de i e j , entretanto, assume valores diferentes).

$$\vec{\tau} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N [\vec{r}_i - \vec{r}_j] \times \vec{F}_{ij} \quad (12.21)$$

Agora devemos fazer uma suposição, que apesar de parecer óbvia, é uma suposição bastante forte sobre a natureza das forças: a de que a força entre dois corpos está sempre na direção da linha que os liga. De fato isso é verdade para quase todas as forças que conhecemos, sendo quase irresistível simplesmente considerar isso como uma verdade evidente sobre as forças. Mas aqui entra o papel do rigor matemático: nas nossas suposições iniciais sobre movimentos (que se resumem às leis de Newton), esta conclusão não está dita! Portanto, se vamos assumir isso, temos que deixar bastante explícito, e nunca perder de vista o fato de isto ser uma suposição adicional. Para deixar isso ainda mais marcado, vamos dar inclusive um nome especial a esse tipo de força: FORÇA CENTRAL.

Também devemos perceber que $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ nada mais é que o vetor que liga os dois corpos, ou seja, $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) // \vec{F}_{ij}$, e portanto: $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$

Assim,

$$\vec{\tau} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{0} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad (12.22)$$

A derivada temporal do momento angular é zero, isto é, o momento angular não varia no tempo, isto é, ele é constante. Achemos finalmente uma lei de conservação, a CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR:

Na ausência de torques externos (e com todas as forças internas sendo forças centrais) o momento angular do sistema se conserva.

- 94- (IOAA 2011) Forças de maré resultam num torque na Terra. Supondo que, durante as últimas centenas de milhões de anos, tanto esse torque quanto a duração do ano sideral foram constantes e tiveram valores de $6.0 \cdot 10^{16} \text{ N m}$ e $3.15 \cdot 10^7 \text{ s}$ respectivamente, calcule quantos dias havia num ano há $6.0 \cdot 10^8$ anos atrás. O momento de inércia de uma bola homogênea de raio R e massa m é $I = \frac{2}{5}mR^2$.
- 95- Calcule a mudança na duração do dia em um ano, sabendo que a lua se afasta da Terra cerca de 4 cm por ano.
- 96- Uma bailarina gira com velocidade angular ω com os braços abertos, situação na qual suas mãos possuem distância R do eixo de rotação. Ela, então, puxa os braços, de forma que possuam distância $R/2$ do eixo de rotação. Calcule a razão entre as velocidades areolares nas duas situações. *OBS.:* A velocidade areolar σ corresponde à razão entre a área percorrida pelos braços da bailarina ΔA e o tempo Δt gasto para percorrê-la, i.e., $\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta t}$.

Unidade III

Mecânica Celeste

Se eu estivesse novamente no início dos meus estudos, seguiria o conselho de Platão e começaria com a matemática.

Galileu Galilei

Na primeira unidade, mostramos a evolução histórica da mecânica celeste – em particular, como Newton induziu sua gravitação partindo das Leis de Kepler. Este último fato, entretanto, não garante que tenhamos as Leis de Kepler válidas na mecânica newtoniana: se formos analisar detalhadamente, nenhuma das leis de Kepler realmente vale para o Sistema Solar! Para que conheçamos as exatas condições de validade das Leis de Kepler, precisamos percorrer o caminho inverso: *deduzi-las*, a partir da gravitação newtoniana, em sua forma mais geral.

Muitos podem se perguntar qual a necessidade de um rigor físico e matemático tão grande, se já temos fortes argumentos conceituais para acreditar nessa teoria. Mas, em geral, argumentos conceituais não são completos e rigorosos o suficiente para podermos concluir algo, levando-nos, muitas vezes, a conclusões estranhas ou mesmo absurdas.

Vejamos um exemplo célebre de como o não-conhecimento de certos resultados formais faz as pessoas chegarem a conclusões incorretas: O PARADOXO DA DICOTOMIA⁸. Este paradoxo consiste em um corredor que pretende cobrir um certo percurso. Antes de chegar ao fim do percurso, ele precisa passar por um ponto na metade dele. Depois disso, ele precisa passar por um ponto a 3/4 do início do percurso, mas depois ele precisa passar por um ponto em 7/8 do percurso e assim sucessivamente, podendo fazer divisões cada vez mais próximas da chegada. Mas se ele leva tempos finitos para ir de um ponto a outro, ele levaria um tempo infinito para passar por todos esses pontos; isto é, independentemente do comprimento da pista, o corredor NUNCA chegaria!

Que conclusões podemos tirar deste paradoxo? Ou o movimento é impossível (pois não dá pra ir de um ponto a outro), o que é absurdo, afinal todos vemos pessoas se moverem pelo mundo⁹; ou o espaço não é infinitamente divisível em partes reais. Este foi um dos argumentos que apoiavam a visão holística¹⁰ de Aristóteles.

O problema neste raciocínio é a idéia intuitiva que a soma de infinitos intervalos finitos divergiria (isto é, tenderia para o infinito). Caso pensemos que este corredor tenha velocidade

⁸Este paradoxo foi criado por Zenão de Eléia (490-425 a.C.), um filósofo grego, famoso por seus vários paradoxos, os quais usava para refutar idéias filosóficas opostas às que ele defendia. O paradoxo de Aquiles com a tartaruga também foi formulado por ele. Esses paradoxos são o que chamamos hoje de *raciocínio por absurdo*: supondo que uma certa idéia seja verdadeira, ele constrói um raciocínio que chega a uma conclusão absurda; ou seja, a idéia inicial tem que ser falsa.

⁹De fato, Parmênides, mestre de Zenão, defendia a tese de que movimentos são realmente impossíveis, e que todos os movimentos que vemos não passam de ilusões. Ele defendia isso por acreditar que o universo é constituído de um mesmo todo imutável, uma “unidade”.

¹⁰A idéia do *holismo* é que o todo precede as partes, isto é, antes de ser composto de partes, um objeto é um todo, “maior” que simplesmente as partes juntas.

constante, nosso problema é eliminado naturalmente: temos que os intervalos de tempo são múltiplos dos intervalos espaciais; como, por construção, a soma dos intervalos espaciais não tende a infinito (afinal, o percurso tem um intervalo espacial finito), a soma dos intervalos temporais também não divergirá:

$$\sum \Delta t = \sum \left(\frac{\Delta s}{v} \right) = \frac{1}{v} \sum \Delta s = \frac{L}{v}$$

O desconhecimento, por parte dos gregos, de resultados matemáticos formais (nesse caso, do formalismo de séries infinitas, que foi formulado apenas no século XIX) fez com que eles chegassem à conclusão que um espaço infinitamente divisível seria impossível (Note que a resposta final da discussão da natureza final do espaço físico ainda não foi dada, se é que um dia será, pois a possibilidade do espaço ser infinitamente divisível não implica que ele o é).

A Mecânica Celeste é a mecânica dos céus, a física dos movimentos dos grandes corpos fora da Terra. Vimos no capítulo anterior que a conclusão histórica sobre esses movimentos, conclusão da qual somos herdeiros, é a de que os movimentos celestes (bem como muitos movimentos na Terra) são regidos pela Gravitação Universal de Newton, num jogo perpétuo de atração entre os corpos. Podemos perguntar, como Leibniz a Newton, de onde vem essa força, como ela subsiste? Podemos perguntar também porque ela é assim e não de outra forma, porque é essa e não outra força a reger os movimentos celestes? Embora sejam perguntas de importância cosmológica fundamental (e arriscaremos responder algumas no capítulo de Cosmologia), são tecnicamente irrelevantes para o formalismo da Mecânica Celeste. Aqui, podemos prosseguir de maneira axiomática, tomando como princípios fundamentais as propriedades da força gravitacional. Façamos assim, e vejamos como se constitui tal formalismo.

Capítulo 13

Gravitostática

Na Unidade I, vimos como construir a expressão para a força da gravitação universal:

$$F = G \frac{Mm}{R^2}$$

Nosso interesse principal se resume ao caso em que a massa de um dos corpos envolvidos (por exemplo, a Terra: $M \sim 10^{24} \text{ kg}$) é muito maior que a de outro (por exemplo, uma pessoa: $m \sim 100 \text{ kg}$). Neste caso díspar, sentimos que a atração só é exercida em um dos corpos (não vemos a Terra sentir a atração gerada pelo nosso corpo), de forma constante e uniforme ao longo de sua superfície.

Assim, pessoas de pesos diferentes sofrem a mesma atração, mesmo sabendo que a força é mútua. Podemos dizer que existe uma parte da força gerada por nós (nossa massa m) e uma parte que é uma propriedade *do espaço*, que existe aí, independente de quem está sendo atraído. Essa parte da força é o que chamamos de CAMPO GRAVITACIONAL, que em nosso caso vale:

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Podemos fazer algumas perguntas interessantes. Tomemos a Terra como um corpo isolado no universo. O campo gerado por ela se espalha pelo universo. Em que lugares do universo esse campo é mais intenso? Na superfície da Terra, naturalmente; se cavarmos um buraco para dentro da Terra, o campo diminui (voltaremos a isso). E se compactarmos a Terra em metade do volume? A distância equivalente à atual superfície continuará tendo o mesmo valor de campo, mas o campo ainda aumentará, até atingirmos a nova superfície.

E se compactamos a Terra em um ponto? Para qualquer círculo que tomemos, sempre podemos chegar mais perto, conseguindo sempre um campo maior. Em distâncias normais, o campo continuará normal; em distâncias mínimas, o campo atingirá valores máximos. Até o limite em que a velocidade de escape (ver abaixo) torna-se maior que a velocidade da luz: então não vemos nada que acontece abaixo dessa distância. Isso é o que chamamos de BURACO NEGRO; a rigor, toda massa pontual tem um desses em torno dela.

13.1 Gravidade Subterrânea

Imagine a seguinte situação: cavamos um túnel para o interior da Terra, que nos faz atravessar a Terra passando pelo seu centro. Como varia a gravidade dentro deste túnel?

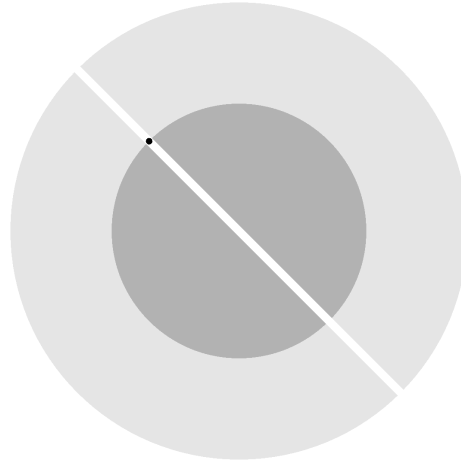


Figura 13.1: Gravidade dentro da Terra. Para analisar melhor o problema, podemos separar a atração em duas partes: da camada acima do objeto (nula) e da camada abaixo (um mini-planeta).

Esteja você dentro de um desses túneis, a uma distância r do centro. Neste caso, podemos separar o problema em duas partes: a gravidade exercida pela parte acima de você e a gravidade exercida pela parte abaixo. A primeira parte é sempre zero! É um resultado conhecido que o campo dentro de cavidades esféricas uniformes é sempre nulo. Para ter certeza disso, vejamos a figura abaixo.

Se tomarmos um ponto qualquer e ângulos iguais dos dois lados, vemos que uma parte está mais próxima que a outra. A parte mais próxima, contudo, possui uma quantidade de massa menor. A razão entre as quantidades de massa depende da razão entre as áreas, que depende da razão entre o quadrado das distâncias. Por outro lado, a força cai com o quadrado da distância e os dois efeitos se cancelam $\Rightarrow D$

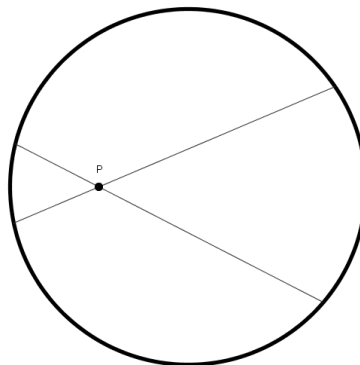


Figura 13.2: Olhando dentro de um cone, a quantidade de massa (área) aumenta com o quadrado da distância, mas a força exercida por ela diminui com o quadrado da distância. Com isso, o campo resultante é sempre zero.

A parte abaixo de você, por outro lado, funciona como um pequeno planeta:

$$g = \frac{GM'}{r^2}$$

onde M' é a massa contida no pequeno planeta e r é a distância até o centro. Se supusermos que a densidade da Terra é constante, temos que:

$$\rho = \frac{GM}{4/3\pi R^3} = \frac{M'}{4/3\pi r^3} \Rightarrow M' = \frac{M}{R^3} r^3$$

Com isso, o campo pode ser escrito como:

$$g = \frac{GM}{R^3} r$$

que depende linearmente da distância ao centro, multiplicada por constantes. Ela funciona de maneira análoga à força elástica ($-kx$), correspondente a um movimento harmônico simples. Isso significa que, se abrimos um buraco até o outro lado da Terra, seria teoricamente possível ficar brincando de gangorra: o corpo oscilaria de uma entrada a outra do buraco.

97- Um revolucionário serviço de trem opera no interior da Terra, em túneis retos, à vácuo, que conectam algumas das principais cidades do mundo. Mas o trem não possui propulsão; em vez disso, vale-se apenas da gravidade terrestre. Escreva a equação geral de movimento de um trem por um destes túneis e, depois, estime o tempo de viagem do trem que liga Nova Iorque a Berlim.

98- No trem do exercício anterior, os dois lados do trilho gastam por igual ou um deles gasta mais? Se ambos gastam por igual, por que isso ocorre? E se um deles gasta mais, qual é ele?

99- Descubra, para o trem do exercício 97, a duração e o destino da viagem caso um acidente ocorresse e o vácuo dentro do túnel fosse desfeito. Considere que o trem tem massa de 100 toneladas, área de 15 m^2 , coeficiente de arrasto $C_d = 1.2$ e que o ar possui densidade de 1.225 kg m^{-3} . Considere ainda que a densidade do ar é constante dentro do túnel. OBS.:

A força de resistência do ar, nesse caso, é dada por $F_{res} = C_d \cdot A \cdot \frac{\rho v^2}{2}$.

100- O Instituto Examinador de Acidentes Cósmicos enviou o seguinte relatório a um de seus cientistas:¹

Uma nave de pequenas pessoas verdes devoradoras de titânio encontrou um asteroide perfeitamente esférico. Um fino túnel foi cavado de um ponto na superfície até o centro do corpo. Isso confirmou que o asteroide era feito inteiramente de titânio homogêneo. Naquela situação, ocorreu um acidente e um dos homens verdes, que olhava o buraco a partir da superfície, caiu no túnel e morreu com o impacto no fundo. Apesar disso, o trabalho continuou e os pequenos homens verdes continuaram a escavar o titânio; depois de muito tempo, o fino tunel havia se tornado uma cavidade esférica em um dos hemisférios do asteroide. Então um segundo acidente ocorreu: outro homem verde caiu da superfície e, ao atingir o fundo da cavidade, também morreu.

O instituto pediu ao cientista que calculasse a razão entre as velocidades de impacto em cada um dos acidentes, bem como a razão dos tempos de queda dos pobres homens verdes. O que o cientista respondeu?

¹Problema 110 de *200 Puzzling Physics Problems*. Peter Gnädig, Gyula, Honyek, Ken Riley. 2001: Cambridge University Press.



13.2 Velocidades Cósmicas

13.2.1 Primeira

Como vimos anteriormente, a Gravitação Newtoniana unifica a queda dos corpos e os movimentos orbitais. Projéteis lançados com velocidades horizontais maiores descrevem uma curva de maior curvatura; a velocidade pode ser aumentada até que a curvatura seja tão grande quanto a curvatura da Terra. Neste caso, a altura do projétil não muda mais; o corpo permanece caindo, mudando de direção junto com a Terra, mantido em movimento circular a uma altura e com velocidade de módulo constante.

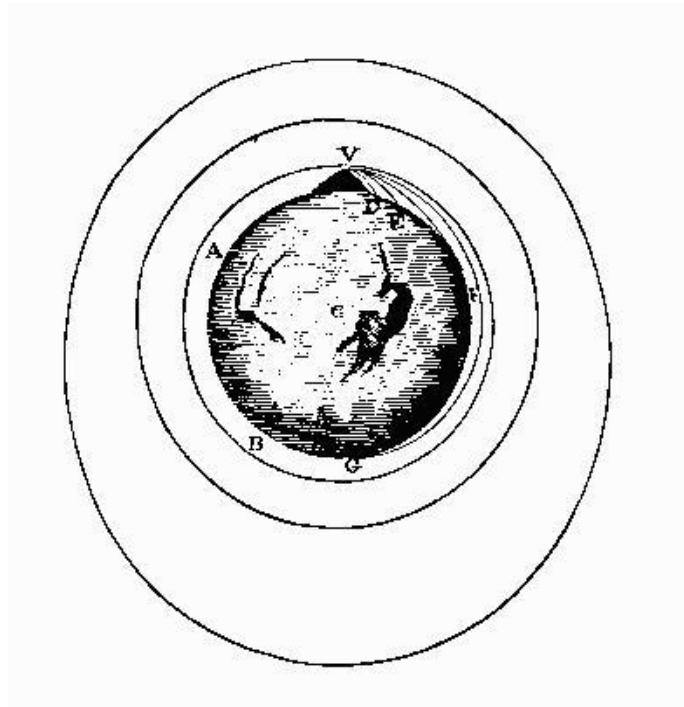


Figura 13.3: Ilustração do *Principia* para lançamentos da montanha, incluindo órbitas com velocidades iniciais cada vez maiores.

Tal situação, em que o movimento assume todas as direções mas sempre a mesma intensidade, é causado pelo que chamamos de *aceleração centrípeta*. O conceito e a demonstração da relação matemática está no capítulo 9. Podemos escrever que a força gravitacional é quem causa a aceleração centrípeta:

$$\frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{v^2}{R}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{gR_T}$$

onde M_T e R_T são os raios do corpo de onde se fez o lançamento – a Terra, no caso. Essa velocidade é a mínima necessária para um corpo entrar em órbita, sendo por isso conhecida como PRIMEIRA VELOCIDADE CÓSMICA. Na superfície da Terra, essa velocidade vale aproximadamente 8 km/s.

Isso significa que órbita circular é uma das possibilidades de movimento dos planetas, desde que tenham exatamente a velocidade dada acima. E se, contudo, a velocidade for diferente? Em outras palavras: se nós, no alto da montanha (ignorando a atmosfera), lançarmos a bala de canhão com uma velocidade maior que a de uma órbita circular, como ela vai se mover?

13.2.2 Segunda

Com velocidades de lançamento maiores que a primeira velocidade cósmica, devemos esperar que a trajetória tenha uma curvatura ainda maior que a Terra, fazendo o corpo aumentar sua altura em relação à Terra. Como a órbita tem que ser fechada (imagine o porque), sua altura depois diminui e ele volta ao ponto inicial. Pela simetria do problema, se o ponto de lançamento é o mais baixo (chamamos de *perigeu*), o ponto de afastamento máximo deve ser o oposto na órbita (*apoceu*). Veremos em breve que as curvas dessas órbitas são elipses.

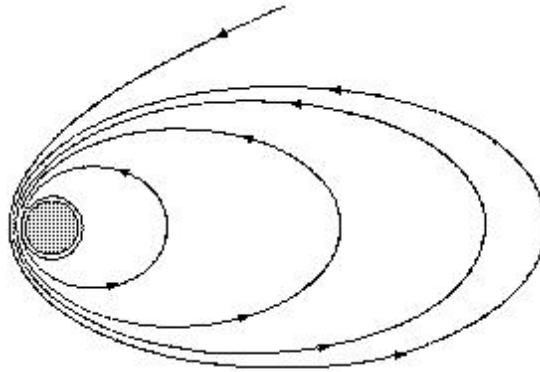


Figura 13.4: Órbitas ainda mais excêntricas, até a situação em que o corpo não mais retorna.

Assim, aumentando a velocidade de lançamento, aumentamos a altura do apoastro. Será que existe alguma velocidade que faça essa altura ser infinita? Neste caso, a mínima velocidade necessária deve ser o suficiente para atingir uma distância infinita, chegando até lá com velocidade zero. Em outras palavras, no infinito (energia potencial zero) a velocidade é nula (energia cinética zero). Como a energia do movimento se conserva, podemos escrever, para o ponto de lançamento:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GM_T m}{R_T} = 0$$

ou, rearrumando os termos:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} = v_c \sqrt{2}$$

Essa velocidade é a mínima para que um corpo escape da Terra, adotando uma trajetória aberta, sem retorno. Ela é conhecida como VELOCIDADE DE ESCAPE ou SEGUNDA VELOCIDADE CÔSMICA. Na superfície da Terra, essa velocidade vale aproximadamente 11 km/s.

- 101- Em quanto deveria mudar a massa da Terra para que a Lua se afastasse para sempre?
- 102- Qual a velocidade de escape da Terra? E do Sol?
- 103- Qual a velocidade do cometa Halley quando sua distância ao Sol era de 1 U.A., se a velocidade orbital média da Terra é de 30 km s^{-1} ?
- 104- (Olimpíada Indiana) A razão entre os raios da Terra e da Lua é 10, enquanto a razão entre as acelerações da gravidade na terra e na lua é 6. Qual é a razão da velocidade de escape na superfície da Terra e na superfície da lua?
- (a) 1 : 10
 - (b) 1 : 7.7
 - (c) 1 : 6
 - (d) 1 : 3.2
- 105- (Olimpíada Indiana) Se a metade da massa do Sol simplesmente desaparecesse, qual seria a consequência para a Terra?
- (a) Irá mover-se numa órbita elíptica
 - (b) Irá escapar da gravidade solar
 - (c) Irá continuar na mesma órbita atual
 - (d) Irá se mover em uma órbita circular com o raio maior da órbita elíptica atual
- 106- O acúmulo de material meteórico no interior da órbita de um planeta influencia esta órbita? Se sim, de que forma?
- 107- As duas bases de lançamentos de foguetes que o Brasil tem são a Base da Barreira do Inferno, no Rio Grande do Norte, e a Base de Alcântara, no Maranhão. Porque escolheram esta localização para as bases? E porque se diz que a Base de Alcântara é a mais bem localizada do mundo?
- 108- (IAO 98) Em um novo serviço postal, um imenso canhão lança o pacote de correio da Inglaterra à Nova Zelândia. Estime a duração do voo.
- 109- (IAO 96) Uma espaçonave está pousada sobre um asteroide de 2,2 km de diâmetro, com uma densidade média de $2,2 \text{ g/cm}^3$, que gira lentamente. Os cosmonautas da nave decidem então viajar ao longo do equador do asteroide em um rover, de forma que eles completem a volta em 2,2 horas. É possível para eles fazer isso? Se não, por quê? Se sim, o que deve ser levado em conta?
- 110- (Olimpíada Russa) O Cometa Halley e o planeta Netuno transladam em torno do Sol com períodos de 76 e 165 anos respectivamente. Qual deles está mais perto do Sol no seu afélio?
- 111- (Seleção 2009) Estime o limite superior de quão grande deve ser um asteroide para que uma pessoa normal consiga escapar dele pulando.

Capítulo 14

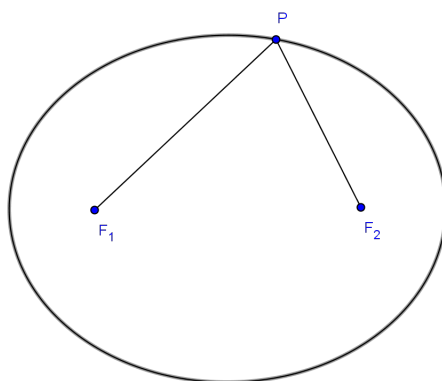
Elipse

Já deve ter ficado claro que elipses são muito importantes para a Mecânica Celeste. Então, antes de adentrarmos no assunto propriamente dito, seria útil conhecer um pouco melhor esse objeto geométrico.

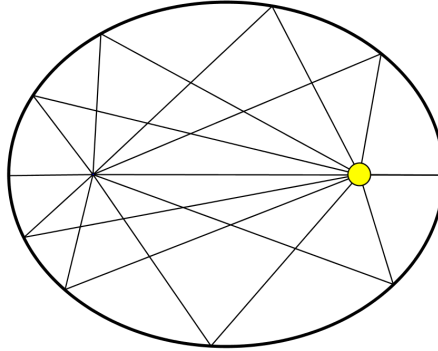
14.1 Definições

Existem muitas maneiras de definir uma elipse; neste capítulo, apresentaremos três delas.

- (a) **DEFINIÇÃO MECÂNICA (COM PREGOS E CORDA):** Dados dois pontos F_1 e F_2 e um terceiro ponto P , a elipse é a curva de todos os pontos cuja soma das distâncias a F_1 e a F_2 ($|\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}|$) é constante. Neste caso, dizemos que F_1 e F_2 são os *focos* da elipse. Uma maneira de construir isso é pregando dois pregos no chão, a uma distância arbitrária, e amarrar cada ponta de um barbante, do comprimento arbitrário, a um deles. Depois, puxe o meio do barbante com uma caneta, de modo a manter todo o barbante esticado. Mova a caneta em torno dos pregos, com os barbantes sempre esticados. Como o comprimento do barbante esticado (isto é, a soma das distâncias da caneta aos pregos) é constante, ao fim você terá uma elipse.



- (b) DEFINIÇÃO ÓPTICA (COM ESPELHOS): Dado um ponto que contenha uma fonte luminosa, a elipse é a curva que faz todos os raios luminosos refletirem de forma a convergir em outro ponto. O foco luminoso e o foco de convergência são ambos chamados *focos* da elipse. Em outras palavras, toda reta tangente de uma elipse é, no ponto de tangência, reta de reflexão (ângulo de incidência igual a ângulo de reflexão) para os raios vindos dos focos.



- (c) DEFINIÇÃO CÔNICA: Dado um cone e um plano, a interseção entre os mesmos é uma família de curvas (as *curvas cônicas*) que inclui a elipse. Esta aparece quando a inclinação do plano fica entre zero (quando a interseção é um círculo) e a inclinação da geratriz do cone (quando a interseção é uma parábola). Entre a inclinação da geratriz e 90 graus, a interseção é uma hipérbole. Uma maneira prática de produzir tais figuras consiste em cortar, com uma lâmina, um cone de madeira, cobrindo com tinta a seção do corte e carimbando-o em uma superfície lisa.



Dadas as três definições, resta demonstrar que elas são equivalentes. Vamos começar mostrando a equivalência entre as definições óptica e mecânica. Para isso, usaremos uma construção que será útil no futuro.

Sejam dois pontos F_1 e F_2 (que serão os focos da elipse) e um terceiro ponto P (que será um ponto qualquer sobre a elipse). Traçemos a reta de reflexão que passa por P , isto é, a que faz os raios que saem de F_1 passarem por F_2 e vice-versa. Agora tomemos a reflexão de F_1 na reta, isto é, o ponto cuja distância à reta é a mesma que a do primeiro foco. Chamaremos esse ponto de *anti-foco* F'_1 .

Chamemos de X o ponto em que o segmento $\overline{F_1 F'_1}$ cruza a reta de reflexão. Liguemos F'_1 a P . Por definição, $\overline{F_1 X}$ e $\overline{F'_1 X}$ têm tamanhos iguais, então os triângulos $\triangle F_1 P X$ e $\triangle F'_1 P X$ são semelhantes. Isso significa que (i) $\overline{F_1 P}$ e $\overline{F'_1 P}$ são iguais, (ii) os ângulos $\widehat{F_1 P X}$ e $\widehat{F'_1 P X}$ também são iguais e, conseqüentemente, (iii) $\overline{F_2 P}$ e $\overline{F'_1 P}$ fazem parte da mesma reta (que agora chamaremos de $\overline{F_2 F'_1}$). Tudo isso pode ser visto na figura 14.1.

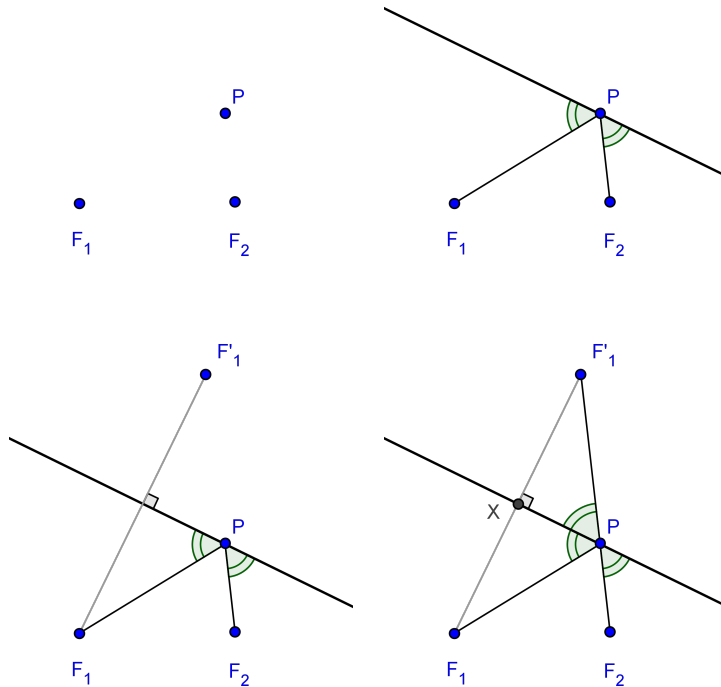
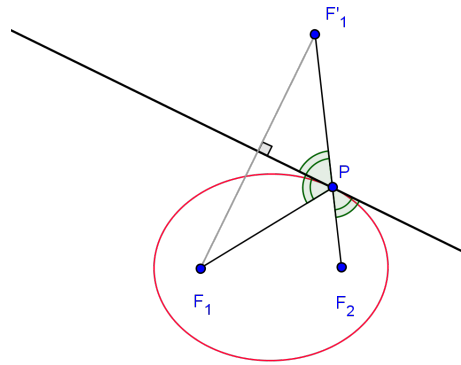


Figura 14.1: construção da reta reflexiva e do anti-foco.

Agora vamos desenhar, pelo método mecânico (definição 1), a elipse com focos F_1 e F_2 , passando por P . Lembre-se que P é um ponto qualquer da elipse, então os mesmos argumentos usados aqui devem valer para quaisquer pontos da curva. Assim, para provarmos que, nesta elipse, vale a definição 2, precisamos apenas mostrar que a reta de reflexão é tangente à curva (ou seja, que a própria curva, naquele ponto, reflete os raios dos focos).

A elipse é composta dos pontos P tais que $|\overline{F_1 P} + \overline{F_2 P}|$ é constante. Mas como $\overline{F_1 P} = \overline{F'_1 P}$, é também composta dos pontos para os quais $|\overline{F'_1 P} + \overline{F_2 P}| = |\overline{F'_1 F_2}|$ é constante (depois discutiremos a interpretação geométrica deste fato). Pois bem, tomemos um ponto $Q \neq P$ na reta de reflexão. Podemos fazer uma construção muito similar para o novo ponto (ver figura 14.2). Como F_2 e F'_1 formam uma reta, sabemos que



$$|\overline{F_1Q} + \overline{F_2Q}| = |\overline{F'_1Q} + \overline{F_2Q}| < |\overline{F'_1P} + \overline{F_2P}|$$

ou seja, a soma das distâncias de Q até os focos é maior que a soma das distâncias até P. É fácil ver (não provaremos) que, toda vez que isso acontece, significa que o ponto em questão (Q) está fora da elipse. Da mesma forma, se um ponto tem a soma das distâncias menor que de P, isso significa que ele está dentro da elipse.

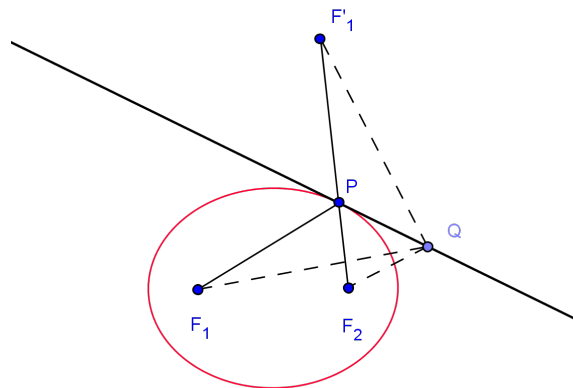


Figura 14.2

Lembre-se: não há nada de especial com Q e o argumento vale para qualquer ponto da reta de reflexão. Assim, acabamos de provar que todos os pontos (menos um) da reta de reflexão estão fora da elipse; apenas em P a reta toca a curva. Em outras palavras, a reta de reflexão é a tangente à curva. *Voilà*. Toda reta de reflexão que passa por uma elipse é tangente à mesma; a elipse da soma de distâncias constante também reflete. Para ficar completo, bastaria provar que toda curva feita com as retas de reflexão também faz a soma das distâncias ser constante; esse passo fica como exercício.

Como último comentário, vamos à interpretação geométrica do fato de que, para uma elipse, $|\overline{F'_1P} + \overline{F_2P}| = |\overline{F'_1F_2}|$ deve ser constante. Para cada ponto P da elipse, a reta de reflexão é diferente, bem como o anti-foco F'_1 . Mas os focos F_1 e F_2 são fixos. Qual o lugar geométrico da figura cuja

distância a um ponto fixo é constante? Um círculo! Assim, conforme desenhemos os pontos P da elipse, os anti-focos correspondentes formam um círculo exterior à elipse.

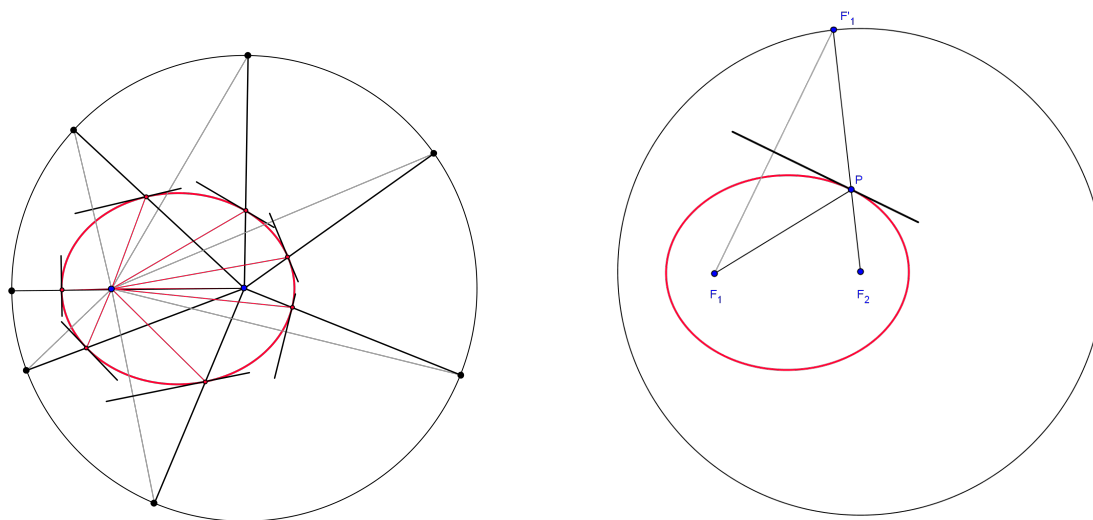


Figura 14.3: Conforme P percorre uma elipse, o anti-foco F_1' percorre um círculo centrado em F_2 .

Podemos escrever isso da seguinte forma: dado um círculo qualquer de centro C, mais um ponto excêntrico F, as retas que ligam cada ponto do círculo a F são perpendiculares às tangentes de uma elipse de focos C e F. Ou, ao contrário, as tangentes de uma elipse de focos C e F são sempre perpendiculares às linhas que ligam F aos pontos de um círculo de centro C. Essa noção será fundamental para a demonstração geométrica, devida a Richard Feynmann, da Primeira Lei de Kepler.

Agora vamos à demonstração de que a definição 3 é equivalente às definições 1 e 2. Para isso, provaremos que a terceira implica na primeira, deixando a contra-implicação como exercício. Neste caso, usaremos outra construção interessante, conhecida como **ESFERAS DE DANDELIN**. Veja a figura a seguir.

Tomemos um plano que intersecta um cone, como mostrado na figura. Inserimos, então, duas esferas, que tangenciem tanto as paredes do cone quanto o plano. Tomemos uma reta diretriz do cone. A esfera menor toca a diretriz em A e o plano em E; a esfera maior toca a diretriz em C e o plano em D. Por fim, a diretriz toca o plano em D.

Repare que as retas que contêm E e B, contida no plano da elipse, tangencia o círculo. Assim como a reta diretriz. Mas ambas se intersectam em B. Um resultado conhecido da geometria diz que, quando duas tangentes de um círculo se cruzam formando um vértice, as distâncias do vértice aos dois pontos de tangência são iguais. Assim, $\overline{AB} = \overline{BE}$. O mesmo argumento, aplicado à maior esfera, mostra que $\overline{BC} = \overline{BD}$.

Agora podemos fazer a diretriz girar em torno do cone. Ao fazermos isso, os pontos A e C descrevem dois círculos paralelos, perpendiculares à altura do cone. O ponto B muda de altura. Assim, girando a diretriz, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ mudam de tamanho, mas $\overline{AC}$ permanece com o mesmo tamanho. Mais especificamente, o ponto B, interseção entre diretriz e plano, desenha uma figura especial no mesmo. Para essa figura, vale a seguinte propriedade:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{BE} + \overline{BD} = \text{constante}$$

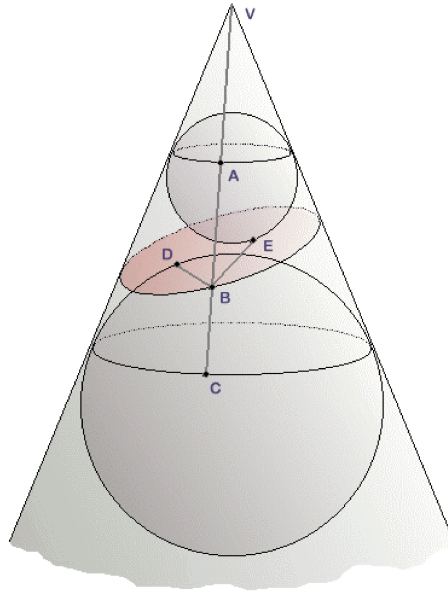


Figura 14.4: Esferas de Dandelin e a construção das figuras cônicas. Fonte: Mathacademy.com

provando que essa figura é a elipse da definição 1, com os focos sendo os pontos de tangência das esferas com o plano.

14.2 Propriedades

Agora vejamos algumas propriedades das elipses que serão especialmente úteis. A primeira que devemos buscar são os eixos de simetria da elipse. É fácil ver, pela definição mecânica, que existem dois eixos de simetria: a reta equidistante dos dois focos e a reta que passa sobre eles. Chamaremos a última de *eixo maior* e a primeira de *eixo menor*. Entretanto, na maior parte das vezes nos referiremos ao *semi-eixo maior* (a), ao *semi-eixo menor* (b) e à *semi-distância focal* (c), da mesma forma que falamos mais sobre o raio do que sobre o diâmetro de um círculo.

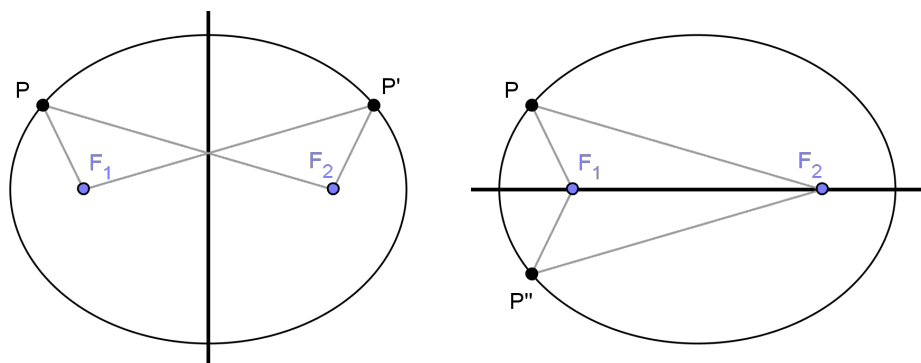
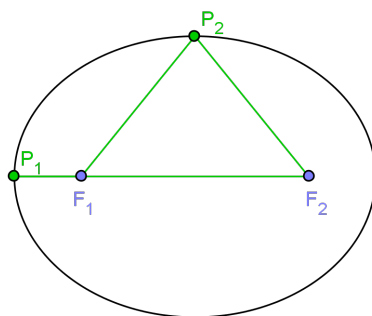


Figura 14.5: Eixos de simetria de uma elipse.

Os tamanhos dos eixos são, é claro, condicionados pela distância constante dos pontos aos focos que define a elipse. Para explicitar esse vínculo, vejamos dois pontos especiais.



Olhando para P_1 vemos que $|\overline{F_1P_1}| + |\overline{F_2P_1}| = (a + c) + (a - c) = 2a$, ou seja, a soma das distâncias tem o tamanho do eixo maior da elipse.

Olhando para P_2 , temos dois triângulos retângulos, de forma que $a^2 = b^2 + c^2$. Com isso, podemos determinar o eixo maior a partir do eixo menor e da distância focal, ou qualquer outra combinação. O importante é que, como temos um vínculo, apenas duas das três grandezas são suficientes para fixar uma elipse.

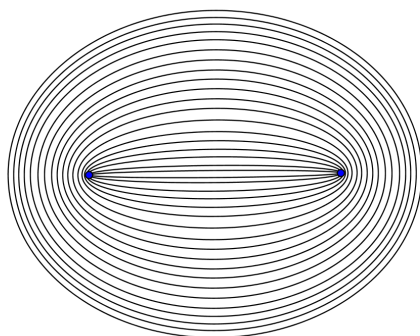


Figura 14.6: A família de elipses geradas a partir de dois focos fixos.

Em vez de usar essas, criaremos outra grandeza mais significativa para a descrição astronômica. Repare que, fixada a distância entre os focos, quanto maior a soma das distâncias aos pontos, mais achatada é a curva (como mostra a figura 14.6). Podemos então definir a *excentricidade* desta maneira: a razão entre a (semi) distância focal e a (semi) distância dos focos aos pontos.

$$e = \frac{c}{a}$$

Podemos ver que essa quantidade varia entre 0 e 1. No caso $e = 0$, os focos estão infinitamente mais próximos entre si do que à curva, de forma que consideramos $c = 0$ e $a^2 = b^2$, o que nos dá um círculo. Crescendo a excentricidade, aumentamos também a diferença entre os eixos maior e menor, até o caso em que $c = a$ e a elipse, infinitamente achatada, degenera-se em uma reta.

Assim, sempre construiremos nossas elipses a partir do seu semi-eixo maior (a) e de sua excentricidade (e). As demais grandezas podem ser obtidas secundariamente, como é o caso do semi-eixo menor:

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = a^2(1 - e^2)$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

14.3 Órbitas Elípticas

Para descrever órbitas com elipses, falta considerar um aspecto: o fato de que o Sol ocupa apenas um dos focos, que é privilegiado. Por isso, muitas vezes é útil quebrar a simetria da curva, definindo distâncias a partir do foco solar. Assim, o ponto da órbita mais próximo ao sol é chamado de PERIÉLIO (*peri* é perto em grego; *helios* é sol), enquanto o ponto mais afastado é chamado de AFÉLIO. Para satélites em torno da Terra, os nomes são PERIGEU e APOGEU (*geo* é terra em grego); para o caso geral, PERIASTRO e APOASTRO.

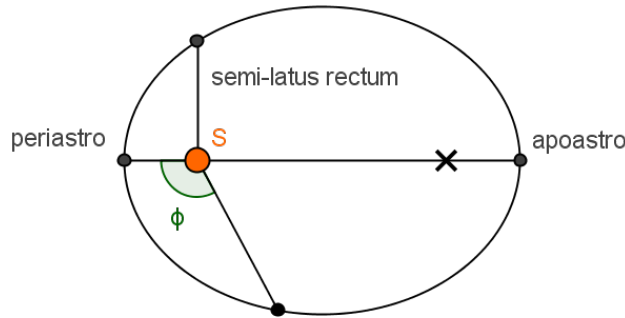


Figura 14.7: Principais posições de um astro em órbita elíptica em torno do astro central S. O segundo foco é marcado por um X.

Pela figura 14.7, é fácil ver que o apoastro e periastro estão sempre opostos na órbita, e que suas distâncias podem ser calculadas em função dos parâmetros da elipse:

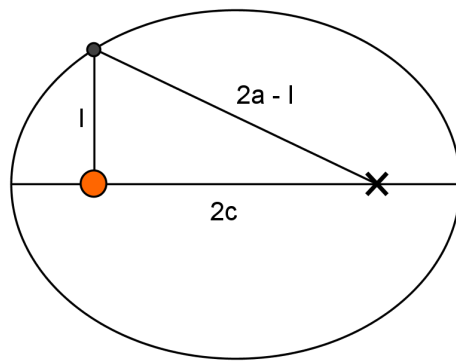
$$r_p = a(1 - e)$$

$$r_a = a(1 + e)$$

de forma que, somando isso à simetria da elipse, temos que o raio médio da órbita é igual a $\frac{r_p + r_a}{2} = a$.

Além disso, podemos medir a posição angular do planeta, com a ANOMALIA VERDADEIRA ϕ . Esse ângulo é contado a partir do periastro e no sentido anti-horário. Assim, o periastro é a posição $\phi = 0$ e o apoastro, $\phi = 180^\circ$.

Um último parâmetro importante tem nome em latim: SEMI-LATUS RECTUM (ℓ), ou o semi lado direito. Conhecido também como a metade do *latus rectum*, ele mede a distância entre o foco solar e o planeta quando o mesmo está em uma posição perpendicular ao eixo maior (isto é, quando $\phi = 90^\circ$ ou 270°). Podemos calculá-lo com a seguinte figura:



$$\begin{aligned}\ell^2 + 4c^2 &= (2a - \ell)^2 = 4a^2 - 4a\ell + \ell^2 \\ \ell &= \frac{a^2 - c^2}{a} \\ \ell &= a(1 - e^2)\end{aligned}$$

Há duas coisas mágicas a respeito do semi-latus rectum. Uma delas é que a fórmula acima vale também para outras cônicas, como parábolas e hipérboles, como veremos mais à frente. Da mesma forma, vale a equação geral das cônicas na forma polar:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

onde φ_0 é o ângulo do pericentro, a é o semi-eixo maior (para o caso de elipses) e e é a excentricidade.

A segunda coisa mágica envolve médias pitagóricas. Enquanto o semi-eixo maior é a média aritmética entre apoastro e periastro ($a = r_p + r_a/2$), o semi-eixo menor é a média geométrica ($b = \sqrt{r_p \cdot r_a}$), o semi-latus rectum é, advinhem: a média harmônica! Isso mesmo, $\frac{1}{\ell} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_p} + \frac{1}{r_a} \right)$.

Capítulo 15

Leis de Kepler

Agora que exploramos algumas propriedades geométricas das elipses, podemos ir ao nosso objetivo: *demonstrar* as três Leis de Kepler a partir dos princípios e leis da física de Newton.

Para isso, precisamos fazer algumas simplificações. Afinal, o Sistema Solar é um sistema muito complicado: oito corpos mais ou menos grandes, de composição química, campo magnético e massas diversas, além de diversos outros corpos pequenos, entre asteróides, objetos transnetunianos e satélites. Trataremos do sistema mais simples possível, vendo o que podemos aprender com ele. Depois de aprendido isso, podemos adicionando, controladamente, pequenas complicações, generalizando e aumentando nosso conhecimento. É assim que funciona quando pesquisadores fazem modelos: em vez de abarcar a realidade completa, fazer um desenho bastante simplificado, que pode ser lentamente complexificado.

Nossa primeira suposição é a de que nenhuma característica dos corpos, além de suas massas e velocidades, é importante para conhecer seus movimentos orbitais. Pode parecer natural fazer essa suposição mas, como já vimos, Kepler, por exemplo, considerava importante levar em conta o magnetismo do Sol (já que era este magnetismo que causaria os movimentos orbitais). Essa não era a opinião de Newton, nem de sua mecânica. Em particular, não levaremos em conta também a forma dos corpos, nem seus movimentos de rotação ou precessão. Tudo o que temos são pontos materiais interagindo por um único tipo de força.

Mesmo nessa situação, contudo, o problema ainda parece complicado: N corpos de massas variadas interagindo ao mesmo tempo. No século XVIII (depois de Newton, mas muito antes de nós), o francês Joseph Louis Lagrange já demonstrou que não dá pra resolver o problema dinâmico dos três corpos sem fazer suposições adicionais!¹ Assim, a próxima simplificação que faremos é desprezar a interação gravitacional *entre* os planetas, considerando apenas a interação individual de cada planeta com o Sol. Esse é o problema de dois corpos, que Newton demonstrou.

Mais do que isso, consideraremos que a massa do Sol é muito maior que a de qualquer outro planeta, de forma que, como boa aproximação, diremos que o Sol está no centro do Sistema Solar e os outros planetas se movem em torno dele². Provaremos três propriedades sobre esses movimentos.

¹Dadas as posições e as velocidades das três partículas em um determinado instante, e conhecidas as forças de interação entre elas, Lagrange provou que é impossível deduzir algebricamente o movimento das três partículas. Tudo o que podemos fazer é versões simplificadas do problema, ou tentar aproximações numéricas, calculadas exaustivamente por computadores.

²Caso não se queira usar esta aproximação, podemos considerar que o centro do sistema solar é ocupado por um centro de massa abstrato, e que, portanto, o torque da força gravitacional se anularia. Para mais detalhes sobre o tratamento de um sistema de dois corpos que se movem livremente, veja a parte de sistemas duplos do Volume 4.

15.1 Lei II

Primeiro, vamos provar a SEGUNDA LEI DE KEPLER, também conhecida como *Lei das Áreas*. Ela não diz nada sobre a forma das órbitas que os planetas devem percorrer; diz apenas com que velocidades as órbitas são percorridas (o famoso “áreas iguais em tempos iguais”). Para fazer algo diferente e mais enriquecedor, repetiremos aqui a demonstração original feita por Newton. Ela é descrita por Richard Feynmann, em uma aula perdida mas publicada recentemente³.

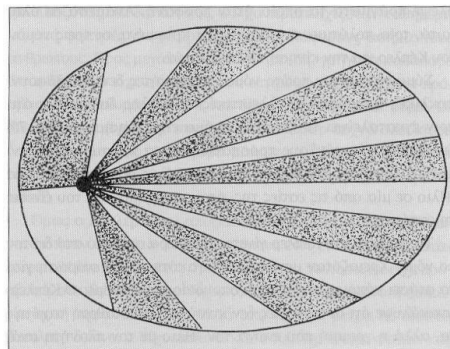


Figura 15.1: Áreas iguais percorridas em tempos iguais, em uma elipse.

A prática matemática da época de Newton era bastante diferente da nossa. Em vez de equações e gráficos, o instrumento padrão era a geometria. Em vez de ficar manipulando símbolos algébricos, precisamos fazer desenhos que clarifiquem as relações que buscamos. Para isso, fica muito mais fácil se discretizarmos os problemas. Em outras palavras: faremos os corpos andarem um passo de cada vez, como uma simulação de computador. Depois, tornamos os passos arbitrariamente pequenos e usamos a ideia matemática de limite para chegar nos movimentos contínuos.

Em nosso diagrama, S representa o Sol e A representa um planeta na sua primeira posição. Depois de um tempo arbitrário padrão, o planeta percorrerá uma certa distância, chegando ao ponto B . Se o Sol não exercesse nenhuma força sobre o planeta, no segundo intervalo de tempo, ele iria percorrer uma reta de mesmo tamanho e direção, chegando ao ponto C' . Mas neste segundo trecho existe um impulso (Δv) que sempre aponta na direção do Sol e se soma à velocidade original do planeta. Lembre-se que não existem curvas nem forças contínuas em nossa representação, apenas passos discretos em que o planeta só faz uma coisa. Assim, a quantidade de movimento original do planeta soma-se ao impulso, pela conhecida *regra do paralelogramo*, levando-o ao ponto C . No terceiro intervalo de tempo, algo análogo deveria ocorrer: o corpo seguiria em linha reta até o ponto D' mas o impulso solar o desvia, levando-o ao ponto D .

Veja que, em cada intervalo da trajetória, o raio que liga o planeta ao Sol forma um triângulo. Tudo o que precisamos é mostrar que, nesses intervalos de tempo iguais, os triângulos percorridos possuem áreas iguais. Dividiremos nossa demonstração em duas partes: primeiro, mostraremos que o triângulo do primeiro instante ($\triangle SAB$) tem mesma área que o triângulo sem impulso do segundo instante ($\triangle SBC'$). Depois, mostraremos que também têm a mesma área os triângulos com e sem impulso ($\triangle SBC'$ e $\triangle SBC$).

³A aula foi originalmente publicada em 1996, pelo casal David e Judith Goldstein, com o título *Feynman's lost lecture: The motion of planets around the Sun*. Para escrever este capítulo, baseamo-nos na tradução francesa: *Le mouvement des planètes autour du Soleil: Le cours perdu de Richard Feynman*, traduzido por Marie-Agnès Treyer e publicado em 2009 pela Editora Cassini, Paris.

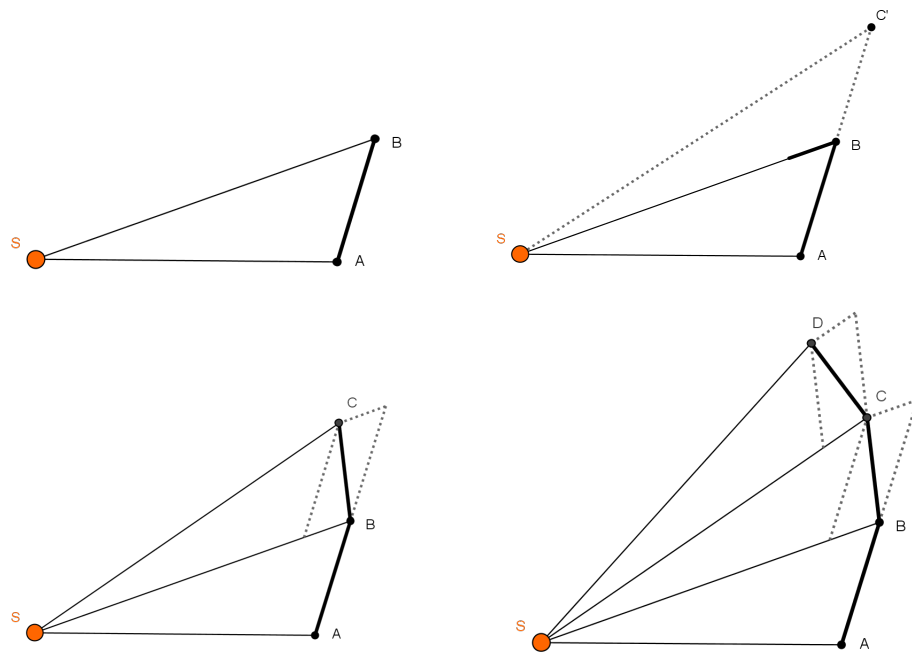
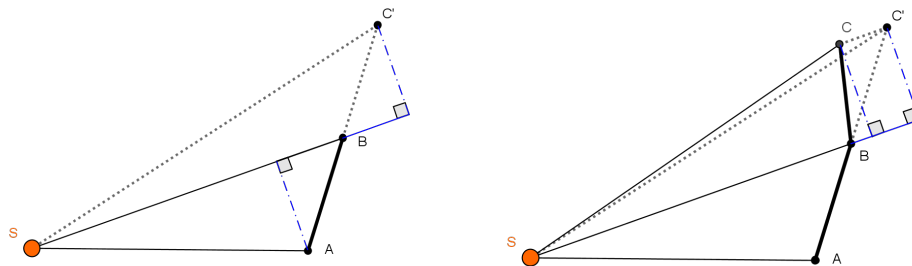


Figura 15.2: construção do percurso gravitacionalmente preso, à maneira geométrica.

Para a primeira parte, basta notar que, como $\overline{AB}$ e $\overline{BC'}$ são iguais, suas projeções perpendiculares a $\overline{SB}$ também são iguais. Assim, temos dois triângulos de mesma base ($\overline{SB}$) e alturas iguais, como mostra a figura.

Para a segunda parte, sabemos que, pela própria construção do paralelogramo, a linha $\overline{C'C}$ é paralela ao segmento $\overline{SB}$ o que significa que ambos os pontos, C e C' , estão a distâncias iguais do segmento. Novamente, são dois triângulos de mesma base e alturas iguais.



Com isso, demonstramos que, em nosso modelo, os planetas percorrem áreas iguais em tempos iguais. Mostramos também que isso vale também para quando não há impulso nenhum. Além disso, podemos pegar intervalos de tempo (e, conseqüentemente, passos) tão pequenos quanto se queira; podemos tomar o limite para o qual obtemos uma curva contínua e o resultado continuará válido. Repare que não usamos nenhuma suposição sobre a forma algébrica da força da gravitação; nossa única suposição foi a de que os impulsos gerados (ou seja, a força) aponta sempre na direção do corpo central. Esse tipo de força recebe um nome especial: FORÇA CENTRAL. Assim, podemos dizer que, para qualquer sistema em que não existam forças ou só existam forças centrais, vale a Segunda Lei de Kepler. Ela certamente merece ser associada, portanto, a um

princípio físico mais geral.

Agora vejamos a transição disso para a descrição algébrica. Para isso, voltaremos às órbitas contínuas, tomando um Δt bem pequeno e calculando a área percorrida (ΔA) em um certo trecho da órbita, pelo raio que liga o planeta à estrela obtemos a figura 15.3.

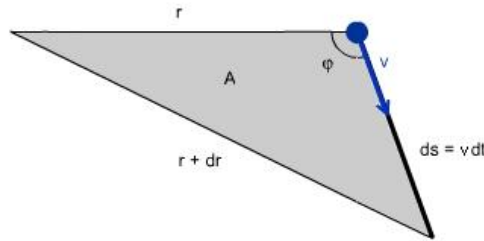


Figura 15.3: Área percorrida pelo raio que liga o planeta à estrela.

Como o intervalo de tempo tomado é pequeno, podemos aproximar a trajetória do corpo andou em linha reta. Esta trajetória forma um triângulo, com um dos lados dado pela distância inicial entre a estrela e o planeta, o segundo lado sendo a distância percorrida neste pequeno intervalo de tempo (sendo aproximada por uma velocidade constante) e o ângulo entre estes dois lados sendo φ . Pela lei dos senos, temos:

$$\Delta A = \frac{v \Delta t r \sin \varphi}{2}$$

Podemos definir a velocidade com que esse raio percorre a área da órbita, ou, pra usar um nome bem antigo mesmo, VELOCIDADE AREOLAR:

$$\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{v r \sin \varphi}{2} = \frac{L}{2m}$$

que tem que ser constante! Perceba que as outras componentes da área são funções de Δt e quando tomarmos o limite de Δt para zero (isto é, derivar) faz com que elas sejam nulas. Assim, como o momento angular da órbita tem que ser constante, a velocidade areolar (σ) também tem que ser, e vice-versa. A segunda lei de Kepler nada mais é, portanto, que um caso particular do princípio de conservação do momento angular.

15.2 Lei I

Sabendo que a força gravitacional é central, sabemos que o momento angular dos corpos se conserva; agora precisamos explorar a forma da força para termos a forma das trajetórias que ela permite. Se nos restringirmos às forças que dependem de uma certa potência da distância ao centro (forças do tipo $F(r) = kr^n$, onde k é uma constante qualquer e n é um número inteiro), conseguimos provar que só algumas dessas potências permitem órbitas fechadas – mais especificamente, só duas⁴:

- $n=1$: $F(r) = kr$

⁴Aqui já podemos tocar em uma das questões cosmológicas de que falamos no início: a melhor razão que temos para a força gravitacional cair com o quadrado da distância é esta: se mudasse com a distância em outra proporção, não existiriam planetas em torno de estrelas em órbitas periódicas, e nós não estaríamos aqui para nos perguntarmos sobre isso. Esse é um exemplo clássico do *Princípio Antrópico*; para mais detalhes, veja o Volume V.

- $n=-2 : F(r) = \frac{k}{r^2}$

A primeira é a forma da força elástica; Newton tentou fazer a força gravitacional dessa forma, mas não combinava com os resultados de Kepler (As órbitas também seriam elipses, porém o Sol ficaria no centro e não em um dos focos). A segunda foi a que ele acabou adotando, que vimos na unidade anterior ser uma forma necessária, a partir da Terceira Lei de Kepler. Claro que Newton não conhecia esse resultado geral para forças centrais com potências da distância. O que ele fez foi outra coisa: saindo da expressão que depende do inverso do quadrado da distância, ele deduziu que todas as trajetórias possíveis, sob essas forças, são curvas cônicas – e a elipse é um caso particular delas (mais à frente falaremos de outros casos). Da mesma forma que a Segunda, a Primeira Lei foi demonstrada de uma forma geométrica, usando um tipo de raciocínio muito estranho a nós. Na demonstração da Primeira Lei, ele usou diversas propriedades de curvas que são totalmente não-familiares para nós; não reproduziremos sua demonstração, mas adotaremos outra, também geométrica.

Para tal, precisamos perceber que dizer “a força cai com o quadrado da distância” equivale a dizer “o corpo recebe impulsos iguais para percorrer ângulos iguais”. Para entendê-lo, tomemos percursos pequenos, que possamos tomar como linhas retas, como na demonstração da Lei II. O tempo de percurso de um trecho da órbita depende da área varrida pelo seu raio. Para ângulos iguais, a razão entre as áreas é igual à razão entre o quadrado das distâncias ao Sol. A força, por outro lado, é proporcional ao inverso do quadrado das distâncias. Assim, como $I = F \cdot \Delta t$, o impulso entre dois trechos é constante.

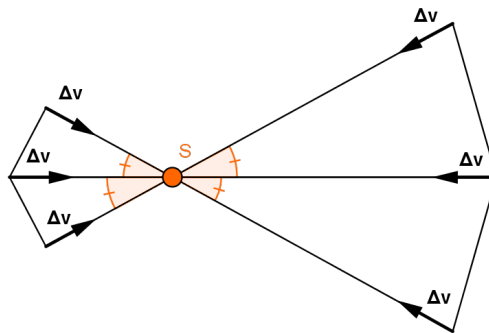


Figura 15.4: Escolhendo a forma da nossa força: ela deve produzir impulsos iguais em ângulos iguais.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{F_1 \cdot \Delta t_1}{F_2 \cdot \Delta t_2} = \frac{R_1^2 \cdot 1/R_1^2}{R_2^2 \cdot 1/R_2^2} = 1$$

Entendida a equivalência entre as duas formulações, sigamos em frente. Se impulsos (Δv 's) iguais são gerados em ângulos iguais, então os vetores-velocidade mudam sempre da mesma maneira, com um mesmo ângulo; isso significa que, mesmo com trajetórias não circulares, as velocidades descrevem uma circunferência no espaço das velocidades! Reveja o argumento utilizado na demonstração da aceleração centrípeta no capítulo 9.

Repare que, quanto mais excêntrico (no sentido literal, *ex centrum*) o círculo, maior a diferença entre a maior e a menor velocidade e maior a variação de distâncias na trajetória (como veremos, mais achatada é a elipse). Nesses dois pontos, periastro e apoastro, as velocidades são perpendiculares às distâncias ao Sol.

Podemos refazer a construção do capítulo 14, construindo uma elipse dentro da circunferência, que tem como focos a origem dos vetores e o centro da circunferência. Na construção, para fazer cada ponto, tomamos a reta perpendicular ao vetor-velocidade; essa reta acaba por ser a

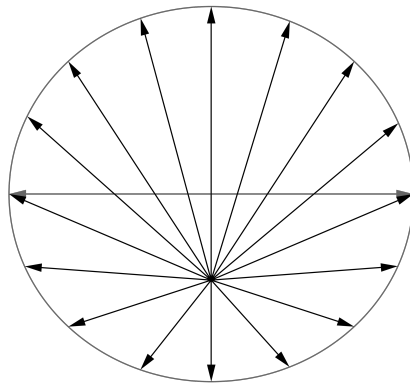


Figura 15.5: Espaço das velocidades de uma órbita qualquer.

tangente da elipse. Assim, para cada velocidade, construímos uma reta que é perpendicular à tangente do movimento real, com as posições também na posição correta (variando nos intervalos de ângulos iguais). Temos de concluir que a curva encontrada é uma miniatura do formato real da órbita. Assim, provamos a Primeira Lei de Kepler: que a trajetória, a menos de uma questão de escala, tem a forma de uma elipse.

112- Usando a segunda lei (ou a conservação do momento angular, o que for mais fácil), calcule também a razão entre a velocidade do planeta no afélio e no periélio, ainda em função de a e e . Faça cálculos numéricos, e compare essa razão para os seguintes corpos:

- (a) Terra ($e = 0,0167$)
- (b) Saturno ($a = 9,54$ UA; $e = 0,056$)
- (c) Mercúrio ($a = 0,39$ UA; $e = 0,206$)
- (d) Plutão ($a = 39,44$ UA; $e = 0,248$)
- (e) Apolo, o asteróide ($a = 1,47$ UA; $e = 0,566$)
- (f) Halley, o cometa ($a = 0,5879$ UA; $e = 0,967$)

15.3 Lei III

Acabamos de mostrar uma relação geral entre a forma da nossa força ($1/r^2$) e a forma elíptica das órbitas. Usando cada uma delas, ou ambas, podemos mostrar agora uma relação existente *entre* as diferentes órbitas. Para o caso circular, já mostramos como essa relação se deduz da força gravitacional; agora mostraremos de uma forma mais geral. Antes, porém, precisamos relacionar melhor algumas grandezas físicas das órbitas com as grandezas geométricas da órbita.

Seja um movimento em torno do centro C , consistindo em um corpo de massa M . Temos um corpo com massa m que, em um instante qualquer, está à distância r do centro e com velocidade v . Podemos calcular duas grandezas físicas importantes desse corpo: sua energia total E e seu momento angular L .

$$E = E_{cin} + E_{pot} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

$$L = mv \times r = mvr \sin \phi = mv_t r$$

Sabemos que são constantes os valores de E , pela conservação de energia, e de L , pela Segunda Lei. Assim, temos três grandezas físicas que variam ao longo da órbita (r , v e v_t , a componente da velocidade que é perpendicular a r) e duas equações que as relacionam. Para ficar mais claro, podemos separar também a energia cinética na parte devida à velocidade radial v_r (de aproximação ou afastamento do corpo central) e na parte devida à velocidade tangencial v_t . Com isso, podemos eliminar a última variável, reduzindo-nos a um problema de uma dimensão (r e v na direção de r):

$$E = \frac{m}{2}(v_r^2 + v_t^2) - \frac{GMm}{r}$$

$$= \frac{mv_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Agora temos duas variáveis e uma equação. Não há jeito senão desprezar uma delas. Desprezemos v_r , calculando a posição do planeta para todos os pontos da órbita em que a velocidade radial é zero, ou seja, os pontos em que o planeta não está se afastando nem se aproximando. Para esses pontos, a equação fica:

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Multiplicando ambos os termos por r^2 , chegamos a uma equação de segundo grau.

$$Er^2 + GMm r - \frac{L^2}{2m} = 0$$

Essa equação admite duas soluções, o que quer dizer que existem dois pontos na órbita em que a velocidade do corpo é perpendicular à linha que o liga ao centro. Esses dois pontos são fáceis de se interpretar geometricamente: são as “pontas” da órbita, os lugares de maior e menor aproximação, o *apoastro* e o *periastro*.

Para calcular as posições desses dois pontos, recorreremos ao método clássico para equações de segundo grau: A fórmula de BBBBBBBB Que dá como resultado:

$$r = \frac{-GMm \pm \sqrt{(GMm)^2 + \frac{2EL^2}{m}}}{2E}$$

Com isso, temos determinadas as posições extremas da órbita a partir de suas grandezas físicas invariáveis, E e L . Por outro lado, sabemos também que, geometricamente falando, uma elipse é totalmente determinada pelo seu semi-eixo maior (a) e pela sua excentricidade (e). Além disso, sabemos como escrever as posições dos pontos extremos: $r_{per} = a(1 - e)$ para o periastro, $r_{apo} = a(1 + e)$ para o apoastro.

Assim, podemos tentar arranjar a solução acima para ficar parecida com suas descrições geométricas:

$$\begin{aligned}
r &= \frac{1}{2E} \left(-GMm \pm \sqrt{(GMm)^2 + \frac{2EL^2}{m}} \right) \\
&= \frac{-GMm}{2E} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} \right) \\
&= \frac{-GMm}{2E} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{L^2}{GMm^2} \cdot \frac{2E}{GMm}} \right)
\end{aligned}$$

E com isso, descobrimos que

$$a = -\frac{GMm}{2E} \quad \text{e} \quad e = \sqrt{1 - \frac{L^2}{GMm^2a}}$$

Conseguimos escrever os parâmetros geométricos da órbita em função dos seus parâmetros físicos. Há pelo menos três consequências interessantes disso.

1. *Energia da órbita.* Mudando ligeiramente o primeiro termo acima, encontramos

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

O que é um resultado não intuitivo: a energia de uma órbita depende somente do semi-eixo maior, não da excentricidade! Assim, um asteróide que tenha periélio em 0,3 UA e afélio em 1,7 UA tem a mesma energia orbital que a Terra. Além disso, como todos os termos da equação são positivos, temos que $E < 0$, a energia total de uma órbita elíptica é sempre negativa. Veremos algumas consequências disso quando discutirmos sobre as órbitas abertas.

2. *Velocidade da órbita.* Podemos comparar a fórmula do item 1 com os termos individuais da energia:

$$\begin{aligned}
E &= -\frac{GMm}{2a} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \\
v &= \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}
\end{aligned}$$

E com isso temos uma equação geral para a velocidade do corpo em cada ponto de seu movimento orbital – encontrando as variáveis que descartamos e fechando o ciclo. É fácil ver que, no caso da órbita circular, $r = a$ em todos os pontos, reduzindo a equação ao conhecido caso $v = \sqrt{\frac{GMm}{r}}$

3. *Terceira Lei de Kepler.* Finalmente, podemos construir uma equação que nos permita comparar órbitas diferentes em torno de um mesmo astro. Sabemos da Lei II que a velocidade areolar σ é constante. Aplicando-a para a órbita inteira, temos

$$A_{\text{ellipse}} = \sigma T$$

Como $A_{\text{ellipse}} = \pi ab$ e $b = a\sqrt{1 - e^2}$, e escrevendo as expressões físicas, ficamos com

$$\begin{aligned}\pi a^2 \sqrt{1-e^2} &= \sigma T \\ \pi a^2 \sqrt{1 - \left(1 - \frac{L^2}{GMm^2a}\right)} &= \frac{L}{2m} T \\ 2\pi \frac{a^2}{\sqrt{GMa}} &= T\end{aligned}$$

Elevando os dois lados ao quadrado, ficamos com:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

, reencontrando a proporção harmônica de Kepler, mas agora também expressa como conteúdo físico. Em particular, descobrimos que a constante de proporcionalidade depende da massa do corpo central. Podemos comparar os períodos e semi-eixos maiores dos planetas do Sistema Solar, das luas galileanas ou dos satélites terrestres; mas se quisermos fazer comparações entre esses grupos, precisamos levar em conta as massas do Sol, de Júpiter e da Terra.

- 113- Nereida, um satélite importante de Netuno, tem um período de revolução de quase 365 dias, como a Terra (360,2 dias, na verdade). De acordo com a terceira lei de Kepler, portanto, o tamanho de sua órbita deveria ser bem próximo ao da Terra; mas sabemos que isso é um absurdo. Por que as duas órbitas não têm o mesmo tamanho? Qual é, então, o verdadeiro tamanho da órbita de Nereida?
- 114- Como deveria se modificar, de maneira instantânea, a massa da Terra para que a Lua, permanecendo a mesma distância, desse uma volta em torno da Terra em apenas dois dias?
- 115- Sabemos agora como se calcula a constante da Terceira Lei – tendo como base a massa do astro central. Calculando os dados para o Sistema Solar daquela forma, obtemos um K de $2,974 \cdot 10^{-19}$ para a órbita terrestre, mas de $2,971 \cdot 10^{-19}$ para a órbita de Júpiter! Por que isso acontece?
- 116- Calcule a velocidade de um corpo no seu afélio e no seu periélio, em função de a e e . Encontre também as expressões-limite $e = 0$ e $e = 1$.
- 117- Calcule a distância da Terra ao Sol em seu periélio – será dia 4 de janeiro! Feliz periélio! – e em seu afélio. Faça o mesmo para alguns outros astros.
- 118- Se a excentricidade não está relacionada com a energia orbital, porque só temos corpos celestes muito excêntricos com grandes energias orbitais (isto é, semi-eixos maiores)? O que isso diz sobre a distribuição de corpos no Sistema Solar?
- 119- Em que pontos de uma órbita elíptica a velocidade radial é máxima (em módulo)?

Claro, é uma grande inocência dizer que as elipses de Kepler dão *exatamente* os movimentos dos planetas. Os dados observacionais de Tycho, embora parecessem mais precisos que todos os anteriores disponíveis, sua concordância com o modelo de Kepler obviamente não era perfeita, seja porque não existem experimentos sem erros, seja porque o movimento dos planetas não é exatamente elíptico, só *pode ser aproximado* por elipses. A Terra, por exemplo, não só translada em torno do Sol como tem dois eixos de rotação (rotação propriamente dita e precessão), tem uma variação de curto período na inclinação do seu eixo e outras tantas de longo período; sua órbita também revoluciona em torno do Sol (precessão dos equinócios), a inclinação dessa órbita

sofre pequenas variações... Tudo isso graças às interações com todos os outros corpos do Sistema Solar, na maior parte das vezes caóticas. Os estudos de Mecânica Celeste, embora partam de uma aproximação e de um resultado simples, podem levar a problemas incrivelmente complexos.

Capítulo 16

Movimentos Orbitais

Neste capítulo vamos finalmente tratar do problema fundamental desta unidade: dada a configuração de um corpo (posição e velocidade) e um campo gravitacional gerado por um corpo central, como desenhar a trajetória desse corpo? Para isso, precisaremos de alguma atenção às proporções dos desenhos mas, mais importante que isso, precisaremos desenvolver uma nova intuição sobre movimentos orbitais, que é diferente da intuição sobre movimentos terrestres. Veremos isso analisando alguns casos particulares e interessantes.

Antes disso, porém, vamos relembrar alguns resultados obtidos até agora, na forma de regras para o desenho de órbitas:

- (a) Órbitas tem que ser fechadas em posição e em velocidade. Isso significa que, depois de um período orbital, o objeto volta para a mesma posição, com a velocidade apontando no mesmo sentido e com a mesma intensidade.
- (b) Todos os movimentos gravitacionais são curvas cônicas (hipérboles, parábolas e, na maioria dos casos que interessam, elipses), com o corpo central (a Terra, o Sol, etc.) ocupando um dos focos. Isso exclui, salvo casos excepcionais, qualquer movimento em linha reta.
- (c) Um dos pontos da elipse é o mais próximo do corpo central e é chamado de *periastro*; sendo assim, o ponto mais distante é necessariamente o ponto diametralmente oposto da órbita, chamado de *apoastro*.
- (d) O periastro e apoastro são os pontos em que as velocidades são, respectivamente, a maior e a menor. Ambas as velocidades são as únicas da órbita que são perpendiculares ao raio que liga o ponto ao corpo central.

Pode parecer bobo relembrar essas regras, mas elas evitariam todos os desenhos a seguir, retirados de provas de seletivas antigas. A questão falava de uma nave tripulada em órbita circular que, por uma questão de vida ou morte, precisava atingir um objeto que estava na mesma órbita mas 40 graus à frente. Alguns dos desenhos foram os seguintes.

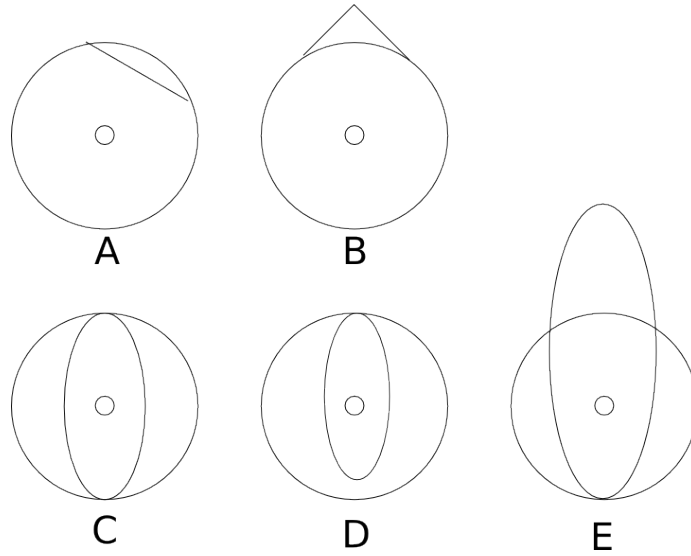


Figura 16.1: Alguns exemplos de movimentos gravitacionais que não fazem sentido.

As figuras A e B não são curvas cônicas e ignoram que movimentos gravitacionais não são movimentos livres. C e D não são válidos porque a Terra não está em um dos focos: em C é fácil ver isso porque a Terra está no centro da órbita; em D, os pontos “laterais” estão mais próximos da Terra do que o ponto inferior, que deveria ser o periastro (já que o ponto superior, de tangência ao círculo, é o apoastro). Em E o problema é similar: se o apoastro está oposto ao ponto de tangência, este deveria ser o periastro; se assim é, então os demais pontos da órbita devem estar mais distantes do centro de gravidade que o ponto de tangência. Em outras palavras, se a órbita tangencia (e não cruza) o círculo, ela deve ser totalmente interna ou totalmente externa ao mesmo.

Uma propriedade matemática importante das órbitas: se duas órbitas se cruzam em três ou mais pontos, elas são idênticas. Se duas órbitas se tocam em dois pontos e são tangentes em um desses pontos, elas também são idênticas. Assim, órbitas diferentes só podem se tangenciar em um ponto ou se encontrarem, cruzando, em dois. Todos os desenhos da figura 16.1 violam essa regra.

Vamos aos nossos problemas que tudo ficará mais claro.

16.1 Mudanças de órbita, vários ângulos

Seja uma nave em uma órbita circular (de raio r_0 , digamos) em torno de uma estrela de massa M . O sistema de foguete da nave funciona em pequenos disparos (bursts), que alteram instantaneamente sua velocidade na direção do disparo, por uma quantidade Δv (chamada impulso específico). A direção do disparo é especificada pelo ângulo θ entre a velocidade v da nave e a direção na qual aponta sua cauda. A regra principal para manuseio da nave é: gastar o mínimo possível de combustível em cada manobra. Isso que significa que, em uma sequência de n disparos, é desejável minimizar:

$$\Delta v = \sum_{i=1}^N \|\Delta \vec{v}_i\| \quad (16.1)$$

A primeira pergunta importante é: que tipos de órbita podemos encontrar para cada ângulo θ de disparo?

Para $\theta = 0^\circ$ (disparo no sentido da velocidade da nave), a resposta é fácil: uma órbita elíptica, cujo periastro seria o ponto do disparo. Isso porque o disparo faz simplesmente a velocidade aumentar e, estando com uma velocidade mais alta que a de órbita circular, a nave tende a fazer uma trajetória mais aberta, afastando-se da estrela (enquanto continua sua revolução em torno desta). Por outro lado, o afastamento diminui a velocidade: a gravidade vai freando a velocidade radial de afastamento do corpo, até fazê-la ser zero. Depois disso, a gravidade atua aumentando a velocidade radial para dentro, fechando a órbita e aproximando a nave, no processo inverso do anterior, até retornar ao ponto de partida. Pela simetria das situações, as duas partes da trajetória devem ser iguais e, portanto, o ponto de maior afastamento deve ser oposto ao ponto de partida, como já foi listado nas regras. Isso é sumarizado na figura 16.2.

Além disso, é fácil perceber que, quanto maior o impulso específico, maior será o afastamento inicial, mais longe vai estar o apoastro, mais excêntrica será a órbita. O caso extremo é quando a velocidade é suficiente para empurrar o apoastro para o infinito, gerando uma órbita parabólica. Veremos à frente este caso com mais detalhes.

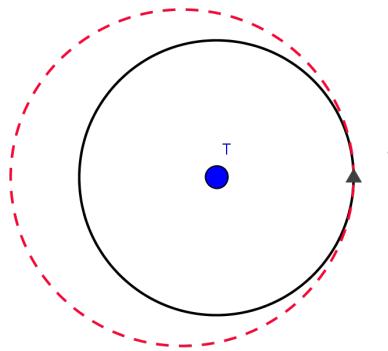


Figura 16.2: Efeito de um burst na direção do movimento.

O caso da velocidade no sentido oposto ao da velocidade orbital ($\theta = 180^\circ$) é bastante análogo: o resultado é também uma órbita elíptica, mas com apoastro, em vez do periastro, como o ponto do burst (vide figura 16.3). Com velocidade menor que a velocidade de órbita circular àquela altura, a nave tende a percorrer uma órbita mais fechada e mais baixa, enquanto sua velocidade aumenta; até que ela chega ao ponto oposto, quando a velocidade radial é zero, e volta a se afastar graças à sua alta velocidade, fechando o ciclo.

Da mesma forma que no caso anterior, quanto maior o impulso, mais baixo será o periastro e mais excêntrica a órbita. O caso extremo é quando o impulso anula a velocidade orbital, levando a uma queda livre na direção da estrela (caso extremo em que a elipse é infinitamente esticada). O impulso poderia ainda ser maior que a velocidade orbital, invertendo o sentido de revolução da nave, mas essa seria de todas as estratégias mais estúpida em termos de gasto de combustível.

O caso $\theta = 90^\circ$ (impulso contra a estrela) é mais interessante. Neste caso, a velocidade do impulso vai se compor com a velocidade orbital, gerando uma velocidade final “inclinada”, apontando para dentro da órbita circular. Entretanto, a intensidade dessa nova velocidade será obviamente maior que a velocidade na órbita circular; isso significa que sua energia orbital será maior e que, conseqüentemente, o semi-eixo maior da sua órbita também será maior. Assim, apesar do impulso “para dentro”, a órbita aumentará como na figura 16.4.

No início do movimento, a nave seguirá então em direção ao periastro da órbita, atingindo-o

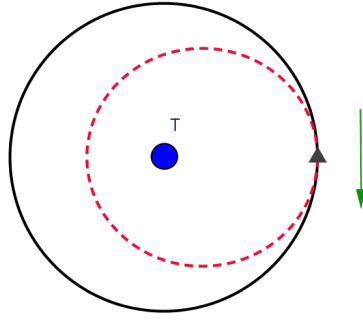


Figura 16.3: Efeito de um burst na direção contrária a do movimento.

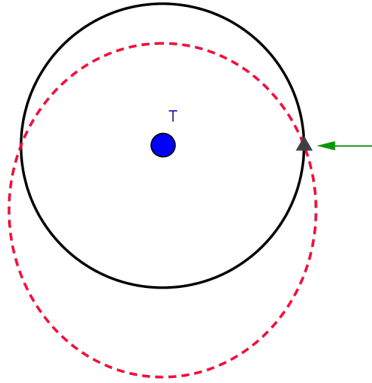


Figura 16.4: Efeito de um burst perpendicular ao movimento, na direção do astro central.

a 90° do ponto de partida (independente da intensidade do impulso), seguindo depois para o apoastro. Para mostrar que a órbita tem mesmo essa disposição, basta mostrar que a posição do burst é a posição do semi-latus rectum ¹ da órbita.

Para uma órbita genérica, por conservação do momento angular, temos $v_{apo}a(1+e) = v_{t\ell}\ell$, onde $v_{t\ell}$ é a velocidade tangencial à órbita na altura do semi-latus rectum e ℓ é o semi-latus rectum, $\ell = a(1-e^2)$. Substituindo a equação para velocidade no apoastro:

$$a(1+e)\sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}} = v_{t\ell}a(1-e^2) = v_{t\ell}a(1-e)(1+e)$$

$$v_{t\ell} = \sqrt{\frac{GM}{a(1+e)(1-e)}} = \sqrt{\frac{GM}{\ell}}$$

ou seja, a velocidade tangencial no semi-latus rectum corresponde à velocidade de órbita circular naquela distância do corpo central! Como é o que acontece no nosso caso (o aumento de velocidade do disparo é todo radial), então o local do disparo é o local do semi-latus rectum, fazendo o semi-eixo maior ser perpendicular ao raio-vetor deste ponto, c.q.d.

¹Ver página 14.3

Se estivéssemos em uma situação em que o diâmetro do corpo central não é desprezível (como um satélite orbitando a Terra), esse seria um modo interessante e econômico de fazer o satélite colidir com o corpo central.

O caso $\theta = 270^\circ$ (impulso “para fora” - figura 16.5) é análogo: dado um mesmo impulso, a velocidade nova teria a mesma intensidade e direção, mas sentido oposto, da adquirida com $\theta = 90^\circ$. Assim, o semi-eixo e a excentricidade da órbita serão as mesmas, só que ela será rotacionada em 180° , com a nave passando, a partir do burst, primeiro pelo apoastro e depois pelo periastro. Isso é curioso: o impulso “pra dentro” e o “pra fora” geram órbitas equivalentes.

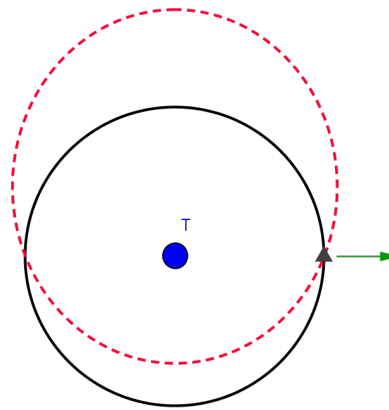


Figura 16.5: Efeito de um burst perpendicular ao movimento, na direção oposta ao astro central.

16.2 Mudança de planos

Podemos estender nossa análise para impulsos apontando para fora do plano da figura – “para cima” ou “para baixo”. Parece difícil de visualizar mas, na verdade, é bastante simples. Para começar, tomemos um impulso exatamente para cima. Neste caso, a velocidade resultante estará na diagonal entre as duas direções, obedecendo à regra do paralelogramo. Essa diagonal define um novo plano para a órbita. Neste novo plano, a velocidade continua perpendicular ao raio-vetor, então o ponto do burst é um periastro ou apoastro. A escolha de qual dos dois depende se o módulo da velocidade resultante é maior ou menor que a velocidade circular naquele ponto.

Como um caso mais simples, tomemos um impulso $\Delta v = v$, com o mesmo tamanho da velocidade original. Chamaremos de ϕ o ângulo entre o impulso e a velocidade, mas agora no plano ortogonal ao raio-vetor. Com $\phi = 90^\circ$, a velocidade resultante será a diagonal de um quadrado, $v\sqrt{2}$ – definindo um plano com 45° de inclinação em relação ao original. Mas como sabemos, se v é a primeira velocidade cósmica (circular) naquele ponto, $v\sqrt{2}$ é a segunda velocidade cósmica (de escape). Assim, neste novo plano, a órbita será parabólica.

Para ângulos mais abertos que 90° , a velocidade resultante é menor que a velocidade de escape, mas maior que a velocidade original – formando órbitas elípticas com o ponto de partida sendo o periastro. Até que, para $\phi = 120^\circ$, a resultante é igual às duas componentes, ou seja, vale exatamente v ! O resultado é uma órbita circular em um plano rotacionado em 60° em relação ao original. Para ângulos de burst maiores, a velocidade é ainda menor, fazendo órbitas elípticas com o ponto de partida funcionando como apoastro.

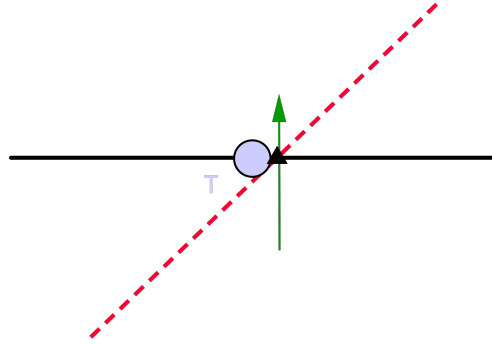


Figura 16.6: Efeito de um burst perpendicular ao plano da órbita

16.3 Transferência de Hohmann

Terminada essa análise, recuperemos um problema prático: como passar a nave de uma órbita circular r_0 para outra órbita circular r_1 ? Por exemplo, como ser lançado da Terra, sair da órbita terrestre em torno do Sol, entrar na órbita marciana e pousar em Marte? Uma estratégia simples e muito usada foi a proposta pelo alemão Walter Hohmann em 1925: colocar a nave em uma órbita elíptica, cujo periastro esteja na órbita inferior e cujo apoastro esteja na órbita superior, fazendo os ajustes orbitais nestes dois pontos. Esse tipo de órbita elíptica é chamada ÓRBITA DE TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN. Nesse caso, o primeiro disparo é claramente menos energético que o tratado no primeiro problema: a velocidade para entrar numa órbita elíptica é necessariamente menor que a velocidade para órbita parabólica. A nave então chega à órbita externa com velocidade menor que a velocidade de órbita circular (se fosse maior, sua distância à estrela ainda aumentaria, e aquele ponto não seria o apoastro), precisando ser então mais um pouco acelerada para entrar naquela órbita, como pode ser visto na figura 16.7.

Sendo v_0 e v_1 as velocidades de órbita circular em r_0 e r_1 , temos que as velocidades do periastro e do apoastro da órbita de Hohmann seriam

$$\begin{aligned} v_{peri} &= \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{GM \frac{1+e}{r_0}} = v_0 \sqrt{1+e} \\ v_{apo} &= \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{GM \frac{1-e}{r_1}} = v_1 \sqrt{1-e} \end{aligned} \quad (16.2)$$

Portanto, os impulsos específicos seriam

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= v_{peri} - v_0 = v_0(\sqrt{1+e} - 1) \\ \Delta v_2 &= v_1 - v_{apo} = v_1(1 - \sqrt{1-e}) \end{aligned} \quad (16.3)$$

Vejamos um exemplo. A sonda *Mariner 9*, da NASA, foi enviada a Marte usando esse tipo de órbita. Neste caso, sendo 1 e 1,5 UA os raios orbitais para Terra e Marte, respectivamente, os elementos orbitais da órbita da sonda eram

$$a = \frac{r_1 + r_0}{2} = 1,25 \text{ UA} \quad e = \frac{a - r_0}{a} = 0,2$$

Supondo que o motor da *Mariner* funcione desse mesmo jeito esquemático do motor da nossa nave, os impulsos seriam $\Delta v_1 = v_0(\sqrt{1+e} - 1) \approx 0,1v_0$ e $\Delta v_2 = v_1(1 - \sqrt{1-e}) \approx 0,1v_1$,

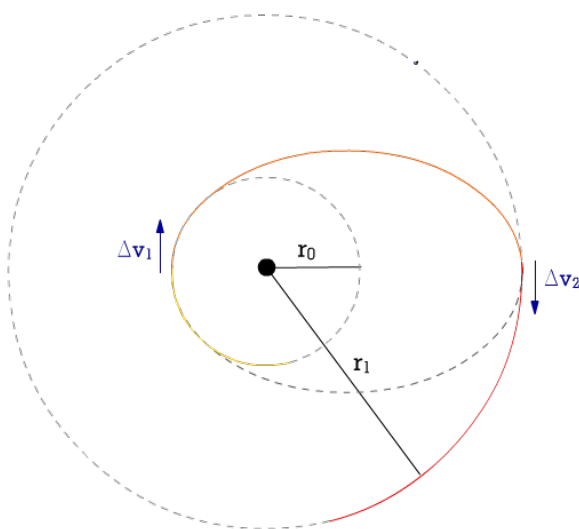


Figura 16.7: A trajetória de uma nave em sua órbita original (amarela), transferindo-se via órbita de Hohmann (laranja) e passando enfim à sua nova órbita mais externa (vermelha).

isto é, 10% de cada uma das velocidades orbitais. As velocidades orbitais da Terra e Marte são, respectivamente, 29,8 e 24,1 km/s; o impulso específico total seria então $2,98 + 2,41 = 5,4$ km/s.

Além disso, o tempo gasto para transferências desse tipo é razoável; para a citada Mariner 9, o período orbital era $T = \sqrt{(1,25)^3}$ ano, ou seja, o tempo de viagem para Marte, meio período, foi de cerca de 0,7 ano. Colocar satélites geoestacionários em órbita usando uma órbita de Hohmann leva cerca de 5 horas; para a Lua, por volta de 5 dias. Para astros mais distantes, entretanto, esse tempo fica muito alto e, para isso, costuma-se usar o estilingue gravitacional.

16.4 Achatamento e Atmosfera

Por fim, mencionemos dois efeitos adicionais interessantes que afetam satélites que orbitam a Terra:

Um deles se deve ao fato de que o diâmetro da Terra não é desprezível para esses satélites, e portanto coisas como o achatamento polar do globo terrestre geram efeitos orbitais interessantes. Para satélites com órbita equatorial, considerando o achatamento simétrico (igual nos dois pólos), não há nenhum efeito; mas suponhamos uma órbita cujo plano tem inclinação i com relação ao plano do Equador. Como há mais massa na região do equador, a atração gravitacional não está no plano da órbita - ou, se preferir, ela possui uma componente perpendicular a esse plano. O efeito é pequeno, de qualquer modo, e além disso, depois de um ciclo completo, pela simetria do achatamento, as diferenças de força se compensam. Mas elas geram um torque que se acumula. O torque é gerado perpendicularmente ao momento angular orbital $\vec{L}$, que por sua vez é perpendicular ao plano orbital. Isso faz o momento angular total precessionar em torno do eixo da Terra - ou seja, o plano orbital precessionar, completando uma volta em um período bem longo.

Um outro fenômeno importante é a presença de atmosfera, que, mesmo sendo rarefeita, gera um freamento que, depois de muito tempo, muda drasticamente a órbita. Como a pressão da atmosfera terrestre diminui muito rápido com a altitude, podemos supor que o freamento está todo concentrado na região do perigeu da órbita. Isso significa que, a cada passagem pelo perigeu, sua velocidade diminui drasticamente, diminuindo a altura máxima que o satélite consegue

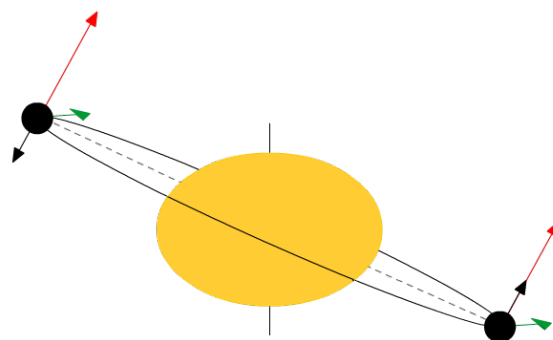


Figura 16.8: Órbita inclinada em torno de um corpo achatado, com um satélite representado nos pontos mais ao norte e ao sul da órbita. Repare que as componentes perpendiculares da atração do planeta (em preto) são iguais e opostas, nos dois extremos; mas ambas geram um torque (verde) que tem o mesmo efeito: inclinar o momento angular original (vermelho) para dentro do papel. Lembre-se que o momento angular é sempre perpendicular ao plano orbital, e, portanto, essa variação na inclinação dele faz mudar também a inclinação da órbita - precessionando em torno do eixo da Terra.

alcançar naquele ciclo - ou seja, aproximando o apogeu da Terra. Isso significa que o freamento atmosférico vai “arredondando” a órbita! A situação limite ocorre quando o satélite passa a ter órbita circular com raio igual ao do perigeu da órbita original. Nesta situação, o freamento é uniforme em todas as partes da órbita, fazendo com que o satélite desça para órbitas circulares cada vez menores, espiralando até a colisão com o planeta.

16.5 Classes de Satélites

Os satélites em órbita da Terra são usualmente classificados nos seguintes grupos:

- *Órbitas Baixas (LEO - Low Earth Orbits)*. Órbitas entre cerca de 160 e 2000 km de altitude. Nesta faixa, as órbitas sofrem arrastos atmosféricos consideráveis da termosfera (80 - 500 km) e da exosfera (acima de 500 km)². Para órbitas mais baixas que 300 km, o arrasto torna as órbitas impraticáveis.

Com exceção da missão Apolo à Lua e dos voos suborbitais, todos os voos humanos têm sido em órbitas baixas - incluindo todas as missões de ônibus e estações espaciais! O recorde nesse sentido foi o do Gemini 11, que atingiu apogeu de 1374,1 km.

A ISS vive em uma órbita estável na parte superior da termosfera, variando entre 320 e 347 km. Satélites de comunicação também ficam quase todos em LEO (exceto os geoestacionários, que são muito muito mais altos), com períodos orbitais típicos de 90 minutos.

- *Órbitas Médias (MEO - Middle Earth Orbits)*. Órbitas mais altas que os 2000 km e mais baixas que as órbitas estacionárias (35.786 km). Nestas alturas, arrastos são desprezíveis, mas as

²*Termosfera* é a camada da atmosfera onde o gradiente de temperatura muda: a temperatura passa a então crescer com a altura (a radiação terrestre se torna desprezível, e camadas mais altas estão mais expostas à radiação solar). É a camada que contém a zona de ionização que permite transmissão de ondas de rádio (a ionosfera); é também onde acontecem as auroras. Sua dinâmica é a das marés atmosféricas, geradas pela dinâmica dia/ noite de radiação solar (marés causadas térmica e não gravitacionalmente).

A *Exosfera* é definida como a camada a partir da qual as colisões entre átomos e moléculas atmosféricas passa a ser desprezível, e o seu movimento passa a ser descrito de forma essencialmente balística. Essa é a camada “de saída” da atmosfera, a partir da qual os átomos escapam gravitacionalmente.

perturbações eletromagnéticas são muito fortes (é a zona onde se situam os cinturões de Van Allen, sustentados pelo campo magnético terrestre).

Os satélites de navegação e posicionamento ficam todas nessa altura: os GPS da NASA, (20.200 km), os GLONASS da Agência Russa (19.100 km) e os Galileo da ESA (23.222 km) (que estarão operacionais em 2013). Satélites em MEO têm períodos variando entre 2 e 24 horas; os satélites de posicionamento são todos aproximadamente semi-geoestacionários (período de meio dia sideral), veja figura 16.9.

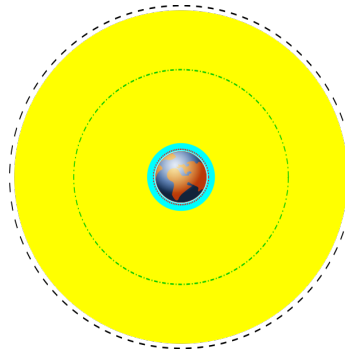


Figura 16.9: A zona azul/ciano é a dos LEO; a amarela, a dos MEO. O pontilhado preto são os geoestacionários. O pontilhado verde são os semigeoestacionários, os de localização global. Fonte: Wikipédia.

- *Órbitas Geoestacionárias (GEO)*. São, bem, geoestacionário. Isso significa que têm o mesmo período do dia sideral terrestre e, portanto, permanecem sempre acima da mesma longitude na Terra. É a situação ideal para satélites de comunicação, mas colocá-los lá é bem mais caro que colocar um LEO, e além disso os amplificadores de sinal precisam ser muito mais potentes (= mais caros) para os geoestacionários. Por isso, muitos desses satélites continuam sendo lançados em LEO.
- *Órbitas Altas (HEO - High Earth Orbits)*: Satélites cujo apogeu está acima da faixa dos geoestacionários. Essas órbitas em geral são bastante excêntricas, e são órbitas usadas para cobertura de altas latitudes, coisa que os geoestacionários, equatoriais, não fazem (por isso boa parte dos HEO são russos).

Um exemplo são as órbitas Tundra (alta excentricidade, inclinação de $63,4^\circ$ e período de 24 horas). Apesar da órbita ser uma invenção russa, o único conjunto de satélites que opera nesse tipo de órbita hoje é a empresa americana *Sirius Satellite Radio*, que consiste em três satélites, que se alternam entre dois estando a maior parte do tempo sobre a América do Norte e um terceiro passando rapidamente pelo hemisfério sul, onde fica o periélio da órbita (e, portanto, onde os satélites passam menos tempo), veja a figura 16.10.

Um outro uso de HEO são as *órbitas cemitério* ou *órbitas lixo*, pra onde são jogados satélites e naves no fim de sua vida operacional. Lançar satélites para órbitas altas, como vimos, é frequentemente bem mais barato que tirá-los de órbita. As velocidades orbitais dos geoestacionários, por exemplo, são de cerca de 3 km/s; tirá-los de órbita para mandar de volta para a Terra exigiria um Δv de no mínimo 1,5 km/s (1500 m/s). Lançar um desses em uma órbita lixo, entretanto, exige apenas um Δv de 11 m/s!

Estudos recentes, contudo, mostram que as órbitas desses satélites descartados têm encolhido, graças a colisões com micrometeoritos. Em breve, eles começarão a oferecer riscos de colisão para os satélites ativos.

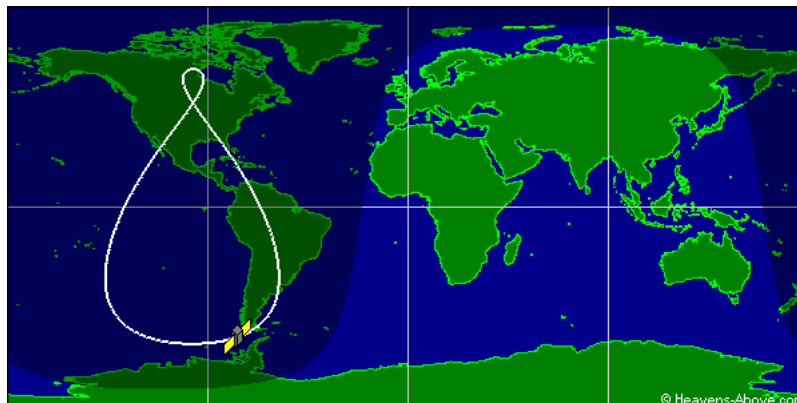


Figura 16.10: Mapa mostrando a projeção das órbitas dos Sirius na Terra. Repare que a lemniscata é a mesma do analema, e gerada por um efeito bem parecido (órbita elíptica e inclinada). Fonte: Heavens Above.

16.6 Exercícios

Como se pôde reparar, os movimentos orbitais não são tão parecidos como se poderia supor aos movimentos na superfície terrestre. Por isso, diante dessa situação, nossa intuição precisa ser reeducada, de forma a absorver o tipo de funcionamento dos movimentos gravitacionais no espaço. A única maneira de fazer isso é exercitando essa mesma intuição. Para isto, uma pequena lista de problemas que deve ajudar. Aos que desejarem mais desses problemas, entrem em contato com o membro do CCD mais próximo da sua casa.

- 120- (Seleção 2011) Uma nave tripulada está em apuros! Nossos heróis estão sem água há 3 dias, e estão à beira da morte! Se ficarem mais 10 horas sem água, todos morrerão! Na Terra de 2100, toda a água potável acabou e nossos heróis foram ao espaço procurar por água. Para isso, estão em uma órbita circular de altura h . Por sorte, eles detectaram um galão de água na mesma órbita!, mas formando um ângulo ϕ entre Galão-Terra-Nave.

Considere que o sistema de foguete da nave funciona em pequenos disparos que alteram instantaneamente sua velocidade na direção do disparo, por uma quantidade Δv (impulso específico). A direção do disparo é especificada pelo ângulo θ entre a velocidade v da nave e o vetor Δv .

- Explique esquematicamente como podemos salvar nossos heróis.
- Sabendo que $h = 400\text{km}$ e $\phi = 70^\circ$, calcule o impulso Δv necessário.

- 121- Um meteorito de massa $1,6 \cdot 10^3 \text{ kg}$ move-se em órbita circular em torno da Terra, a uma altura de $4,2 \cdot 10^6 \text{ m}$ acima da superfície. Subitamente ele colide com um outro meteorito muito menos massivo, e perde 2% de sua energia cinética, sem mudar sua direção do movimento ou sua massa total.

- Qual será a forma da órbita do meteorito após a colisão?
- Calcule a distância do meteorito à Terra em sua máxima aproximação, após a colisão.

- 122- Um planeta tem uma órbita circular em torno de uma estrela de massa M . A estrela explode, ejetando seu envelope externo em uma velocidade muito maior que a velocidade orbital do planeta, de forma que podemos considerar a perda de massa como instantânea. O que

restou da estrela tem ainda uma massa M' muito maior que a massa do planeta. Qual a excentricidade da órbita planetária após a explosão?

- 123- (IOAA 2009) Um projétil que parte da superfície da Terra (nível do mar) é lançado com velocidade inicial $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ e com ângulo de projeção $\theta = \pi/6$ com respeito ao horizonte local. M e R são a massa e o raio da Terra, respectivamente. Ignore a resistência do ar e a rotação da Terra.

- Mostre que a órbita do projétil é uma elipse com semi-eixo maior $a = R$.
- Calcule a maior altitude do projétil com respeito à superfície da Terra (em unidades de raio da Terra).
- Qual o alcance do projétil (distância entre o ponto de lançamento e o ponto de queda) em unidades de raio da Terra?
- Qual a excentricidade (e) desta órbita elíptica?
- Encontre o tempo de voo do projétil.

- 124- Dentro de poucas semanas a sonda Mariner 9 será lançada de Cabo Kennedy em uma missão para Marte. Assuma que essa sonda é lançada em uma órbita elíptica em torno do Sol com periélio na órbita terrestre e afélio na órbita de Marte.

- Encontre os parâmetros orbitais λ e ε da equação de órbita, e desenhe a órbita.

$$r = \frac{\lambda(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

- Calcule o tempo de duração até a missão chegar em Marte.
- Em que direção o lançamento deve ser feito para o gasto mínimo de combustível? Como deve ser a velocidade com que a sonda deve deixar a Terra?

- 125- (Seleção 2010) O gráfico abaixo indica a variação da altura da ISS em quilômetros em relação ao tempo.

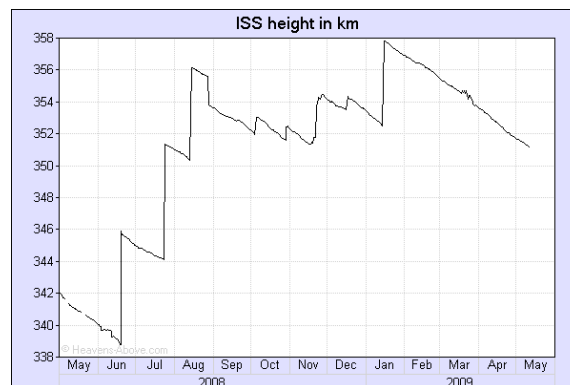


Figura 16.11: Altura da ISS ao longo de 2008 e 2009. Fonte: Heavens Above

Explique os saltos verticais no gráfico.

Capítulo 17

Órbitas Abertas

Como comentamos, Newton não só demonstrou como *generalizou* a Primeira Lei de Kepler, mostrando que as elipses eram um caso particular de órbitas possíveis sob ação da força gravitacional. Ele mostrou que algumas órbitas abertas eram soluções possíveis para movimentos gravitacionais e que tais órbitas abertas descreviam bem a trajetória de alguns cometas. Tal ampliação não ocorreu por acaso; seis anos antes, os astrônomos conseguiram medir com bastante precisão as posições do Grande Cometa de 1681. Não por acaso também, alguns astrônomos ficaram famosos pelo estudo dos cometas, como o então contemporâneo Edmund Halley.

As órbitas abertas podem ser agrupadas em dois tipos. Vamos mostrar em que sentido esses tipos são uma generalização das definições que conhecemos até agora.

17.1 Parábola

Vimos que a PARÁBOLA é a seção cônica que aparece quando o plano de interseção é paralelo à geratriz. Vimos também que trajetórias parabólicas correspondem às trajetórias de escape de mínima energia (a segunda velocidade cósmica). De fato, ela representa o caso degenerado de uma elipse quando um dos focos é levado até o infinito. Tanto o eixo maior quanto a distância focal ficam infinitas e a excentricidade vale exatamente 1.

Para fazer um desenho da situação, precisamos de uma maneira de representar o ponto focal no infinito. Não é uma tarefa óbvia, mas, para ajudar, podemos usar alguma propriedade conhecida do infinito. Por exemplo, o infinito é onde as retas paralelas convergem. Mas um ponto em que retas paralelas convergem tem que ser representado como uma reta perpendicular.

A construção geométrica clássica da parábola segue esse caminho: em vez de tomarmos dois pontos, tomamos um ponto e uma reta. O ponto será chamado de *foco*, a reta de *geratriz*. O conjunto dos pontos equidistantes do foco e da geratriz formam uma parábola. Do mesmo modo, se colocarmos uma lâmpada no foco da parábola, seus raios refletirão nela e sairão paralelos, ou seja, convergindo no infinito. Essa é a razão pela qual usamos espelhos parabólicos para fazer telescópios: a luz das estrelas vêm do infinito.

As Leis de Kepler também valem para as órbitas abertas mas, nesse caso, precisamos de algumas adaptações. Quer dizer, não a Lei II; do jeito como provamos ela, ela vale para qualquer trajetória gravitacional (mais: qualquer trajetória em que o momento angular é conservado), sem referência à forma dessa trajetória.

Já a Lei I, que fala das formas elípticas, precisa de uma adaptação óbvia. Mas é importante notar que, como a força é a mesma, vale o mesmo argumento de “impulsos iguais em tempos iguais”, ou seja, as velocidades de um corpo em trajetória parabólica também formam um círculo no espaço das velocidades. Só que, nesse caso, a origem está sobre a circunferência. Assim, a

velocidade máxima corresponde à distância mínima, o periastro. Para um lado e para outro, as velocidades diminuem e se inclinam, tendendo a ficar perpendiculares à velocidade do periastro e a ter tamanho zero. Assim, a velocidade tende a zero no infinito, da mesma forma que os braços da parábola tendem a retas horizontais.

A Lei III também carece de sentido aqui, já que não dá para definir o que seja o período de uma órbita parabólica. Além disso, a equação de energia encontrada na dedução também não se aplica. Como vimos quando deduzimos a velocidade de escape, a energia de uma órbita parabólica é sempre zero (no infinito, tanto v quanto $1/r$ tendem a zero) – em contraste com órbitas elípticas, que têm energia sempre negativa.

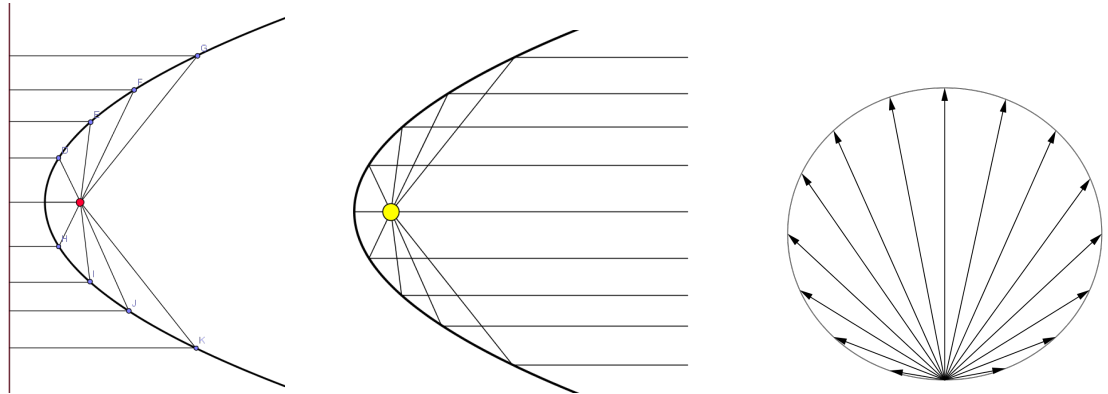


Figura 17.1: Definições métrica e óptica da parábola, junto com o espaço das velocidades das órbitas parabólicas.

17.2 Hipérbole

As hipérbolas são um caso ainda mais radical: quando o corpo chega no infinito com velocidade positiva. A curva corresponde a uma interseção cônica cujo plano está mais inclinado que a diretriz: com isso, ele intersecta o cone duas vezes, formando dois braços simétricos.

As hipérbolas tem braços mais abertos que as parábolas; com isso, os raios refletidos divergem, mas o prolongamento deles converge no outro foco (o do braço simétrico)! É como se o foco, passando pelo infinito, voltasse em um “espaço negativo” do outro lado. E de fato a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cuja *diferença* das distâncias aos focos é constante.

É claro que um corpo em órbita percorre apenas um dos braços da hipérbole; ele não vai até o espaço negativo, ou pelo menos demora um tempo infinito para fazê-lo. Nessa órbita, a velocidade máxima ainda é a do periastro e, conforme se afasta, ela vai diminuindo. No espaço das velocidades, o ponto de origem fica fora do círculo, de forma que as velocidades tendem a se aproximar dos dois vetores que tangenciam o círculo, com tamanho e direção definidas; eles correspondem às *retas assíntotas* da hipérbole.

Diferente da elipse e da parábola, a energia em uma órbita hiperbólica é sempre positiva (a energia cinética é maior, em módulo, que a energia potencial), tanto mais positiva quanto mais aberta / excêntrica for a órbita. A excentricidade de uma órbita hiperbólica é sempre maior que um e está relacionada com o ângulo entre as duas assíntotas: quanto maior a excentricidade de uma órbita hiperbólica, mais “aberta” ela é (como pode ser visto na figura ??).

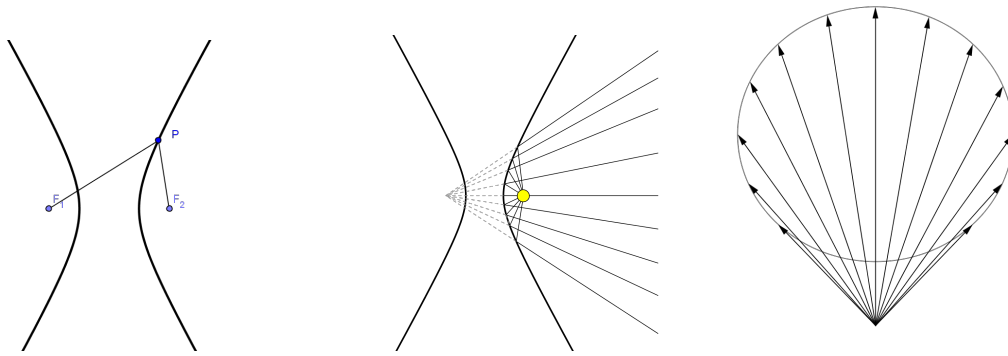


Figura 17.2: Definições métrica e óptica da hipérbole, junto com o espaço das velocidades das órbitas hiperbólicas.

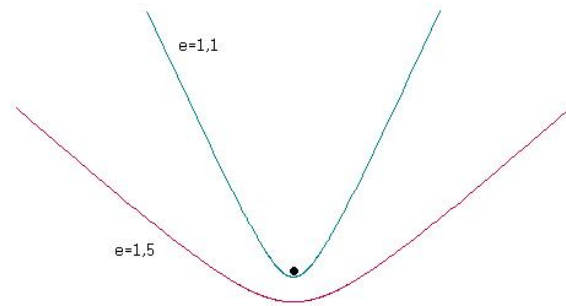


Figura 17.3: Hipérboles de duas excentricidades diferentes.

17.3 Transições Orbitais

Para dar um gostinho de como trabalhar com órbitas abertas, usemos um exemplo ao estilo do último capítulo. Retomamos a nave com impulsos discretos dos problemas anteriores. Qual a melhor maneira (impulso mínimo) para escapar usando um único disparo? Em que direção ele deve ser dado?

Obviamente, a melhor direção para se gerar a maior velocidade possível para um Δv fixo (ou atingir a mesma velocidade final com um Δv menor) é a direção da velocidade orbital. Em outras palavras, a soma $v + \Delta v$ será maior se ambos os vetores estiverem na mesma direção ($\theta = 0^\circ$). Quanto ao valor de Δv , é o valor necessário para transformar a velocidade de órbita circular $v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ em velocidade de órbita parabólica $v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \sqrt{2}v_c$. Ou seja, chamando de v_0 a velocidade orbital inicial da nave, o impulso específico mínimo é de $\Delta v = (\sqrt{2} - 1)v_0$.

Agora suponha que, depois de ter entrado em órbita parabólica, desejemos visitar um planeta que orbita essa estrela, numa órbita de raio $r_1 > r_0$. Quando a nave cruzar a órbita r_1 , um novo disparo deve ser feito, de forma a fazer a nave entrar em órbita circular naquele ponto (claro, para atingir o planeta, os tempos têm que ser sincronizados para que o planeta esteja naquele ponto da órbita no momento em que a nave atingi-lo). Novamente, qual é o mínimo valor de impulso específico para a operação?

Uma coisa interessante sobre órbitas parabólicas é que qualquer ponto da órbita que seja tomado como ponto de partida leva ao mesmo resultado: chegar à distância infinita com velocidade nula. Em outras palavras, todo ponto de uma órbita parabólica é um ponto de velocidade

de escape. Assim, na altura da órbita do planeta, sabemos que nossa nave estará com velocidade $v_{1e} = \sqrt{\frac{2GM}{r_1}}$. O papel do disparo será, então, fazer com que ela passe a ter velocidade de órbita circular, $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$.

O problema da direção, entretanto, aqui é mais sutil. A nave cruzará a órbita numa direção em geral diferente da tangente à órbita circular. Chamemos de ϕ o ângulo entre as duas direções, veja a figura 17.4.

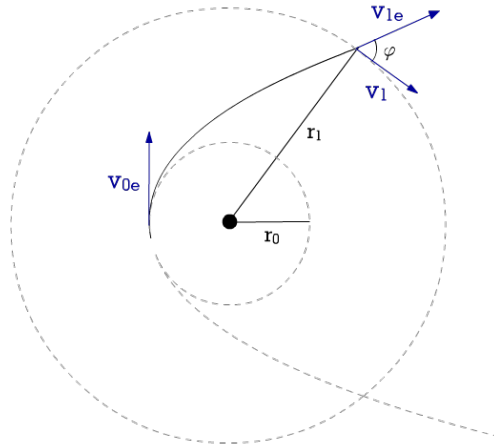


Figura 17.4: Transição entre duas órbitas circulares a partir de uma órbita parabólica.

Seja v_{0e} a velocidade de escape na altura da órbita original e v_{1e} essa velocidade na altura da órbita do planeta. Então a conservação do momento angular na órbita parabólica exige que:

$$v_{0e}r_0 = v_{1e}r_1 \cos \phi \quad (17.1)$$

E o impulso específico a ser gerado deve ser:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \|\vec{v}_1 - \vec{v}_{1e}\| \quad \therefore \quad (\Delta v)^2 = v_{1e}^2 + v_1^2 - 2v_{1e}v_1 \cos \phi \\ (\Delta v)^2 &= v_{1e}^2 + v_1^2 - 2v_{1e}v_{0e} \frac{r_0}{r_1} \\ (\Delta v)^2 &= \frac{3GM}{r_1} - 2\frac{r_0}{r_1} \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \sqrt{\frac{GM}{r_1}} = \frac{GM}{r_1} \left(3 - 2\sqrt{\frac{2r_0}{r_1}} \right) \\ \Delta v &= \sqrt{\frac{GM}{r_1} \left(3 - 2\sqrt{\frac{2r_0}{r_1}} \right)} \end{aligned} \quad (17.2)$$

Retomemos agora a situação inicial de nossa nave, com outro objetivo: fazê-la cair na estrela. A maneira mais óbvia de fazer isso é girar a nave para que ela fique no sentido contrário ao de sua velocidade ($\theta = 180^\circ$), e dar um burst que anule a velocidade da nave. Com velocidade nula, ela entrará em queda livre vertical na direção da estrela. Contudo, essa estratégia é bem estúpida em termos energéticos; ela obriga a gerar um impulso do tamanho da velocidade orbital - o que em geral é um valor alto.

A estratégia mais econômica em termos de combustível envolve dois bursts: um primeiro com $\theta = 0^\circ$, que faça a nave adquirir velocidade de escape, e um segundo quando a nave estiver bem distante, com velocidade bem próxima de zero, com $\theta = 180^\circ$ de forma que se reverta essa velocidade bem baixinha para a direção da estrela. Novamente, a nave entrará em queda

livre vertical na direção da estrela. Como esse segundo impulso tem valor desprezível, o impulso total é praticamente igual ao primeiro impulso, $\Delta v_1 = (\sqrt{2} - 1) v_0 \approx 0,4v_0$. Ou seja, o gasto de combustível é cerca de 40% do gasto da estratégia estúpida.

Claro, essa estratégia não é muito boa se você estiver com pressa; para fazer $\Delta v_2 \rightarrow 0$, fazemos o tempo de viagem tender a infinito. Estratégias intermediárias podem ser buscadas.

Por fim, mostremos que a estratégia acima corresponde ao mínimo impulso específico.

Já argumentamos suficientemente no sentido de que as maneiras mais econômicas de impulso específico são fazendo-os na direção da velocidade inicial. Tentemos então começar com um valor menor do primeiro burst, i.e., suponha $\Delta v_1 \leq v_{0e} - v_0$. Neste caso, a nave passará a uma órbita elíptica, e o ponto onde ocorreu o burst será o periélio da nova órbita. A velocidade da nave então será mínima no afélio, onde deverá ocorrer o segundo burst.

Sendo v_2 e r_2 a velocidade e distância no afélio, a conservação do momento angular impõe que $(v_0 + \Delta v)r_1 = v_2r_2$. Além disso, sendo a e e o semi-eixo maior e a excentricidade da órbita, respectivamente, temos que:

$$(v_0 + \Delta v)r_1 = v_2a(1 + e) = v_2r_1\frac{1 + e}{1 - e} \quad \therefore \quad v_2 = (v_0 + \Delta v)\frac{1 - e}{1 + e} \quad (17.3)$$

O segundo burst, então, tem que fazer a velocidade da nave se anular para que ela caia na estrela. Se o segundo burst diminuir a velocidade mas não anulá-la, a nave só entrará em outra órbita elíptica com periélio mais próximo à estrela. Fazer um segundo burst desse tipo e esperar para um terceiro burst mais próximo da estrela também não é bom, pois perto da estrela a velocidade da nave aumenta, tornando a anulação da velocidade ainda mais custosa. Assim, a melhor solução é $\Delta v_2 = v_2$ com $\theta = 180^\circ$. Sendo assim,

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = v_0\frac{1 - e}{1 + e} + \Delta v_1 \left(1 + \frac{1 - e}{1 + e}\right) \quad (17.4)$$

Mas $\Delta v_1 = v_1 - v_0$, sendo v_1 a velocidade no periélio. Usando um resultado já conhecido para órbitas elípticas, temos que:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{GM \frac{1+e}{r_1}} = v_0 \sqrt{1+e} \\ \Delta v &= v_0 \frac{1-e}{1+e} + (v_1 - v_0) \left(1 + \frac{1-e}{1+e}\right) = v_0 \left[\left(1 + \frac{1-e}{1+e}\right) \sqrt{1+e} - 1 \right] \end{aligned} \quad (17.5)$$

Expressão que é minimizada para $e = 1$ (órbita parabólica), quando caímos no caso apresentado anteriormente, c.q.d.

126- Um foguete de longo alcance é lançado da superfície da Terra com velocidade $\vec{v} = (v_\theta, v_r)$. Desprezando a fricção com a atmosfera e a rotação da Terra. Determine a altura máxima H alcançada pela trajetória. Verifique a aproximação desta equação para quando H/R é muito pequeno.

127- Um satélite é lançado da Terra com velocidade suficiente para escapar do Sistema Solar. Quando o satélite está cruzando a órbita de Júpiter, ele interage com o campo gravitacional do planeta e é defletido em 90° , ou seja, sua velocidade após a colisão é tangencial à órbita de Júpiter. Quanta energia o satélite ganhou durante a colisão? Ignore o campo gravitacional do Sol durante a colisão e assuma que a duração da colisão é pequena comparada com o período de Júpiter.

- 128- (IAO 2003) Mesmo os antigos gregos sabiam que o tamanho da Terra era pequeno se comparado à distância até as estrelas. Por exemplo, conta-se num mito que o deus Hefestos, por descuido, deixou sua bigorna cair na Terra. A bigorna levou 9 dias inteiros para atingir a Terra. Estime a “altura do céu” dos gregos, e compare-a com as distâncias de objetos conhecidos.
- 129- (IOAA 2011) Um satélite orbita a Terra em órbita circular. O momento inicial do satélite é dado pelo vetor p . Em certo instante, um burst fornece ao satélite um impulso adicional Δp , de mesma magnitude que p . Seja α o ângulo entre os vetores p e Δp , e β o entre o raio vetor do satélite e Δp . Pensando na direção do impulso adicional Δp , considere se é possível mudar a órbita para cada um dos casos descritos abaixo. Se sim, dê os valores de α e de β para os quais é possível.
- uma hipérbole com perigeu no local do burst
 - uma parábola com perigeu no local do burst
 - uma elipse com perigeu no local do burst
 - um círculo
 - uma elipse com apogeu no local do burst

Note que para $\alpha = 180^\circ$ e $\beta = 90^\circ$ a nova órbita será um segmento de reta ao longo do qual o satélite cairá verticalmente, em direção ao centro da Terra.

- 130- (IPhO 2005) Um satélite em órbita geoestacionária recebe, por erro dos operadores, um *burst* na direção do centro da Terra. Esse *burst* provocou uma variação na velocidade orbital de Δv , e é caracterizado pelo parâmetro $\beta = \frac{\Delta v}{v_0}$, onde v_0 é a velocidade orbital inicial do satélite. Suponha, dos itens de (a) a (d), $\beta < 1$:
- Determine os parâmetros da nova órbita, *semi-latus rectum* l e excentricidade e , em função de r_0 (raio orbital inicial) e β .
 - Calcule o ângulo α entre o semi-eixo maior da nova órbita e o vetor posição do *burst* acidental.
 - Dê as expressões analíticas das distâncias do perigeu (r_{min}) e do apogeu (r_{max}) ao centro da Terra, em função de r_0 e β , e calcule seus valores para $\beta = \frac{1}{4}$.
 - Determine o período T da nova órbita em função de T_0 , o período inicial, e β , e calcule seu valor numérico para $\beta = \frac{1}{4}$.
 - Calcule o valor mínimo de β , β_{esc} , necessário para que o satélite escape da atração gravitacional da Terra.
 - Calcule, na situação do item anterior, a menor distância entre o centro da Terra e o satélite (r'_{min}), em função de r_0 .

Suponha, agora, $\beta > \beta_{esc}$.

- Determine a velocidade residual no infinito, v_∞ , em função de v_0 e β .
- Determine o parâmetro de impacto b da direção da assíntota da órbita, em termos de r_0 e β (veja a Figura 17.5).
- Determine o ângulo ϕ da direção da assíntota em termos de β . Calcule seu valor numérico para $\beta = \frac{3}{2}\beta_{esc}$.

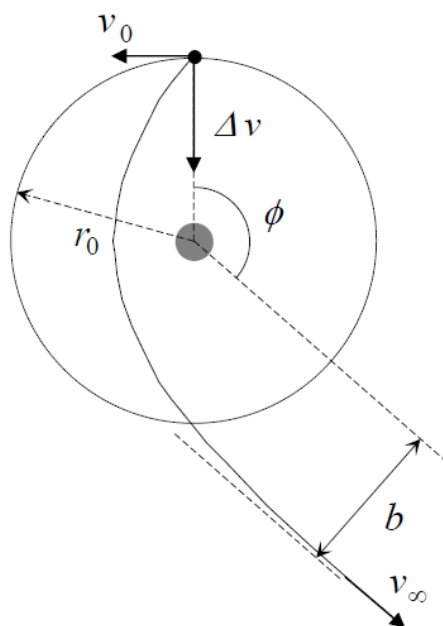


Figura 17.5: Órbita para $\beta > \beta_{esc}$.

Capítulo 18

Marés

As marés são algo bem conhecido há muito tempo pelos Hug-Bugs praianos. Eles viam que havia sempre uma hora do dia em que a faixa de areia era menor, que o nível da água era mais alto: a MARÉ ALTA. Depois desse momento, que em cada dia acontecia em um horário, o nível do mar ia baixando, a faixa de areia aumentando, até que, seis horas depois, chegava-se em um mínimo: a MARÉ BAIXA. Mais seis horas e, somando doze, se contarmos do início, havia uma nova maré alta. Assim, em cada período de dia e noite, havia duas marés altas e duas marés baixas.

18.1 Lua e as marés

Houve um grego, Píteas, que chegou a propor que as marés eram causadas pela Lua. Tudo bem que a Lua influencie as plantas, os animais, a nossa própria personalidade; mas querer que ela seja responsável pelo ciclo de marés... Tudo bem, em uma das marés diárias, a Lua sempre está alta no céu, mas *só em uma*. Aparentemente, dá pra explicar uma das marés por uma certa atração, uma simpatia pela Lua; mas a outra maré permaneceu inexplicada.

No renascimento, a idéia de associar a Lua com as marés nasceu nos círculos místicos: Kepler acreditava nisso, Galileu não. Mas Newton, bastante influenciado pelo incrível trabalho de Kepler (veja o Volume 2 para mais detalhes) seguiu essa linha. De fato, a Gravitação Universal de Newton é capaz de explicar como os dois bojos de maré (que correspondem às duas marés diárias) podem ser explicados como causados pela Lua!

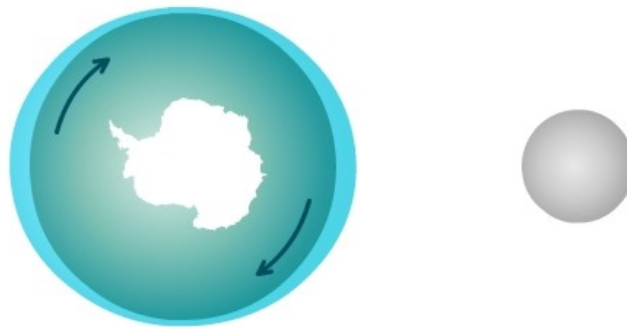


Figura 18.1: Marés causadas pela Lua. Pode-se notar que, em cada ponto da Terra, são duas marés altas por dia.

A explicação do fenômeno das marés não exige que se entre em muitos detalhes matemáticos.

Pois bem. A Terra está a uma certa distância da Lua, e ambos os corpos sofrem a mesma força. Mas como a massa da Terra é muito maior que a da Lua, a Terra fica praticamente parada (em relação à Lua), e o astro cinza é que orbita o nosso planeta. Por sua vez, a força gravitacional que a Lua exerce sobre a Terra não é igual nos lados opostos do nosso planeta, pois eles distam cerca de 6.400 km um do outro, que é o diâmetro da Terra. A força é mais forte sobre o lado que está mais próximo da Lua e mais fraca sobre o lado oposto, mais afastado. Isso acontece porque a força gravitacional fica mais fraca com a distância. Mas como pode isso produzir as marés?

Isso acontece porque a força gravitacional da Lua faz com que a Terra seja acelerada em direção à ela. O lado mais próximo da Lua adquire maior aceleração em direção à Lua do que o lado oposto, mais afastado. Só que quem se eleva nessa direção é a água do mar!

Para visualizar melhor vamos partir para algumas estimativas numéricas. A distância do centro da Lua ao centro da Terra é de aproximadamente 384.400 km. O raio da Terra é algo em torno de 6.400 km. Ou seja, a distância do centro da Lua à face da Terra mais próxima a ela é 378.000 km, e a distância à face mais distante, 390.800 km. Uma diferença aparentemente pequena, mas significativa. Se tomarmos a distância da Lua à face próxima da Terra como 1, então a distância até a face distante será $\frac{390.800}{378.000} = 1,034$. Isto quer dizer que, se a força gravitacional na face mais próxima for 1, então a força gravitacional na outra face é $1,034^2$ menor, ou seja, é $\frac{1}{1,034^2} = 0,93$. Em outras palavras, a atração na face oposta será 93% da atração na face voltada para a Lua. Ou seja, a diferença de forças entre as duas faces é de cerca de 7%.

Se as partes de trás são menos atraídas que as da frente, a média das forças é igual à força sofrida no centro da Terra. Mas o nosso planeta é rígido e, portanto, se comporta como se só houvesse a força no centro. A não ser pelas grandes massas líquidas – os oceanos – que são bem mais maleáveis. Assim, o oceano que está perto da Lua é mais atraído que o centro da Terra e as águas sobem. Mas a face oposta é menos atraída que a Terra, o que faz as águas lá também se afastarem da Terra! (Como se a Terra fosse atraída e as águas ficassem pra trás). Assim, são dois bojos, com uma diferença de 7% de força entre eles!!

Mas e quanto aos horários das marés altas e baixas ao longo do dia, porque não são sempre os mesmos? As duas protuberâncias alcançam em média 1 metro acima da superfície do oceano. Como a Terra gira dá uma volta em torno de si mesma em 24 horas, um ponto fixo sobre ela cruza as protuberâncias duas vezes. 6 horas depois de a Terra ter passado por uma dessas protuberâncias, ocorre uma maré baixa e o oceano está 1 m abaixo de sua superfície. O ciclo das marés altas demora exatamente o mesmo tempo que a Lua demora para voltar à mesma posição no céu, 24h 50 min. Por isso as marés altas não acontecem todos os dias no mesmo horário.

18.2 Sol e as marés

E quanto aos outros corpos do Sistema Solar, eles não exercem força de maré sobre nós? Todos os outros corpos estão muito mais distantes de nós que a Lua, o que limita bastante as possibilidades. Por outro lado, a massa do Sol é três ordens de grandeza maior que a do maior planeta! Ele também deve ter alguma influência nas nossas marés.

Para simplificar as coisas, tomemos a massa da Lua como 1, no nosso sistema de unidades¹ (no Sistema Internacional, a massa da Lua vale $7,35 \cdot 10^{22}$ kg). Tomemos também como unidade (1) a distância entre o centro da Terra e o centro da Lua. Assim sendo, as unidades do Sol ficam

$$M_{Sol} = \frac{1,99 \cdot 10^{30}}{7,35 \cdot 10^{22}} = 27.000.000 M_{Lua}$$

$$D_{Sol} = \frac{1,496 \cdot 10^5}{384000} = 389 D_{Lua}$$

¹Para maiores informações, consulte o Volume 3, capítulo de Sistemas de Unidades.

E, portanto, a força gravitacional do Sol sobre a Terra é $\frac{27.000.000}{389^2} = 178$ vezes a força gravitacional da Lua sobre a Terra! Deveríamos esperar, então que as marés causadas pelo Sol fossem muito maiores que as causadas pela Lua... Mas não! Porque se a massa do Sol é muito maior, sua distância também é; e a uma distância dessas, o raio da Terra pode ser mais facilmente desprezado, quer dizer, a atração exercida pelo Sol sobre lados opostos da Terra é praticamente igual.

Para verificarmos, basta repetirmos o raciocínio que fizemos para a Lua. A distância do centro do Sol ao centro da Terra é aproximadamente 146 milhões de km (146.000.000 km); do centro do Sol à face mais próxima da Terra, 145.993.600, à face mais distante, 146.006.400. Se a distância do centro do Sol à face mais próxima da Terra for 1, então a distância à face mais distante será 1,00009. Nesta distância, a força gravitacional é $\frac{1}{0.0009^2} = 0,99982$ da força na face mais próxima. Ou seja, diferença entre as forças é 0,00018.

Em outras palavras: enquanto a diferença entre a atração da Lua nas duas faces da Terra é de 7%, a diferença na atração Solar é de apenas 0,018%. Multiplicando essa porcentagem pelo quanto a força solar é maior que a lunar, obtemos 3,2% na diferença de efeito gravitacional. Assim, razão entre a maré produzida pelo Sol e a produzida pela Lua é $\frac{7}{3,2} = 46\%$. Apesar da força gravitacional muito maior, a maré produzida pelo Sol é só aproximadamente metade da maré produzida pela Lua.

Quando o Sol, a Terra e a Lua estão alinhados, as marés produzidas pelo Sol e Lua coincidem. Temos então marés altas acima da média e marés baixas abaixo da média. Nessa ocasião, quando a Lua é cheia ou nova, a maré torna-se quase 50% maior; é o que chamamos MARÉS DE SIZÍGIA. As marés de Sizígia não são todas iguais porque a distância entre a Terra e a Lua e entre a Terra e o Sol variam - órbitas elípticas e não totalmente circulares. As sizíguas mais altas acontecem quando a Lua e o Sol estão mjaís próximos da Terra.

Se a Lua se encontrar a meio caminho entre uma Lua nova e uma Lua cheia, formando um ângulo de 90° com o Sol e a Terra, temos uma maré alta lunar e uma maré alta solar no lugar de maré baixa; então a diferença entre marés passa a ser três vezes menor (50% do que se fosse só a Lua) e temos as MARÉS DE QUADRATURA.

Pode-se verificar também, por raciocínio análogo (tente!) que o efeito de maré de qualquer outro corpo do Sistema Solar é desprezível. Além disso, vale ainda ressaltar que existe um certo atraso da maré observada no mar, em relação à posição da Lua no céu, porque leva um tempo para as águas se movimentarem e chegarem nas regiões costeiras. A amplitude da maré ainda depende muito fortemente do perfil do leito marinho próximo à costa (se é fundo, ou raso, horizontal ou um declive acentuado), bem como do formato do litoral (se é reto, ou recortado, ou em forma de baía), dos ventos marítimos e da pressão atmosférica. A inclinação do eixo terrestre também influencia a formação das marés pois faz com que as duas marés altas experimentadas na maior parte da Terra, sejam diferentes.

Mas a Lua exerce influencia gravitacional apenas sobre as águas oceânicas? E num lago, por exemplo, podem acontecer marés? Num lago não são produzidas marés simplesmente porque ele não possui extensão suficiente para que elas se formem. Um lago, geralmente, é pouco extenso, o que faz com que a diferença da força de atração gravitacional exercida pela Lua em lados opostos seja desprezível. Ou seja, nenhuma parte do lago está mais próxima da Lua que a outra. O mesmo vale para o nosso corpo, ou um copo d'água. Mas isso não acontece na atmosfera terrestre ou na crosta do nosso planeta.

A Terra não é um sólido totalmente rígido. A crosta é uma camada sólida, porém fina e flexível. A atração gravitacional pode produzir marés na crosta, bem como na atmosfera. Duas vezes por dia a superfície sólida da Terra é elevada e abaixada, e essa elevação chega a 1/4 metro! Nos períodos de Sizígia, inclusive, temos um ambiente mais propício para erupções vulcânicas e terremotos. Quanto a atmosfera temos as marés magnéticas, na região da ionosfera. Não

sentimos a maré na ionosfera como um peixe não sente o que acontece na superfície do mar.

Uma observação interessante é que o atrito gerado pelas marés (mais especificamente, o atrito do movimento das águas com o leito oceânico) acaba gerando um lento processo de *retardamento* da velocidade de rotação da Terra! Analisaremos melhor esse efeito no capítulo de Física de Rotações do Volume 2, mas a idéia é que esse atrito vai freando nosso planeta, dando parte de sua energia de rotação para a Lua que, compensando o freamento, se afasta de nós! Estimativas dizem que, sem a Lua, o período de rotação da Terra seria de 18 horas! Segundo a teoria do impacto, quando nosso satélite começou a nos orbitar, a distância dela era cerca de 50 000 km – o valor médio atual é 384 000 km. (Devia ser muito loko ver a Lua cheia a essa distância de nós, né?)

- 131- Considerando que o tamanho angular médio da Lua no céu seja de $31'$, qual seria o tamanho nessa situação inicial?
- 132- Já houve dias em que foi possível observar apenas eclipses totais e parciais, sem os anulares? Poderá haver eclipses anulares, sem que existam os totais?
- 133- Foi observada uma maré alta hoje às 15 h. Calcule o horário das próximas 9 marés, altas e baixas.

A Lua também sofre a ação das marés da Terra, e como tem uma massa muito menor ($6 \cdot 10^{24}$ kg para a Terra contra $7 \cdot 10^{22}$ kg da Lua), sofre isso de maneira muito mais forte. Assim, a Lua retardou tanto seu período de rotação que ficou com a mesma face voltada pra gente sempre - nessa posição de rotação sincronizada, não há mais arrasto. Um dia, o mesmo vai acontecer com a Terra, em relação aos selenitas. (No sistema Plutão-Charon, em que um tem a metade da massa do outro, a sincronização já é mútua). Um efeito colateral disso para a Lua é que ela é ligeiramente deformada, tendo um bico voltado para a Terra (e outro voltado “para fora”).

- 134- Em que fases da Lua as marés são mais altas?
- 135- Em que estações do ano as marés são mais altas?

18.3 Física das Marés

A abordagem de Newton considerava os planetas pontos materiais de massa desprezível em relação ao Sol². Entretanto, eles não são pontuais, logo o campo gravitacional atua com diferentes intensidades e direções em partes diferentes de um planeta. Esta é a idéia básica em torno das MARÉS.

O fenômeno das marés na Terra só podem ser compreendido, aliás, quando consideramos as dimensões do nosso planeta não desprezíveis. O desenho a seguir mostra, de forma um pouco exagerada, como partes diferentes do planeta são atraídas com forças e direções diferentes (vide figura 18.2)

Como o corpo sob ação da força é rígido, isto é, não será despedaçado por esta força, ele vai acelerar como um todo na direção do outro corpo (podendo ser uma aceleração centrípeta), com a aceleração do seu centro de massa. No entanto, porções da água, de ar ou de qualquer coisa não-rígida (de tamanho não-desprezível) que estiverem na superfície do corpo sentirão certas as forças relativas, isto é, a diferença entre a força do centro de massa e a força real aplicada naquele ponto (ver figura 18.3).

²Basicamente o motivo de considerá-los pontuais é porque estávamos interessados na forma e dinâmica da órbita do planeta, logo, fenômenos que afetam principalmente sua forma podem ser desprezados.

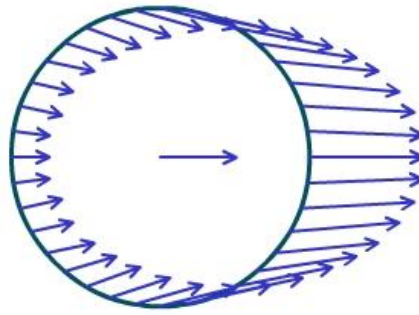


Figura 18.2: Força de atração gravitacional agindo em diferentes pontos do planeta.

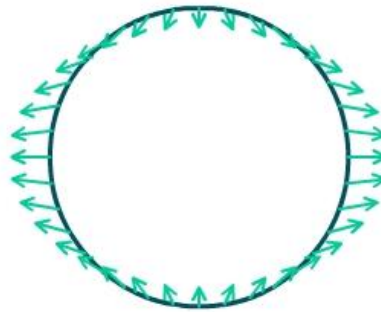


Figura 18.3: Força de atração gravitacional relativa ao centro de massa agindo em diferentes pontos do planeta.

Matematicamente: seja um satélite e seu planeta a uma distância d um do outro. Tomemos dois pontos no satélite, distando de x entre si (com x muito menor que d , $x \ll d$) e sobre uma reta que passa pelo centro do planeta (como pode ser visto na figura 18.4).

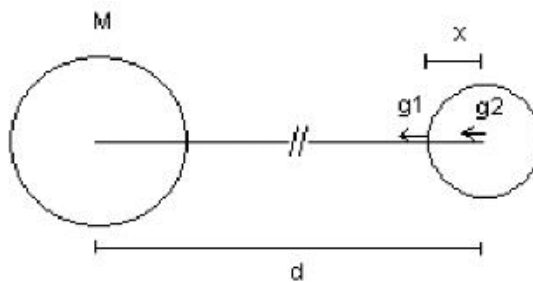


Figura 18.4: Força de atração gravitacional em dois pontos do satélite.

Podemos calcular a diferença entre o campo gravitacional do planeta sobre os dois pontos:

$$|\vec{g}_1 - \vec{g}_2| = GM \left(\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{d^2} \right)$$

Como temos que $d \ll x$, podemos fazer a aproximação³ $(1+x)^b \approx 1+bx$, ficando a expressão:

$$|\vec{g}_1 - \vec{g}_2| = \frac{2GM}{d^3}x$$

Logo, para um observador no planeta, na linha que o liga ao satélite, aparece uma “força” (estamos colocando entre parênteses pois não é uma força no seu sentido verdadeiro, mas sim uma diferença das forças gravitacionais entre os dois pontos!) que depende de quão perto se está do planeta:

$$F_{mar} = \frac{2GMm}{d^3}x$$

Esta “força” recebeu o nome de FORÇA DE MARÉ, pois é a causa das marés que observamos nas praias. Mas isso logo nos leva a uma outra questão.

18.3.1 Limite de Roche

Vocês já perceberam que não existem satélites naturais muito perto de planetas? O motivo é a própria força de maré! Existe uma distância mínima abaixo da qual as forças de maré são *maiores que as próprias forças de coesão do planeta*: a distâncias desse tipo, corpos não conseguem se unir gravitacionalmente, e corpos gravitacionalmente unidos são destruídos, desfeitos em poeira, ao cair por ali⁴. Essa distância limite, a partir da qual não podem existir satélites ligados unicamente pela força da gravidade é chamado LIMITE DE ROCHE.

Podemos tentar estimar esse limite, para o caso mais simples: Um satélite completamente rígido, que permanece esférico até ser despedaçado. Ao chegar no limite de Roche, a força gravitacional do satélite (de massa m) é igual à força de maré causada pelo planeta (de massa M) sobre uma partícula (que chamaremos de u) em sua superfície (e com isso não há mais força que mantenha a coesão do corpo):

$$\frac{2GMu}{d_{roche}^3}r = \frac{Gmu}{r^2}$$

Ficamos, então, com a expressão:

$$d_{roche} = r \sqrt[3]{\frac{2M}{m}}$$

Porém, esta formula tem o inconveniente de ter a massa do satélite e seu raio. Podemos eliminar isso com o uso da densidade dos corpos, chegando a expressão:

$$d_{roche} = R \sqrt[3]{\frac{2\rho_{planeta}}{\rho_{satelite}}}$$

Essa estimativa foi feita usando corpos inteiramente rígidos; mas nenhum corpo é assim; antes de estar num limite para se despedaçar, ele ainda deforma bastante, criando bojos na zona equatorial, e achatamento nos pólos (supondo que o eixo de rotação seja perpendicular ao plano dos dois corpos). Caso levássemos a deformação em consideração nas contas, o limite de Roche seria duas vezes maior!

³Esta aproximação é uma extensão da expansão binomial (justificável pelo cálculo diferencial): vejamos o caso $b = 2$: $(1+a)^2 = 1+2a+a^2$, podemos perceber que, quando $a \ll 1$, é razoável considerar $a^2 \approx 0$, e, portanto, a forma fica como na aproximação. Vocês podem expandir para qualquer número natural e verificar que, se desprezarmos os termos de a com potencia maior que 1, temos a aproximação sugerida.

⁴Repare que a maior parte dos anéis de poeira dos planetas gasosos está abaixo de seu Limite de Roche. Pense por que.

- 136- Estime o Limite de Roche de Júpiter, e da Terra (calculando a altura a partir da superfície do planeta). Veja uma tabela de satélites de Júpiter, e veja se há algum satélite abaixo desse limite.

O limite de Roche, em geral, fica bem acima da superfície de um planeta; mas nós, seres vivos da superfície, não somos despedaçados pela maré terrestre!! É que não podemos esquecer que, ao calcular o limite, estávamos usando a coesão gravitacional como a única força que matinha a coesão dos corpos; mas seres vivos não são mantidos inteiros gravitacionalmente! Relevando o comentário extremo, existem de fato satélites abaixo do Limite de Roche, como as *Luas Pastoras*, que gravitam regiões interanéis, nos gigantes gasosos. Para esses satélites existirem onde existem, devem ser mantidos por outras forças de coesão (forças eletromagnéticas) que não a gravitacional. Nós, mantidos basicamente por ligações químicas, pontes de hidrogênio, essas coisas, estamos definitivamente fora de risco. Mas isso explica porque não vemos nenhum corpo atraindo outro gravitacionalmente, aqui na superfície.

Ao incluirmos rotação nos corpos analisados, aparece ainda um efeito de arrasto causado pelos bojos, pois estes ficam parados em relação ao satélite⁵, o que gera uma força de atrito entre as camadas do corpo, freando a rotação de ambos os corpos. Este efeito, após muito tempo, tende a gerar o que batizamos de ROTAÇÃO SINCRONIZADA. O arrasto sofrido pela Lua já foi suficiente para que esteja, hoje, sempre com a mesma face voltada para nós. O mesmo pode ser dito para Fobos e Deimos ao redor de Marte, para as quatro luas galileanas em Júpiter, com as cinco luas shakesperianas de Urano, com Tritão em Netuno, só para citar as principais. Mesmo Mercúrio ruma rapidamente à sincronização com o Sol (seu período de rotação já dura 2/3 do de revolução).

- 137- Um efeito importante e conhecido do freamento da Terra é o fato da Lua estar se afastando da Terra! Explique este fenômeno a partir do momento angular do Sistema Terra-Lua. Usando dados de alguma tabela, calcule o tamanho angular da Lua no nosso céu quando a Terra já estiver com sua rotação sincronizada com a do seu satélite.
- 138- Quando Mercúrio tiver sua rotação sincronizada com o Sol, ele também passará por libração em latitude, e em longitude? Se sim, comparar os hipotéticos valores com os da Lua.
- 139- Calcule a distância do centro de massa Plutão-Charonte a Plutão, medida em raios deste. Dados: Massa de Charonte/Massa de Plutão $\approx 8,6$. Distância de Charonte a Plutão = 17 Raios de Plutão.
- 140- O que aconteceria com um corpo cuja distância para órbita estacionária (com período igual ao período de rotação do corpo) estivesse abaixo de sua superfície?

⁵É interessante notar que os bojos não ficam na exata direção do astro que os causa, isto se deve à mesma força de arrasto que freia a rotação, pois enquanto a rotação do planeta é freada (ou acelerada), o bojo é acelerado (ou freado) fazendo com que a direção do mesmo não seja a mesma do astro.

Unidade IV

Apêndices

Apêndice A

Funções

Como vimos, função é uma relação entre elementos de conjuntos. Ela relaciona cada elemento de um conjunto (o conjunto DOMÍNIO) a elementos de um outro conjunto (o CONTRA-DOMÍNIO). Essa relação se dá de forma que cada elemento do domínio esteja relacionado a um e somente um elemento do contra-domínio. Apesar da maioria das funções que usamos na Física sejam do tipo $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (lê-se do Conjunto Real ao Conjunto Real), ou seja, elas relacionam números reais a outros números reais. Funções podem relacionar qualquer conjunto a outro. Podemos relacionar cada pessoa ao número de sua identidade ou cada planeta ao sistema que pertence, etc.

A.1 Classificação das funções

Já que estamos falando de relações entre elementos de conjunto, podemos primeiramente classificar funções quanto à maneira que essa relação se dá. Assim classificamos as funções como injetiva, sobrejetiva e bijetiva.

FUNÇÕES INJETIVAS são aquelas para as quais cada elemento do domínio está relacionado a um elemento diferente do contra domínio. Assim se um elemento do contra domínio recebe um elemento do domínio podemos garantir que ele recebe exatamente um. Um exemplo de uma função injetiva é a que relaciona cada casa de uma rua a seu número. Cada casa se relaciona a somente um número, isso é óbvio pois trata-se de uma função, e cada número só está relacionado a no máximo uma casa. Não existem duas casas com o mesmo número. Por outro lado podem existir números que não estejam relacionados a nenhuma casa. Um exemplo de uma função não injetiva é a função que relaciona um filho a sua mãe, pois existem mães com mais de um filho.

Antes de falarmos das funções sobrejetivas temos que apresentar um outro conjunto: O conjunto imagem. O conjunto IMAGEM é o conjunto formado pelos elementos do contra-domínio que estão relacionados a um elemento no domínio. No exemplo que relacionávamos cada casa a um número vamos supor que em uma rua as casas tenham os números 1, 3, 4 e 5. O conjunto imagem é o conjunto $\{1, 3, 4, 5\}$. O 2 por exemplo não pertence ao conjunto imagem apesar de ser um número pois não existe nenhuma casa com o número 2.

FUNÇÕES SOBREJETIVAS são aquelas para as quais o conjunto imagem é igual ao contra domínio. Não existe portanto nenhum elemento do contra domínio que não esteja no conjunto imagem. Um exemplo de função sobrejetiva é a que relaciona uma certa data o dia da semana correspondente. Observe que ela não é injetiva pois podemos ter duas ou mais datas relacionadas ao mesmo dia da semana, mas não existe um dia da semana que não receba uma data! Já o exemplo anterior, das casas numa rua, não é uma função sobrejetiva.

Quando uma função é ao mesmo tempo sobrejetiva e injetiva ela é BIJETIVA. Nesse caso todo elemento do contra domínio recebe um elemento diferente do domínio. Por outro lado podemos fazer o caminho oposto e dizer que todo elemento do domínio recebe um elemento do contra domínio (repare que isso nada mais é que a condição de existência de uma função). Por podermos sempre fazer o caminho oposto, as funções bijetivas são inversíveis. Se pensarmos na função como a máquina da lista 3 e estivermos lidando com uma função bijetiva poderíamos colocar a máquina para funcionar ao contrário e ao colocarmos o resultado nela recebermos o valor inicial. Um exemplo de função bijetiva é a que relaciona um número ao seu dobro. Se temos um número sabemos que existe exatamente um outro número que o dobro dele. Fazendo o caminho inverso, se temos um número sabemos que sempre existe exatamente um número que é a metade dele.

A.2 Funções entre conjuntos numéricos

Como já citado, as funções com maior importância no estudo da física são as que relacionam dois conjuntos de números. Assim abordaremos as principais delas. Mas antes falaremos de algumas convenções e nomenclaturas importantes.

Chamamos de INCLINAÇÃO de uma reta a tangente do ângulo que ela forma com o eixo horizontal. Ela é dada pela razão $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ou $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Essa idéia de inclinação será importante na hora de abordarmos a idéia da derivada de uma função.

Chamamos de raízes de uma função os valores x tal que $f(x) = 0$. No gráfico de uma função, esses são os pontos onde a curva intercepta o eixo horizontal.

A.2.1 Funções Polinomiais

Funções polinomiais são as da forma $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$. Para quem ainda não se familiarizou com matemática, vamos esclarecer o significado disso.

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ são os chamados COEFICIENTES, eles são os números que multiplicam as potências de x , podendo ser inclusive zero e negativos. A exceção é o a_n que precisa ser não nulo. O valor de n pode ser qualquer um, dizemos que é um polinômio do n -ésimo grau.

Entre as funções polinomiais, a mais relevante é a FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU ($n = 1$). Como ela só tem dois termos, muitas vezes ela também é escrita na forma $f(x) = ax + b$. Ao fazermos o gráfico dela percebemos que se trata de uma reta. Nas funções do primeiro grau, chamamos o valor a de *coeficiente angular* e o b de *coeficiente linear*.

Podemos ver também que a inclinação dela é igual ao valor do coeficiente angular (por isso angular). Essa função é do mesmo tipo que relaciona um instante de tempo a posição de uma partícula quando ela se move com velocidade constante. Observando a fórmula das velocidades constantes e comparando com a da função do primeiro grau vemos que a velocidade pode ser substituída pelo coeficiente angular e a posição inicial pelo coeficiente linear. Na figura A.1 temos várias funções de primeiro grau.

AS FUNÇÕES DO SEGUNDO GRAU por sua vez descrevem curvas (as parábolas, que podem ser vistas na figura A.2). Sabemos pelas equações do movimento uniformemente variado que a trajetória de corpos quando lançados descrevem parábolas. Podemos notar isso se compararmos a fórmula da função do segundo grau com a equação do MUV.

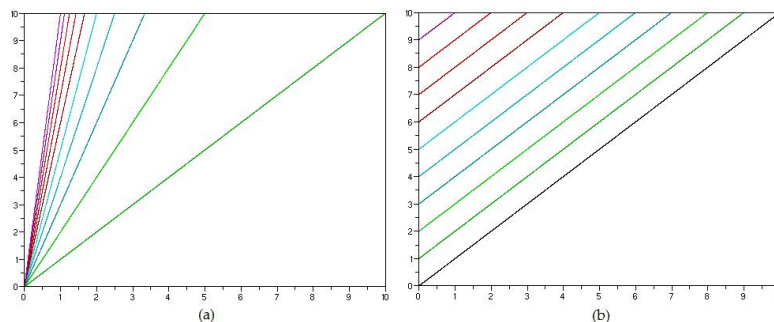


Figura A.1: No gráfico (a), temos retas do tipo $y = ax$, para valores inteiros de a entre 1 e 10. Observe que, quanto maior o a , mais inclinada é a reta. No (b), temos retas do tipo $y = x + b$, para valores inteiros de b entre 0 e 10. Observe que variar o b significa transladar a reta para cima ou para baixo, e que a reta cruza sempre o eixo y em $y = b$ (ou seja, quando $x = 0$).

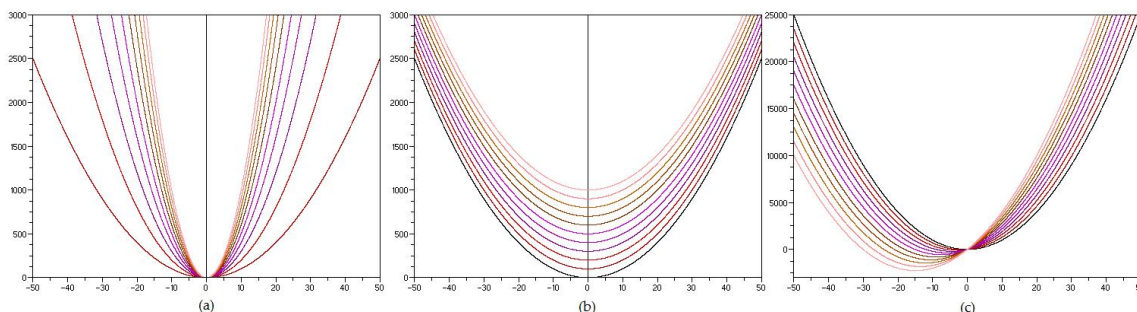


Figura A.2: No gráfico (a), temos parábolas do tipo $y = ax^2$, com a assumindo os valores $1, 2, 3, \dots, 10$. Repare que, como no caso das retas, quanto maior o a , maior a 'inclinação' das parábolas (mais rápidos elas crescem, conforme se afastam de $x = 0$). No (b): parábolas do tipo $y = x^2 + c$, com c assumindo os valores $100, 200, 300, \dots, 1000$ (o intervalo foi maior para o desenho ficar melhor visualizável). Repare que, como acima, o coeficiente linear só faz o gráfico transladar verticalmente. No (c): parábolas na forma $y = 10x^2 + bx$, com b assumindo os valores $30, 60, 90, \dots, 300$ (novamente, os intervalos, bem como as escolhas de $a = 10$ e $c = 0$ estão só por conveniência gráfica). Desta vez, interprete você mesmo as mudanças nas formas gráficas.

Encontrando raízes de equações do segundo grau

Encontrar a raiz de equações do primeiro grau é uma operação bastante simples. Se temos uma equação da forma $ax + b = 0$, com um pouco de manipulação fazemos $x = -\frac{b}{a}$.

Mas equações do segundo grau são um pouco mais complicadas e não tão óbvias. Equações do segundo grau são da forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Vamos agora deduzir uma fórmula para resolvê-las:

Como regra geral vamos adotar, como primeira medida, sempre transformar a equação de forma a ter o coeficiente da maior potência valendo 1. No caso, basta dividir tudo por a ; fazendo isso, ficamos com $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Então vamos ter que dar uma lance de esperteza, olhando por algum ângulo particular. Vejamos, temos um termo $x \cdot x$, um outro $\frac{b}{a} \cdot x = 2\frac{b}{2a} \cdot x \dots$ Isso não lembra um produto notável, aquele $(m + n)^2 = m^2 + 2m \cdot n + n^2$? Porque se tivermos um produto notável, estamos feitos; estes nós sabemos resolver sem problemas! Vamos então forçar as coisas para que consigamos algo desta forma:

$$\begin{aligned}
 x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} = 0 \\
 x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a} &= \frac{b^2}{4a} - \frac{c}{a} \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a} - \frac{c}{a}
 \end{aligned}$$

E, portanto, encontramos dois diferentes valores de x , duas raízes:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O termo dentro da raiz, $b^2 - 4ac$, é freqüentemente chamado de **DISCRIMINANTE** ou **DELTA**. Essa fórmula final é conhecida como **FÓRMULA DE BASKHARA**¹. Com ela, podemos calcular genericamente qualquer raiz de qualquer equação do segundo grau, a partir de seus coeficientes. Mas mesmo sem isso, a fórmula permite tirar interpretações importantes de tal equação. Por exemplo, se o discriminante for um número negativo, como não existem números reais que são raízes quadradas de números negativos, então a equação não possui soluções reais². Nessa condição, ao fazermos o gráfico da função correspondente, vemos que a parábola não intercepta o eixo horizontal. Se o delta, por outro lado, for igual a zero, a equação possui apenas uma raiz³ e o gráfico tangencia o eixo dos x . Para termos duas raízes convencionais, é necessário que delta seja maior que zero.

Uma curiosidade interessante é que é possível também resolver todas as equações do terceiro e quarto grau, com fórmulas consideravelmente maiores e mais complicadas. Em equações de grau maior ou igual a 5, pelo contrário, pode-se provar que não é possível, para todas as equações de um dado grau, encontrar suas raízes fazendo um número finito de operações fundamentais e extração de raízes quadradas, cúbicas, etc. Podemos apenas achar soluções aproximadas por somatórios infinitos e outros métodos de limites (ou métodos numéricos computacionais). Mas o fato de as raízes não poderem ser encontradas algebricamente não implica sua não-existência, do ponto de vista mais abstrato.

A.2.2 Função Exponencial e Função Logarítmica

As funções exponenciais são as do tipo $f(x) = a^x$, com a positivo e diferente de 1. Suas aplicações não aparecem tão frequentemente em física, mas ela costuma ser usada para descrever fenômenos do nosso cotidiano como o crescimento de populações e na economia. Em física ela pode aparecer, por exemplo, quando queremos estimar o acúmulo de erro depois de repetidos processos.

Uma propriedade importante da função exponencial é que, se temos a igualdade $a^x = y$, podemos garantir que para cada y positivo existe exatamente um x que satisfaz a relação. Portanto, se definirmos a função exponencial como uma função dos reais para os reais positivos ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$), ela é uma função bijetiva – portanto, tem uma inversa. Chamamos a função inversa a função exponencial de **FUNÇÃO LOGARÍTMICA** e escrevemos:

$$\log_a n = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = n$$

Como os logaritmos são fundamentais para estudar fotometria e como é uma função que não tem correspondentes intuitivos muito óbvios, vamos nos deter um pouco mais aqui. A grande

¹Baskhara foi um matemático indiano, não foi ele quem deduziu esta fórmula, mas lhe atribuíram o nome como uma homenagem. Hoje em dia, entretanto, fórmulas e teoremas levam sempre o nome de seus descobridores.

²Ela possui raízes complexas. Um *número complexo* é um número da forma $(a + bi)$ onde a e b são números reais. O i é chamado de unidade imaginária e é definido de forma que $i^2 = -1$.

³Na verdade dizemos que ela possui uma raiz dupla, ou com multiplicidade dois. Tem a ver com o *Teorema Fundamental da Álgebra* assertar que um polinômio do n -ésimo grau possui n raízes complexas. Mas isso só é fato se considerarmos que possam existir raízes duplas, triplas, etc. A discussão é feita com mais detalhes no fim do Ensino Médio.

utilidade dos logaritmos é poder trabalhar diretamente com os expoentes das potências. Para explicar melhor, passemos ao grupo especial dos logaritmos decimais (os mais comuns):

$$\log_{10} n = x \Leftrightarrow 10^x = n$$

Quando escrevemos logaritmos decimais, não precisamos escrever o índice embaixo – podemos escrever apenas “log n ”. Assim, quando escrevemos que $1000 = 10^3$, podemos dizer, de forma alternativa, que $\log 1000 = 3$, o que quer dizer: o número a que precisamos elevar 10 para chegar a 1000 é 3. E não precisamos ficar restritos a expoentes inteiros: com uma calculadora podemos ver que dez elevado a 1,756 é 57, ou seja, que $\log 57 = 1,756$.

Isso facilita imensamente algumas operações. Imagine, por exemplo, que precisemos multiplicar dois números muito grandes; por exemplo, 145789 e 238965. Com a calculadora, descobrimos que $\log 145789 = 5,163$ e que $\log 238965 = 5,378$. Assim, podemos escrever a multiplicação dos dois números como:

$$145789 \times 238965 = 10^{5,163} \times 10^{5,378} = 10^{5,163+5,378} = 10^{10,541} = 3,47 \times 10^{10}$$

Fizemos a multiplicação apenas somando os expoentes! Mas isso é algo que já fazemos normalmente no colégio; o resultado de 10000×1000 tem sete zeros, porque 10000 tem quatro e 1000 tem três. Em outras palavras, $\log 10000 = 4$ e $\log 1000 = 3$; e portanto $10000 \times 1000 = 10^{3+4} = 10^7$. Escrevendo essas propriedades de modo mais formal, com funções exponenciais:

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v}$$

E, como $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$:

$$\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$$

Ou, na forma dos logaritmos (fazendo $x = a^u$ e $y = a^v$):

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad \text{e} \quad \log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

Podemos ver gráfico da função logarítmica na figura A.3

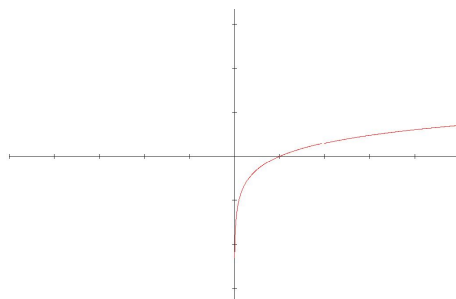


Figura A.3: Gráfico da função logarítmica.

Afora o motivo de facilitar os cálculos, o logaritmo é bastante importante do ponto de vista fisiológico. Os nossos sentidos operam logaritmicamente! É o que explica por que a escala de magnitudes (uma medida da impressão luminosa dos nossos olhos) é o logaritmo da escala de fluxos (uma medida do brilho emitido pelos objetos). Veja discussão mais detalhada em “Sistema de Magnitudes”, Volume IV.

A.2.3 Funções Trigonômétricas

As funções trigonométricas são as funções obtidas através das várias relações entre os lados e os ângulos do triângulo retângulo e a extensão dessas relações para qualquer ângulo através do círculo trigonométrico. Veja mais sobre essa extensão no apêndice de trigonometria(B).

As principais funções trigonométricas são as funções seno, co-seno e tangente. Ao estendermos essas funções percebemos que elas são periódicas, por exemplo $\sin(0) = \sin(2\pi) = \sin(4\pi) = \dots$. Essa idéia fica bastante evidente ao usarmos o círculo trigonométrico (ver apêndice B, para mais detalhes). Além disso sabemos que o seno e o co-seno sempre assumem valores entre -1 e 1 (incluindo-os) ou, falando em termos mais formais, apesar do domínio e do contradomínio dessas funções ser o conjunto de todos os números reais, sua imagem está restrita àquele intervalo de valores. Essas funções portanto são limitadas superiormente (por 1) e, ao mesmo tempo, limitadas inferiormente (por -1). Ou, de forma mais simples, limitadas.

- 1- A partir dos seus conhecimentos do ciclo trigonométrico (Apêndice B), desenhe os gráficos das funções $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x$. (Marque pontos correspondentes a ângulos cujo seno e co-seno você conheça bem, e intua o resto do gráfico)
- 2- As funções de primeiro grau são limitadas inferiormente? E superiormente? E as funções de segundo grau, são limitadas inferior ou superiormente? (Não esqueça das funções de segundo grau com coeficiente “a” negativo)

Justamente por serem periódicas, as funções trigonométricas são usadas para descrever movimentos periódicos. A posição de um pêndulo oscilante ao longo do tempo, a declinação do Sol ao longo do ano, fenômenos ondulatórios, *et cetera*. todos se parecem com a função seno ou co-seno, no sentido de se repetirem em intervalos regulares (após um ano a declinação do sol volta ao mesmo valor) e de serem limitadas (23,5 graus acima e abaixo do equador celeste).

A.3 Limite

Quando definimos velocidade, fizemos uma operação com a qual muitos de vocês não estão familiarizados: tomamos um limite. Essa operação é fundamental para o desenvolvimento e entendimento dos dois conceitos seguintes, os de derivada e de integral. Entretanto, toda a intuição sobre este conceito foi razoavelmente discutida naquele apêndice; faremos aqui um resumo rápido e simplificado, formalizando algumas idéias na passagem.

Tomemos a seguinte sequência numérica infinita: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ ou, mais formalmente, a sequência dos $\frac{1}{n}$ para todo n natural, ou, mais concisamente, a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Claramente, os termos da sequência vão diminuindo e aproximando de zero, mas nenhum dos termos da sequência é exatamente zero. Para isso serve o conceito de limite: dizemos que o limite dessa sequência, quando n tende ao infinito, é zero. Ou, usando notação matemática:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Só faltou ser um pouco mais formal: a idéia de “aproxima” e “tende” é vaga, precisamos de uma maneira mais clara de definir o limite de uma sequência. Faremos assim: escolha um número tão pequeno quanto você queira, mas maior que zero e eu posso te dizer um termo dessa sequência cuja distância ao limite seja menor que a do número que você disse. Ainda mais forte: todos os termos seguintes da sequência também estarão a uma distância menor que a do número que você escolheu. Voltando à nossa sequência, digamos que você tenha escolhido $0,001$. Bom, a partir do 1000° termo, todos os números estão a uma distância de zero menor do que essa –

$\frac{1}{1001}, \frac{1}{1002}, \dots$ estão mais próximos de zero do que $\frac{1}{1000}$. Se você escolhesse 0,000001 então eu poderia dizer que a partir do 1000000º termo todos os termos estão mais próximos de zero que 0,000001. Podemos levar essa discussão por quanto tempo quisermos e sempre será possível escolher um termo a partir do qual todos os seguintes estão suficientemente próximos do limite. Se isso é verdade (e é para a nossa sequência), então podemos dizer que o limite existe; no nosso caso, ele existe e vale zero.

A definição para funções é análoga. Tomemos como exemplo a função $f(x) = 2^x - 1$. Se formos tomando valores negativos de x , o termo 2^x será cada vez menor e o valor da função estará cada vez mais próximo de $0 - 1 = -1$. Sendo mais formais, vamos tomar uma sequência qualquer de valores de x decrescentes. Para essa sequência, é fácil observar que, para qualquer valor ε , mesmo o menor que imaginarmos, existe um x_p tal que todos os valores x menores que x_p darão um valor de cuja distância de -1 é menor que ε . Também não é difícil perceber que isso valerá para qualquer sequência decrescente que formos capazes de construir. Em outras palavras: se, para qualquer ε , existir um x_p a partir do qual $x < x_p$ significa a uma distância de L menor que ε ($|f(x) - L| < \varepsilon$), então podemos dizer com segurança que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

Definindo mais genericamente: Seja uma função $f(x)$ e um ponto x_0 (pertencente ao domínio de f , obviamente). Dizemos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Traduzindo: dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a x_0 , vale L se, para qualquer δ maior que zero, existir um ε maior que zero tal que, se módulo de $x - x_0$ é menor que δ , então módulo de $f(x) - L$ é menor que ε .

Em outras palavras, se para qualquer δ existe um ponto a partir do qual todo x suficientemente próximo de x_0 corresponde a um $f(x)$ a uma distância menor que ε a L , não importa quão pequena seja essa distância ε , então podemos dizer que, quando x tende a x_0 , $f(x)$ tende a L . É a versão formalizada do conceito de limite. Reflita.

A.4 Derivada

Tomemos como exemplo uma função que faz corresponder a cada instante t a posição $s(t)$ de um certo objeto. Consideremos então um $\Delta t = t_1 - t_0$, que corresponde a um $\Delta s = s(t_1) - s(t_0)$. Repare que, se a velocidade do objeto for constante, o gráfico da posição versus tempo dele será uma reta, cuja inclinação é dada pela razão $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Agora, entretanto, com o conceito de limite, podemos estender a definição de inclinação pra gráficos que não sejam retas. Partamos da nossa intuição física: se o gráfico da posição do nosso objeto é uma curva qualquer (que não seja uma reta), então sua velocidade varia durante o movimento. Mas podemos dizer, intuitivamente, que em cada instante, o corpo possui uma velocidade bem definida (se o corpo for um carro, essa velocidade aparecerá marcada no seu painel). E cada velocidade corresponde a uma inclinação do gráfico. O problema aqui é com a palavra “instante” não está muito bem definida.

Costumamos pensar num “instante de tempo” como um intervalo de tempo muito pequeno, o menor que conseguimos imaginar. Nesse intervalo muito pequeno, o pedaço de curva é tão pequeno que ele pode facilmente ser aproximado por uma reta. Em outras palavras, quanto menor o intervalo, mais próximo o pedaço de curva fica de um pedaço de reta; quando o intervalo tende a zero, a curva tende a uma reta, esta que, por sua vez, tem uma inclinação bem definida.

Assim, cada “instante”, cada ponto t no gráfico, possui um certo valor de inclinação, que possivelmente só vale para aquele ponto. Essa inclinação, graficamente, corresponde à inclinação da reta tangente que passa por aquele ponto (formalmente, a reta tangente de uma curva é a reta que mais fica parecida com a curva em intervalos muito pequenos). Mais precisamente, o limite

de $\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}$ quando t_1 tende a t_0 é a tangente da curva do gráfico no ponto t_0 ou, em outras palavras, a DERIVADA da função naquele ponto.

A notação contemporânea usual para derivada é a seguinte: $f'(x)$ é a derivada de f no ponto x . A definição que damos acima pode então ser escrita como

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ou, de outra forma:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

As idéias de derivada e integral (os conceitos fundamentais do assim chamado *cálculo infinitesimal* ou *cálculo diferencial* e integral) foram desenvolvidas independentemente, ao mesmo tempo, por Isaac Newton e Gottfried Leibniz. A *notação de Leibniz* para derivada é bastante intuitiva, e até hoje muito usada: $\frac{df(x)}{dx}$. Aqui o d representa um Δ que tende a zero; ademais, se escrevermos $y = f(x)$, temos $\frac{dy}{dx}$ como notação equivalente. A *notação de Newton* (colocar um ponto em cima da letra que representa a função) está mais diretamente associada ao desenvolvimento de suas idéias físicas; hoje ela só é usada para representar derivada de uma função *em relação ao tempo*. Assim, a velocidade daquele nosso objeto, no instante t pode ser escrita como $\dot{s}(t)$. Já a derivada da derivada da posição, ou a segunda derivada – a aceleração do corpo – pode ser facilmente indicada por $\ddot{s}(t)$.

O mais legal de ter uma definição formal de derivada é a facilidade de calcular a inclinação da curva para *qualquer* ponto do domínio, ou seja, para todos eles. Assim, da mesma maneira que uma função f tem um valor bem definido para qualquer x , também todo x corresponde a um valor bem definido de inclinação do gráfico, de derivada f' . Essa função é a *função-derivada* de f (e daí entendemos o nome). Podemos inclusive desenhar o gráfico da função-derivada; podemos também achar as inclinações neste gráfico, e encontrar a função-derivada-da-derivada, ou *derivada segunda*. Da mesma forma, podemos ter a derivada terceira, derivada quarta, etc.

- 3- Pense e conclua que a derivada de uma função linear é uma função constante; mais especificamente, $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$. Veja, assim, como o conceito de inclinação de uma reta é um caso particular do conceito de derivada.

Para encerrar o assunto, apliquemos a segunda definição que demos para calcular a derivada de duas funções especiais:

(a) $f(x) = x^2$

Temos que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Expandindo o quadrado e cancelando dois termos, ficamos com

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h)$$

Nesta forma, fica muito fácil saber qual o limite, já que, quando $h \rightarrow 0$ e $2x \rightarrow 2x$. Assim, nossa função derivada tem a forma $f'(x) = 2x$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$

Aqui,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

Colocando as frações na mesma base, obtemos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)}$$

Novamente podemos calcular o limite com alguma facilidade, obtendo:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

E isso é só o começo; querendo se divertir mais, pegue um livro de cálculo diferencial.

- 4- Se um móvel descreve uma trajetória que tenha a forma $s(t) = at^2 + bt + c$, como se comporta a velocidade $\dot{s}(t)$ desse móvel? E sua aceleração $\ddot{s}(t)$? Dê uma interpretação física para os coeficientes a , b e c .
- 5- Pensemos em um corpo que esteja submetido a uma força $F = F(x)$, que só dependa da sua posição. Conforme o corpo se locomove, o valor de F sobre o corpo muda, assim como o valor correspondente da energia potencial associada àquela força. Sendo mais específico, a força F pode ser considerada a derivada da energia em relação à posição do corpo com o sinal invertido, ou $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$. (Para mais detalhes, leia o capítulo 10). Sendo assim, qual a forma da energia potencial gravitacional para um corpo qualquer a uma distância R da Terra?

A.5 Integral

Para calcular a variação da posição de um corpo através do gráfico de velocidade *versus* tempo, calculamos a área embaixo da curva do gráfico. Esse processo chama-se *integrar* uma função. Mas antes faremos uma breve discussão do conceito de área.

A área de quadrados é a princípio a área mais óbvia de se medir, afinal, medimos áreas em “unidades quadradas”. Esticando um quadrado, obtemos a área de um retângulo; inclinando lados paralelos do retângulo, conseguimos calcular a área de paralelogramos quaisquer; dividindo os paralelogramos ao meio, conseguimos calcular facilmente a área de triângulos. De todos os outros polígonos podemos calcular suas áreas decompondo-os sucessivamente, até chegarmos a paralelogramos e triângulos. Mas se tivermos uma curva? Por menor que sejam os retângulos e triângulos com que a decompomos, sempre estaremos fazendo uma aproximação, mais ou menos grosseira, da área compreendida pela curva.

Aí é mais um momento em que a idéia de limite torna-se essencial. Digamos que podemos usar folhas de papel quadriculado, com quadrados todos iguais, do tamanho que quisermos. Desenhamos a curva sobre essa folha. Vamos chamar de L a área somada de todos os quadrados que estão completamente dentro da curva e de U a área de todos os quadrados que tem alguma parte sua no interior daquela. Chamando de S a área compreendida pela curva, cujo valor desejamos saber, é fácil notar que L é menor que S , mas que U é maior que S . Contudo, quanto

menor for o quadriculado do papel, mais próximo U e L ficam de S . Mas nunca chegaremos exatamente à área da curva; U sempre vai ser maior, L sempre vai ser menor. Mas pra qualquer papel quadriculado para os quais calculemos U_n e L_n , sempre podemos usar quadriculados menores, para os quais U_m será menor que U_n e L_m será maior que L_n . Aqui temos algo que obedece exatamente à nossa definição de limite; o limite de U e L quando as áreas dos quadrados tendem a zero é a área da curva!

O uso desse método, o MÉTODO DA EXAUSTÃO, para calcular áreas de formas curvas, remonta à Antiguidade Clássica, a partir de Eudoxo e bastante desenvolvido por Arquimedes. Contudo, para gráficos, a idéia é bem mais recente – em especial, de depois que os gráficos foram inventados. É outra das idéias que opera claramente nos raciocínios de Isaac Newton no *Principia*.

Não vamos fazer aqui uma definição formal de integrais, o que gastaria muitas páginas. Isso pode ser visto em qualquer bom livro de Cálculo ou de Análise Real; querendo, pergunte a um membro do CCD. Basta um esboço geral: se queremos a área de uma função no intervalo $[a, b]$, o primeiro passo é marcar n pontos no interior do intervalo que, junto com a e b , define $n + 1$ retângulos (formalmente, chamamos isso de partição do intervalo). Podemos definir a altura desses retângulos de várias formas – usaremos duas: uma delas é considerando como altura de cada retângulo o maior valor da função dentro de tal retângulo (estimando “por cima”, portanto) e a outra, o menor valor dentro de cada retângulo (estimando “por baixo”). A primeira soma chamaremos de U_n ; a segunda, de L_n . Chamamos de integral superior o $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ e de integral inferior o $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$. Se a integral superior e inferior forem iguais, ou seja, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = S$$

Então dizemos que aquela função é *integrável* no intervalo $[a, b]$ e que a integral é igual a S .

Não vamos demonstrar também, mas integrar é a operação inversa de derivar. Se f' é a função derivada de f , então f é a função integral de f' . A princípio não é um resultado nada óbvio: o que calcular tangentes de curvas tem a ver com calcular as áreas abaixo dessas curvas? Entretanto, se pensarmos na interpretação física de posições e velocidade, a associação fica bem mais evidente. A conclusão de que a derivada é o inverso da integral é conhecida como TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO. A aplicação prática mais óbvia é usar as fórmulas calculadas para derivadas de funções conhecidas para, retroativamente, calcular integrais de outras funções conhecidas.

6- Se o leite é derivado da vaca, por que o leite integral não é a vaca inteira?

Para terminar, vamos fazer o exercício 5 pela sua operação inversa: vamos pegar o gráfico da força gravitacional F pela distância x , e calcular a área embaixo dele – sua integral. Calculando a área a partir de $x = R$, até infinito, teremos o valor do trabalho necessário para levar a partícula de R até uma distância infinita; em outras palavras, teremos a diferença entre a energia potencial gravitacional no infinito e esta energia à distância R . Usando a definição usual, tomando a energia potencial como valendo zero no infinito, só precisamos trocar o sinal do trabalho para termos uma forma geral para a energia potencial gravitacional.

Na figura A.4, temos o gráfico de uma função do tipo $F(x) = \frac{k}{x^2}$, onde k é uma constante qualquer – no nosso caso, $k = GMm$. Vamos aproximar a área abaixo do gráfico pela área de pequenos retângulos. O primeiro retângulo começa no nosso valor pré-fixado R e vai até Rq , onde q é um número real qualquer (só precisa ser maior que 1). O segundo retângulo, mais largo, começa em Rq e termina em Rq^2 ; o terceiro vai de Rq^2 a Rq^3 . Assim, o retângulo $n + 1$ vai de Rq^n a Rq^{n+1} . Repare que os retângulos podem ser de qualquer largura arbitrária; estes foram cuidadosamente selecionados para facilitar as contas à frente. O importante é que estamos tomando como altura de cada retângulo o valor da função no ponto mais à

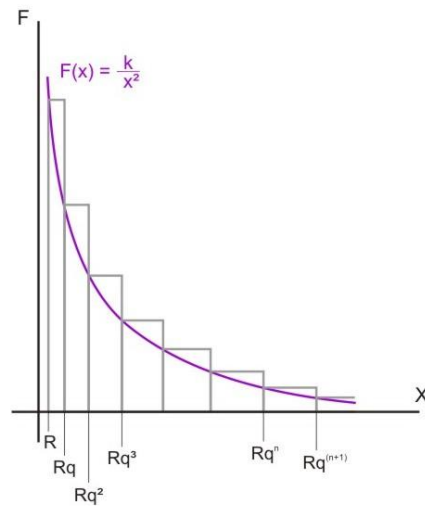


Figura A.4: Gráfico da função $F(x) = \frac{k}{x^2}$.

esquerda dele, como está na figura. Assim, a altura do primeiro retângulo é k/R^2 ; do segundo, $k/(Rq)^2$; do $n+1$ é $k/(Rq^n)^2$. Deste modo, a área dos retângulos tem a forma:

$$s_{n+1} = \frac{k}{R^2 q^{2n}} \cdot [Rq^{n+1} - Rq^n] = \frac{k(q-1)}{Rq^n}$$

Somando todas as áreas dos retângulos, obtemos uma aproximação para a área abaixo do gráfico:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} s_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(q-1)}{Rq^n}$$

Repare que essa soma na verdade é a soma de uma progressão geométrica⁴, que tem $k(q-1)/R$ como termo inicial e $1/q$ como razão. Aplicando então a conhecida fórmula, temos:

$$S = \frac{k(q-1)}{Rq} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{k(q-1)}{Rq} \cdot \frac{q}{q-1} = \frac{kq}{R}$$

E assim temos uma primeira aproximação para a área que queremos calcular. Agora vamos melhorá-la. Repare que, quanto menor for o número q que escolhermos, menor será a largura de cada retângulo. No limite em que q tende a 1, a espessura dos retângulos tende a zero e a área somada de cada um deles tende à área do gráfico. Assim:

$$W = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{kq}{R} = \frac{k}{R}$$

Com isso, temos para a energia potencial gravitacional à distância R :

$$U = -\frac{GMm}{R}$$

Como queríamos demonstrar.

⁴Se não souber o que é progressão geométrica, pesquise ou pergunte ao professor de matemática mais próximo.

Apêndice B

Trigonometria

Daqui a oitenta anos, numa noite chuvosa, enquanto relembrares teus tempos de aprendiz, constatarás que já esqueceste tudo, menos o Teorema de Pitágoras. Nas lembranças obscuras e nebulosas (o que eram mesmo as nebulosas?) uma fórmula aparecerá clara e límpida: $a^2 + b^2 = c^2$. Somente isso e nada mais.

Sim, ninguém esquece jamais o Teorema de Pitágoras. Nunca mais .

B.1 Teorema de Pitágoras

A primeira vez que você ouviu a palavra “teorema” provavelmente foi acompanhada de “de Pitágoras”. O teorema nos diz que “o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos”¹.

Esse é certamente um dos teoremas fundamentais de toda a geometria e matemática em geral. Portanto, nada mais conveniente que começar o apêndice com duas demonstrações dele. Uma geométrica, a que Euclides fez na sua grande obra *Elementos*², e uma algébrica.

B.1.1 Demonstração de Euclides

Observe primeiro que os triângulos ABC , ACD e BCD são semelhantes (figura B.1). Observe também que $\beta = b^2$, $\alpha = a^2$ e $\gamma + \delta = c^2$. Se tivéssemos $\gamma = \alpha$ e $\beta = \delta$ poderíamos concluir que $\alpha + \beta = \gamma + \delta \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$. Portanto mostraremos que $\gamma = \alpha$ e $\beta = \delta$.

Como os triângulos são semelhantes temos que $\frac{AD}{b} = \frac{b}{c}$ portanto $AD \cdot c = b^2$ como $AD \cdot c = \delta \Rightarrow \beta = \delta$. De maneira semelhante temos que $\frac{BD}{a} = \frac{a}{c}$ e portanto $BD \cdot c = a^2$, $BD \cdot c = \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$. Provamos portanto que $a^2 + b^2 = c^2$ Q.E.D.

■

¹Hipotenusa de um triângulo retângulo é o seu lado oposto ao ângulo reto (o maior lado). Os *catetos* são os outros dois.

²*Elementos* é um tratado matemático e geométrico formado por 13 livros escritos pelo matemático grego Euclides, em cerca de 300 a.C., na cidade de Alexandria. É um conjunto de definições, axiomas, proposições (teoremas e construções) e provas destas proposições.

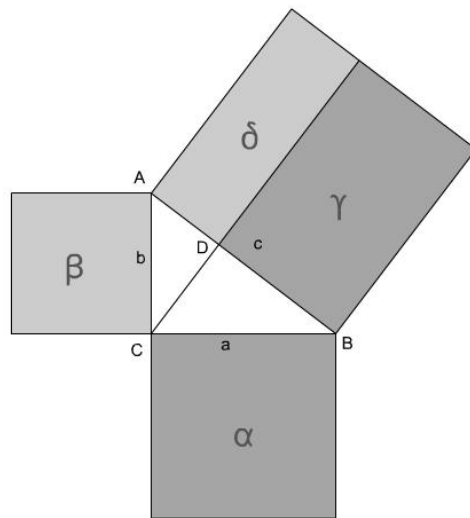


Figura B.1: Triângulo retângulo com quadrados em cada um de seus lados.

B.1.2 Outra demonstração

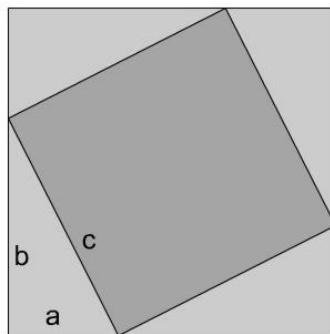


Figura B.2: Um quadrado menor dentro de um quadrado maior.

A área do quadrado maior é obviamente igual a $(a + b)^2$ (figura B.2). Se somarmos então as áreas dos quatro triângulos com a do quadrado menor devemos encontrar o mesmo valor. Portanto $4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 = (a + b)^2$, expandindo a expressão a direita temos $2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$, cancelando os termos, $c^2 = a^2 + b^2$. Q.E.D.

■

Essa segunda demonstração está incompleta por que não provamos que é realmente possível fazer um quadrado menor dentro de um maior como na figura. Isso deixamos para você, leitor. Existem diversas outras demonstrações do teorema de Pitágoras e varias coletâneas delas. Pesquise na internet outras e tente fazer a sua! Se você já conhece a lei dos cossenos, nem pense em usá-la na demonstração. Vale lembrar que a demonstração da lei dos cossenos usa o Teorema de Pitágoras e provar um usando o outro leva a um raciocínio circular.

O teorema de Pitágoras nos deu uma relação simples entre os lados de uma figura geométrica igualmente simples. Nisto reside sua principal utilidade: sempre que quisermos encontrar outras

relações em figuras mais complexas podemos decompô-la em triângulos retângulos e aplicar os teoremas e regras que veremos nesse apêndice.

Uma questão que pode surgir é: Será que a recíproca do teorema é verdadeira? Provamos que, para qualquer triângulo retângulo, temos que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Mas será que um triângulo cujo quadrado do maior lado é igual à soma dos quadrados dos lados menores é um triângulo retângulo? A resposta é sim (tente provar), mas não é tão óbvia quanto pode parecer. Um problema geométrico simples onde a recíproca não é verdadeira é o seguinte: Todo quadrado tem todos os ângulos iguais a 90° , mas nem todo quadrilátero com ângulos iguais a 90° é um quadrado.

B.2 Seno, Cosseno, Tangente e Co-Tangente

No estudo da geometria, frequentemente temos que decompor figuras em outras mais simples para podermos deduzir suas propriedades. O triângulo retângulo aparece quase sempre. Assim falaremos das funções (as funções trigonométricas).

Vale aqui relembrar a condição fundamental de semelhança³ de triângulo. Um triângulo é semelhante a outro se, e somente se, seus ângulos são iguais. Como a soma dos ângulos é 180° , basta que dois ângulos sejam iguais e o terceiro também será. Para o triângulo retângulo ainda sabemos que um dos ângulos certamente vale 90° , então basta que exista um outro ângulo igual para garantirmos a semelhança. Outra característica de figuras semelhantes é manter as razões entre os lados correspondentes iguais, não importando o quanto a figura seja maior ou menor que outra.

Se já podemos dizer que dois triângulos retângulos são semelhantes se existir apenas um ângulo igual (além do ângulo reto) podemos fazer algumas funções que relacione uma série de grandezas características de um triângulo retângulo a um ângulo. Em triângulos semelhantes, as proporções entre os lados são sempre as mesmas, isto é, se aumentamos um lado, os outros devem aumentar na mesma proporção. Assim, podemos buscar grandezas lineares (que não são medidas em ângulos) que caracterizam os ângulos de um certo triângulo, investigando as razões entre os lados dos triângulos.

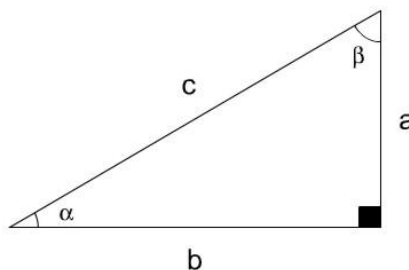


Figura B.3: Um triângulo retângulo.

Vamos chamar de seno⁴ a razão entre o cateto oposto a um ângulo e a hipotenusa do triângulo

³Do ponto de vista intuitivo, triângulos são semelhantes quando possuem a mesma “forma”, quando todos os lados mantêm as mesmas proporções entre si, seja a figura maior ou menor. Um triângulo que, por exemplo, tenha seus lados iguais a 3, 4 e 5 cm (isso é um triângulo retângulo! Prove!) é semelhante a outro que tenha lados medindo 6, 8 e 10, que também é semelhante a um de lados 9, 12 e 15, etc.

⁴A origem da palavra seno é um tanto confusa. Ela vem da palavra latina sinus que pode significar dobra ou baía. A palavra árabe para baía é jaib; mas os tradutores europeus leram errado, porque a palavra usada para o seno era

retângulo. Portanto o seno de α (ver figura B.3) é $\frac{a}{c}$ e o seno de β é $\frac{b}{c}$. Convencionou-se abreviar seno para “sen”. Então temos $\text{sen}\alpha = \frac{a}{c}$ e $\text{sen}\beta = \frac{b}{c}$.

Chamamos de co-seno ou cosseno, abreviado para “cos”, a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa. Portanto $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ e $\cos\beta = \frac{a}{c}$. Nesse ponto percebemos uma coisa interessante $\text{sen}\alpha = \cos\beta$ e equivalentemente $\cos\alpha = \text{sen}\beta$, o que esclarece o nome: o cosseno de um ângulo é o seno de seu ângulo complementar! Portanto, apenas sabendo o seno e cosseno de um ângulo já temos bastante informação sobre o triângulo.

Uma outra conclusão interessante acontece se somarmos o quadrado do seno com o quadrado do cosseno de um mesmo ângulo:

$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Essa é a **RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA**:

$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$$

Repare que essa equação nada mais é que o Teorema de Pitágoras formulado na linguagem dessas grandezas lineares que caracterizam os ângulos.

Por último, podemos destacar a razão entre o cateto oposto e o adjacente a um ângulo. Essa razão é chamada de tangente e é abreviada por “tan” ou “tg”, assim temos $\tan\alpha = \frac{a}{b}$. Podemos considerar a razão inversa também que é chamada de cotangente (abreviada “cotg” ou “cot”) $\cot\alpha = \frac{b}{a}$. Uma conclusão bastante evidente é que $\tan\alpha = \cot\beta$ e $\cot\alpha = \tan\beta$.

7- Mostre que $\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Repare que a caracterização é única: Cada ângulo corresponde a uma família de triângulos retângulos (todos semelhantes) e, portanto, é unicamente determinado pelo seu seno ou pelo cosseno, ou tangente. . . Essas grandezas lineares serão bastante úteis ao manusearmos com seus ângulos associados: certas operações não podem ser realizadas com grandezas angulares (multiplicação de ângulos, por exemplo). Mais exemplos de operações com grandezas lineares associadas a angulares serão vistas no apêndice C, sobre vetores.

Vimos até agora as principais funções trigonométricas, relacionando um ângulo ao seu seno, cosseno ou tangente. Mas podemos também pensar numa relação oposta, relacionar o seno a um ângulo e também o cosseno e a tangente a um ângulo. Pesquise em livros e/ou na internet (a Wikipedia em inglês é uma ótima fonte) sobre funções inversas. Denominamos então arco-seno (arcsen), arco-cosseno (arccos) e arco-tangente (arctg) as funções inversas do seno, cosseno e tangente respectivamente.

Sabemos então a definição das principais funções trigonométricas mas resta um problema. Dado um ângulo conhecido, como podemos saber o seu seno ou cosseno? Isso não é uma tarefa fácil, na verdade na maioria dos casos temos que nos contentar com aproximações. Porém para alguns ângulos podemos chegar aos valores através de figuras que conhecemos as propriedades.

- 8- Usando o triângulo equilátero e o quadrado, calcule o seno, o co-seno e a tangente dos ângulos de 30° , 45° e 60° . Pense também qual deveria ser os valores para ângulos de 0° e 90° se pudéssemos construir triângulos retângulos com esses ângulos. Use seus conhecimentos de geometria e tente calcular as funções para outros ângulos.

jiba (na escrita árabe as vogais não são escritas; isso deve ter originado a confusão). Jiba, por sua vez, foi um termo importado pelos árabes da matemática hindu, onde a noção foi criada. O termo em Sânscrito é “ardha-jiva”, meia-corda. Na linguagem da geometria, uma corda é um segmento qualquer que una dois pontos de uma circunferência. Assim, toda meia-corda é o seno de algum ângulo (com o círculo trigonométrico, mais abaixo, isso vai ficar mais claro).

B.3 Círculo Trigonométrico e a extensão das funções trigonométricas

Imagine que sobre uma mesma reta façamos vários triângulos retângulos cujas hipotenusas têm o mesmo tamanho. Por conveniência, vamos dizer que o tamanho da hipotenusa é 1. Assim o tamanho do cateto na vertical terá o mesmo valor que o seno e o cateto na horizontal, o do co-seno. A figura resultante pode ser vista na figura B.4.

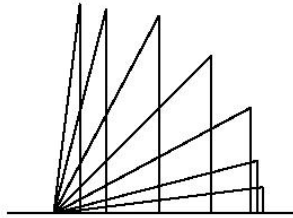


Figura B.4: Vários triângulos retângulos com a hipotenusa igual a 1.

Observe que os vértices que não estão na base deverão se distribuir ao longo de um círculo, afinal eles estão equidistantes de um mesmo ponto. Assim poderemos fazer uma construção importante, um círculo cuja projeção de um ponto numa reta vertical indica um seno e na reta horizontal o co-seno.

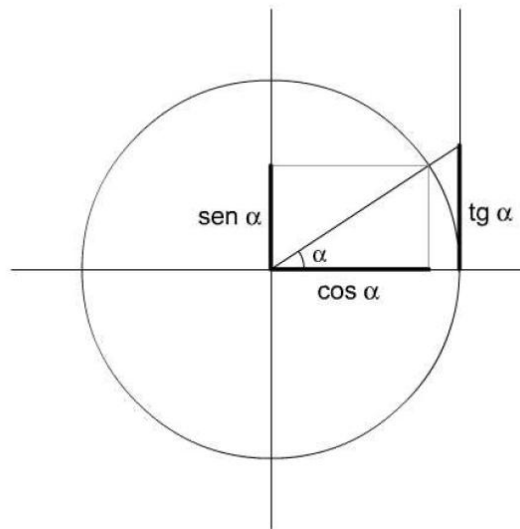


Figura B.5: O círculo Trigonométrico.

Esse círculo é chamado de CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO. Observe que a partir dele não dependemos mais do triângulo retângulo para definirmos as funções trigonométricas. Podemos pensar no seno como a projeção no eixo vertical, o cosseno como a projeção no eixo horizontal e a tangente como a extensão na reta tangente (daí o nome) do raio.

- 9- Mostre que a extensão do raio na reta tangente equivale a razão $\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$, lembre-se que o raio do círculo é 1.

Mas qual seria a vantagem de mudarmos a definição? Repare que no círculo, podemos escolher o ângulo α maior que 90° , na verdade podemos escolher um ângulo maior que 360° e que, portanto daria mais de uma volta. Podemos pensar num ângulo que vai no sentido oposto (sentido horário) e considerarmos como um ângulo negativo.

Aprendemos que distâncias são sempre positivas, mas seria interessante pensarmos que quando a projeção que gera o seno ficar abaixo do centro, poderíamos dizer que o seno é negativo. Da mesma maneira a projeção do cosseno à esquerda do centro seria considerada negativa.

- 10- Mostre que a Relação Fundamental da Trigonometria continua valendo quando estendemos nossa definição de seno e cosseno para ângulos maiores que 90° . Estenda a tabela feita anteriormente e inclua os ângulos de 90° , 120° , 135° , 150° , 180° , 225° , 270° e 330° .

B.4 Lei dos Cossenos

A partir do Teorema de Pitágoras e com a extensão das funções trigonométricas para qualquer ângulo podemos chegar a uma relação em trigonometria bastante útil: a chamada LEI DOS COSENOS. Seja um triângulo qualquer de lados a , b e c , e seja A o ângulo oposto ao lado A , como o da figura B.6

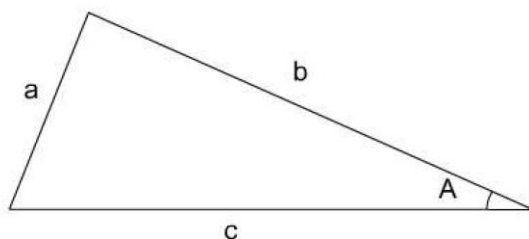


Figura B.6: Um triângulo de lados a, b e c .

Para qualquer triângulo vale a relação

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Com isso, o comprimento de um lado qualquer de um triângulo pode ser calculado se conhecermos os outros dois lados e o ângulo entre eles.

B.4.1 Demonstração

Sabemos que o Teorema de Pitágoras só funciona para triângulos retângulos, então, como proceder, já que queremos uma lei que atue em qualquer triângulo? Vamos usar aqui um truque bastante usado quando se trata de geometria: “recortamos” o nosso triângulo qualquer em vários triângulos retângulos! (que pode ser visto na figura B.7)

Fixando-nos no triângulo do lado direito, temos que $h = b \sin A$ e $c_1 = b \cos A$. Por outro lado, usando o Teorema de Pitágoras no triângulo do lado esquerdo,

$$a^2 = c_2^2 + h^2 = (c - b \cos A)^2 + (b \sin A)^2$$

$$a^2 = c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A + b^2 \sin^2 A$$

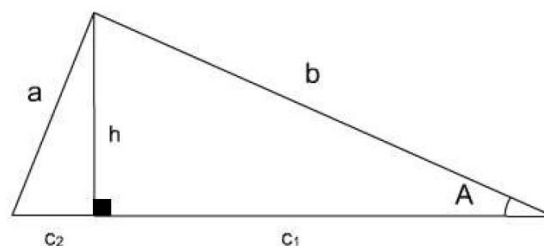


Figura B.7: O mesmo triângulo da figura B.6, separado em dois triângulos retângulos.

Sabemos pela relação fundamental que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. Assim, colocando o b em evidência:

$$a^2 = c^2 - 2bc \cos A + b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$$

■

- 11- Vista da Terra, Sírius está separada de Alfa Centauri por cerca de 150° . Sírius está a cerca de 8,6 anos-luz e Alfa Centauri a cerca de 4,3 anos-luz. Calcule a distância de Alfa Centauri a Sírius. Não use a calculadora para calcular o seno ou cosseno dos ângulos envolvidos, usando apenas o círculo trigonométrico e as funções calculadas para outros ângulos nos exercícios anteriores. Calcule também o cosseno do ângulo que separa o Sol de Alfa Centauri visto por um observador em Sírius.

B.5 Radianos

Estamos acostumados a usar o sistema de graus para medir ângulos. Essa herança vem desde a Babilônia. Apesar de uma circunferência de 360° ser bastante útil, pois é divisível por todos os naturais até seis, existe uma outra medida que se mostra mais útil quando lidamos com situações mais avançadas. A medida em radianos é considerada a medida natural de ângulo e ela aparece freqüentemente em astronomia e física além de ser bem mais utilizada em cálculo diferencial.

Vamos primeiro à definição. Definimos um radiano como sendo o ângulo tal que o comprimento do arco correspondente seja igual ao raio do círculo (ver figura B.8).

Logo percebemos que uma circunferência tem no total $2\pi^5$ radianos. A primeira vantagem que temos ao usar essa unidade é convertemos um ângulo no comprimento do arco correspondente. Assim a simples fórmula relaciona comprimento e ângulo: $c = r\alpha$ onde c é o comprimento, α o ângulo e r o raio da circunferência.

- 12- Mostre que toda circunferência realmente tem 2π rad de ângulo.

A conversão de graus para radianos é bastante simples, basta usarmos a regra de três. Se tivermos um ângulo x em graus e quisermos encontrar o correspondente y em radianos fazemos

⁵A letra grega π (pronuncia-se “pi”) é o símbolo de um dos números mais importantes da matemática. Ele representa a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro. Assim $\pi = \frac{\text{perímetro}}{\text{diâmetro}}$. Ele é um número irracional, ou seja, não existe dois números inteiros tal que o resultado da divisão deles seja π . Por ser irracional ele guarda uma propriedade estranha, ele tem infinitas casas decimais, mas nunca se repete! O valor aproximado dele é 3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944...

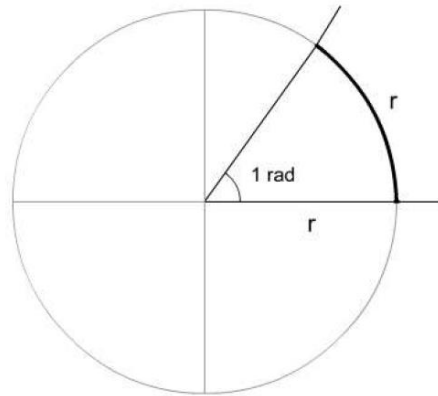


Figura B.8: Um radiano.

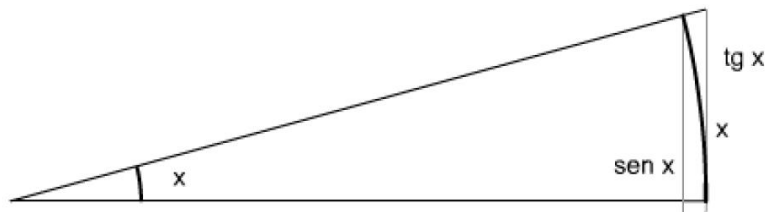
$$\frac{x^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{y}{2\pi} \rightarrow y = \frac{x^{\circ}\pi}{180^{\circ}}$$

O inverso, de radianos para grau, é encontrado da mesma maneira

$$\frac{x^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{y}{2\pi} \rightarrow x^{\circ} = \frac{y180^{\circ}}{\pi}$$

Assim, para compararmos as unidades, basta pensarmos que $1\text{rad} \approx 57,3^{\circ}$.

Com o sistema de radianos podemos desenvolver uma aproximação bastante importante também. Para ângulos pequenos vale $\text{sen } x \approx x \approx \tan x$. Essa aproximação fica bastante evidente se fizermos um “zoom” num ângulo pequeno do círculo trigonométrico (figura B.9).

Figura B.9: O comprimento do arco, o seno e a tangente para um ângulo x pequeno.

Percebemos, da figura, que $\text{sen } x \leq x \leq \tan x$ como $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$ temos que $\text{sen } x \leq x \leq \frac{\text{sen } x}{\cos x}$ quando $\cos x \approx 1$ podemos afirmar que $\text{sen } x \approx x \approx \tan x$.

Uma aplicação dessa relação pode ser vista no capítulo sobre paralaxe. Como o ângulo da paralaxe das estrelas é de no máximo $0,00000364$ rad, o erro ao fazermos a aproximação é de $0,00000000022\%$! Para se ter uma idéia o erro só ultrapassa 5% em ângulos maiores que 15° .

Apêndice C

Vetores

Já deve ter dado para perceber que algumas grandezas físicas não são suficientemente descritas em termos de números. Imagine-se no meio de um descampado, procurando um tesouro; a única informação que você tem é “ande dez metros”. Claramente, essa informação sozinha não lhe faz achar o tesouro. Usemos um outro exemplo: suponhamos que sua escola fique a um quilômetro de sua casa. Mas é claro que, se você andar um quilômetro em qualquer direção, não chegará em sua escola. Para chegar lá, você precisa “apontar” para a sua escola e deslocar-se um quilômetro na direção em que apontou.

Se fossemos bastantes metódicos ao descrevermos o caminho para a escola, teríamos que passar por três etapas:

- O quanto precisa ser andado? 1 km
- Em que direção? Na da reta que ligue sua casa a escola.
- Em que sentido? No sentido casa-escola.

Para este tipo de situação existe o conceito de vetor. Graficamente, um vetor pode ser representado com uma simples setinha (vide figura C.1).

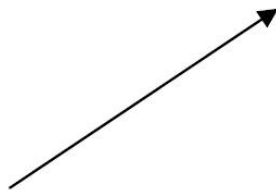


Figura C.1: Representação gráfica de um vetor.

Repare que, ao contrário de um simples número, um vetor carrega três informações importantes. A primeira é o **MÓDULO**, que é seu comprimento, o seu tamanho. No exemplo da escola, estávamos usando um *vetor-deslocamento*, cujo módulo era um quilômetro. A segunda é a **DIREÇÃO**, que é a reta onde ele está contido - no nosso exemplo, a reta que liga sua casa à escola.

Além disso, apesar do que possa parecer, só essas duas não são suficientes para descrever um vetor. Se traçássemos *uma reta* ligando sua casa a escola e deslocássemos um quilômetro partindo de sua casa, poderíamos ainda seguir dois caminhos. Em um chegaríamos na escola; no outro, nos afastaríamos dela. Assim, mais que um segmento de reta, um vetor tem que ser um segmento de reta *orientado*, que tenha um **SENTIDO** em que se deve percorrê-lo. No nosso caso, o

sentido é o casa-escola (não o escola-casa). Um metrô ilustra bem o que significa orientação; só existe uma linha, um caminho possível; ele pode ser percorrido no sentido norte ou no sentido sul, Jabaquara ou Tucuruvi, Saens Peña ou Cantagalo.

Agora já podemos generalizar a idéia e pensar quais grandezas físicas são **GRANDEZAS VETORIAIS**, ou seja, precisam de vetores para serem descritas. Já vimos que *deslocamento* é uma. *Velocidade* é outra, afinal precisamos indicar para onde um corpo caminha. *Aceleração* e, portanto, *força*, também, pelos mesmos motivos. Afinal, quando queremos afastar um sofá da parede, não basta aplicarmos uma força, temos que aplicá-la no sentido oposto ao da parede.

Ainda sim, sobraram grandezas que não precisam de vetores. São as denominadas **GRANDEZAS ESCALARES**. O *tempo*, a *massa*, a *carga eletromagnética* das partículas, são todos exemplos de grandezas escalares.

C.1 Operações com vetores

Assim como com números, podemos fazer uma série de operações com vetores. Três operações serão bastante usadas no estudo de mecânica: soma de vetores, subtração de vetores e multiplicação de vetores por números.

Começemos pela terceira. Imagine dois corredores na reta final de uma maratona. Os dois estão correndo desesperadamente pelo primeiro lugar e para felicidade geral não existem irlandeses dispostos a perturbar a corrida. Os dois estão juntos, a mesma velocidade. Com um olhar físico, veremos dois corpos e seus respectivos vetores velocidades juntos. Repare que os vetores são iguais¹, pois possuem o mesmo módulo (velocidades iguais), mesma direção (reta final) e sentido (para a linha de chegada!).

De repente, um corredor dobra de velocidade, numa tentativa desesperada de vencer a corrida. Analisando o vetor velocidade, perceberemos que sua direção continua a mesma (reta final) e o sentido também não mudou (para a linha de chegada). Mas seu módulo dobrou! Se antes ele vinha a 4m/s, agora está a 8m/s.

Quando dizemos que ele dobrou a velocidade, queremos dizer que seu vetor velocidade foi multiplicado por uma grandeza escalar, o número 2. Multiplicar um vetor por uma grandeza escalar significa esticá-lo ou encurtá-lo, mas sempre mantendo a mesma direção! Quanto ao sentido, ele pode ser invertido, caso multipliquemos por um número negativo. Podemos visualizar graficamente essa operação na figura C.2.

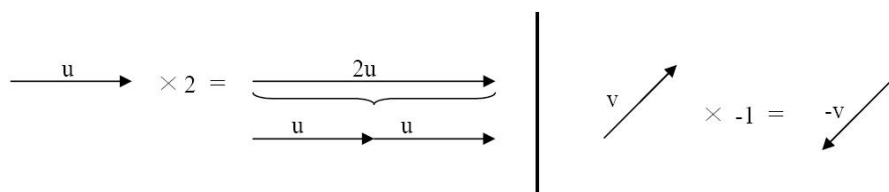


Figura C.2: Representação gráfica da multiplicação de um vetor por um número.

De maneira semelhante, podemos dividir vetores por grandezas escalares (o que equivale a multiplicar por frações). Repare que, ao dividirmos ou multiplicarmos um vetor por uma escalar, obtemos outro vetor como resultado. Isso explica por que velocidade é uma grandeza vetorial: É a divisão de um vetor-deslocamento (Δs) por um intervalo de tempo (Δt – um escalar). Da mesma forma, dividindo a variação da velocidade por um intervalo de tempo, vemos que aceleração é uma grandeza vetorial. Finalmente, forças também são vetoriais, porque são aceleração (vetor) multiplicada por massa (escalar).

¹Dois vetores são iguais se possuem o mesmo módulo, direção e sentido. Não importa onde são aplicados.

Mas passemos ao caso da soma e subtração. Nem sempre podemos ir de um lugar a outro traçando uma reta que ligue os dois pontos e seguindo por ela. Para percorrer 1 km de sua casa à escola, talvez seja necessário seguir 800 metros para norte e depois 600 metros para leste. Ou, se você vive no meio de uma grande cidade, talvez tenha que seguir em frente, virar a direita, depois à esquerda, passa dois quarteirões, esquerda, primeiro retorno e chegou.

Também podemos analisar essas situações mais intrincadas com vetores. A idéia é que, somando todos os pequenos vetores, conseguiremos ligar o ponto de partida ao final. Somar vetores algebricamente exige algum conhecimento de álgebra linear, mas graficamente é bem simples, como pode ser visto na figura C.3, tanto para o caso de dois vetores quanto para mais de dois.

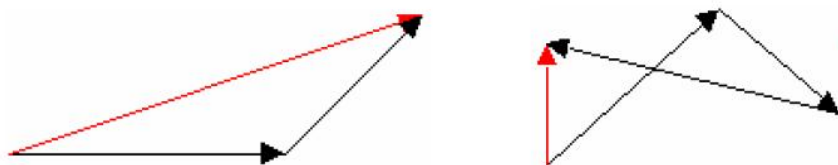


Figura C.3: Representação gráfica da soma de dois vetores (esquerda) e de mais de dois vetores (direita).

Assim, voltando ao penúltimo exemplo, se sua trajetória for 800 m para o norte, seguidos de 600 m para o leste, o vetor resultante será o verde, da figura C.4 e seu módulo pode ser calculado facilmente pelo Teorema de Pitágoras (exercício!). Considerando esse triângulo múltiplo do triângulo 3-4-5, obtemos que o módulo é de fato a distância da escola: 1000 m = 1 km.

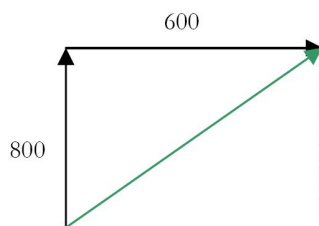


Figura C.4: Representação gráfica do caminho do exemplo, feito com a soma de dois vetores.

A subtração de vetores é análoga à soma. Basta lembrarmos que, ao subtrair um número, estamos em outras palavras, somando “menos o número”.

$$a - b = a + (-b)$$

Se multiplicar um vetor por um número negativo é mudar o seu sentido, multiplicar por -1 é simplesmente invertê-lo. Com isso, podemos transformar a subtração numa soma, como pode ser visto na figura C.5

Somar e subtrair vetores que tenham a mesma direção é ainda mais fácil, como pode ser visto na figura C.6

Nesta situação, pensar em forças também é bastante elucidativo (pense em pessoas puxando uma corda). De fato, a soma de vetores é particularmente útil quando analisamos as forças agindo sobre um corpo. Sabemos que a aceleração depende da força resultante; para a descobriremos, portanto, temos que somar todas as forças que agem sobre um corpo.

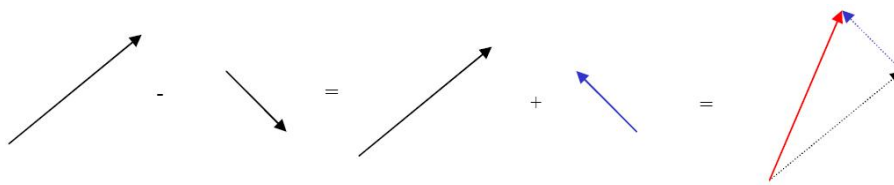


Figura C.5: Representação gráfica da subtração de vetores.

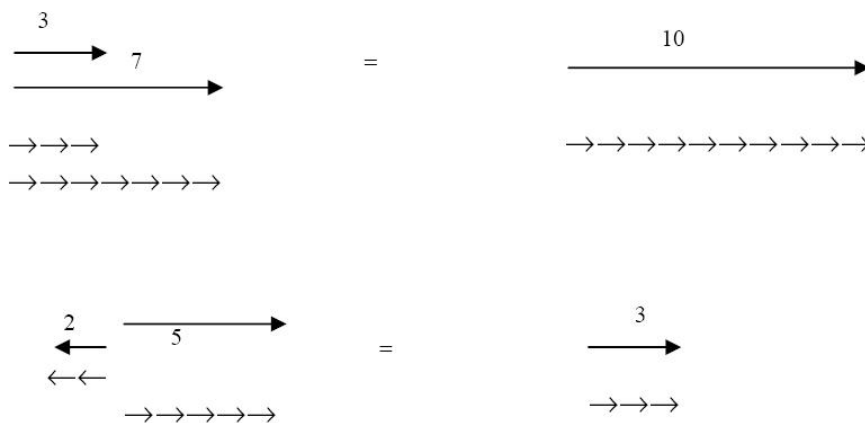


Figura C.6: Representação gráfica da adição e subtração de vetores com mesma direção.

C.2 Decomposição de Vetores

Imagine agora você em um carro, subindo a estrada para chegar ao cume de um morro. Você sabe que o morro tem 400m de altura e, olhando para o velocímetro do carro, observa que sua velocidade é de 10m/s. Aparentemente, será uma curta viagem de 40 segundos até o topo. Mas você continua dirigindo e observa que levou 100 segundos para chegar!

Antes de xingar os membros do CCD por terem ensinado errado, repare que estávamos andando ao longo de uma rampa. Ao mesmo tempo em que subia, você andava para frente; sua velocidade era usada não só para subir, para se deslocar na vertical, como também para se deslocar na horizontal. Como na figura C.7

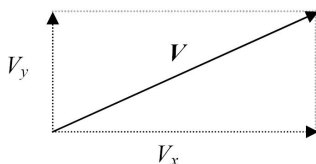


Figura C.7: Decomposição do vetor velocidade em vertical e horizontal.

A sua velocidade podia ser explicada como a soma de duas outras, uma que só “andava” no eixo horizontal e outra no eixo vertical. Da mesma maneira que somamos vetores perpendiculares, obtendo um resultante na diagonal deles, podemos sempre decompor um vetor em partes perpendiculares.

Essa idéia tem a ver com o princípio fundamental da álgebra linear, de que todos os vetores

de um certo espaço podem ser escritos a partir de sua BASE. Uma *base de vetores* é um conjunto mínimo de vetores a partir dos quais todos os outros podem ser escritos. Imagine uma reta. Se definimos sobre ela um vetor, digamos, $\vec{x}$, de módulo 1, todos os vetores que podem ser criados sobre essa reta são necessariamente múltiplos de $\vec{x}$. Se tivermos um plano, criamos dois vetores unitários $\vec{x}$ e $\vec{y}$, e qualquer vetor neste plano pode ser escrito como uma combinação de múltiplos dos $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Em outras palavras, qualquer vetor $\vec{V}$ pode ser escrito como

$$\vec{V} = a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

Uma combinação linear de dois vetores, $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Foi o que fizemos no exemplo acima. É isso que define a DIMENSÃO de um espaço². Quando dizemos que um plano é um espaço de duas dimensões, queremos dizer que ele possui dois vetores de base. Pelo menos motivo, uma reta só tem uma dimensão, e o espaço (em que nós vivemos), três dimensões. Nas teorias cosmológicas exóticas, vemos o espaço-tempo com 10, 11 dimensões... Significa que seriam necessários 10, 11 vetores de base... As operações com grandezas vetoriais ficariam bem mais complicadas.

Assim, decidido a aplicar seus novos conhecimentos em vetores, você escolhe uma nova montanha, mais alta, mais inclinada, que você subirá a pé! Diante de uma montanha de 1km de altura você realiza medições e percebe que a inclinação é de 30°. Como você sabe ser capaz de manter uma velocidade de 2m/s durante a subida, usando trigonometria, pode saber quanto tempo demorará para chegar ao cume.

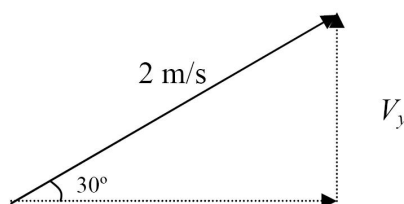


Figura C.8: Decomposição da velocidade em sua longa subida até o cume da montanha.

Com efeito, as componentes de sua velocidade podem ser dadas por:

$$V_x = V \times \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ m/s} \quad \text{e} \quad V_y = V \times \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{ m/s}$$

Assim, como a altura é de 1 km, e sua velocidade vertical, 1 m/s, você demorará 1000 segundos (aproximadamente 17 minutos) para chegar ao cume. Cansado, no meio da subida, você decide parar para respirar. Para sua surpresa, você fica parado! Apesar da gravidade estar puxando você para baixo, você permanece imóvel. Então você se lembra do atrito e tenta descobrir qual a sua força (figura C.9).

Aqui, a base horizontal-vertical não é a melhor para trabalharmos. Mas não importa, existem infinitas bases possíveis. Desde que sejam dois vetores que não estejam na mesma reta (já que é um problema bidimensional), eles juntos valem como base. Por comodidade, preferimos sempre tomar vetores perpendiculares – com eles podemos usar nossa trigonometria tradicional: senos, cossenos, Teorema de Pitágoras... Assim, vamos decompor seu peso $\vec{P}$ em uma componente $P_\perp$ perpendicular à superfície, e outra $P_\parallel$ paralela a ela (o que pode ser visto na figura C.10). A componente perpendicular se anula pela simples resistência do solo, o que chamamos de *força normal* da superfície. Já a componente paralela deveria fazer você escorregar, mas não o faz

²Não custa reforçar que essa definição de dimensão nada tem a ver com a de dimensão física, discutida no capítulo de Análise Dimensional.

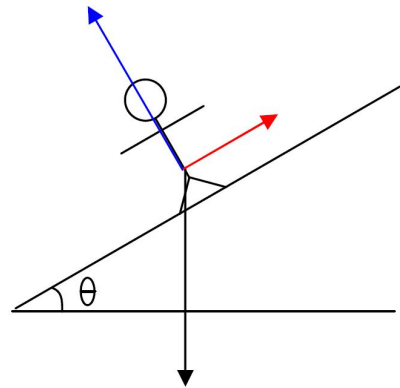


Figura C.9: As forças atuando em você enquanto está parado descansando da subida.

porque existe uma *força de atrito*, que o equilibra. Sendo m a sua massa e θ a inclinação da montanha, a força de atrito tem que ser tal que anule a componente paralela do peso:

$$F_{at} = P_{\parallel} = P \times \text{sen}\theta = mg\text{sen}\theta$$

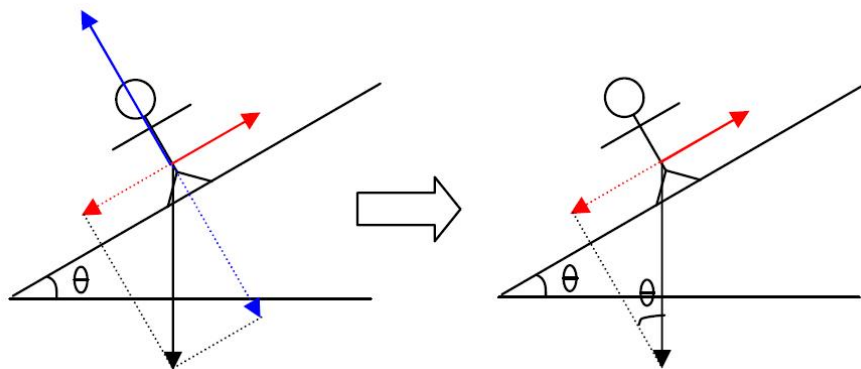


Figura C.10: As forças atuando em você enquanto está parado descansando da subida sendo decompostas em paralelas ao solo e perpendiculares a ele.

Um último exemplo é o do lançamento de balas de canhão³, onde as diferentes componentes da velocidade sofrem diferentes comportamentos. Suponha que estejamos no alto de uma montanha, com um canhão que vai dar um tiro horizontal. Durante todo o percurso da bala, sua velocidade horizontal é constante, igual à velocidade de saída do canhão. Entretanto, verticalmente, a bala sofre um movimento uniformemente variado; de fato, sua velocidade vertical é inicialmente nula, e vai aumentando a uma taxa igual a g . Sendo assim:

- 13- Calcule o alcance (a distância horizontal) de uma bala dessas, em função da velocidade inicial v da bala e da altura h da montanha.
- 14- Prove, usando as equações de movimento (as mesmas que você usou no item anterior), que a curva descrita pela bala é uma parábola.

³Canhão é um instrumento comumente utilizado na retificação de fronteiras

C.3 Operações com Vetores Decompostos

Agora que você já sabe decompor vetores em termos de uma certa base, podemos rever as operações com vetores e encontrar uma forma mais simples de realizá-las. Como você deve ter percebido, geometricamente é fácil somar e subtrair vetores, mas algebricamente isso só é fácil se os vetores estiverem em uma mesma direção. A idéia é então decompor todos os vetores em termos de vetores em certas direções, e fazer as contas com esses vetores! Portanto, precisamos definir a base que usaremos em nossas operações.

Trabalharemos em um espaço de 3 dimensões, portanto precisamos escolher 3 vetores. Como foi dito, é conveniente que eles sejam perpendiculares entre si, também é conveniente que o módulo desses vetores seja igual a 1 (assim fica mais fácil calcularmos o módulo do vetor resultante), agora só basta escolhermos 3 direções! Intuitivamente, você pode imaginar essas direções como sendo horizontal, profundidade (e agora nós temos um "chão", ou melhor, um plano) e altura. Como nós estamos criando um espaço geométrico, essa escolha é arbitrária, não importa o que você chama de "horizontal" ou "vertical", desde que você escolha três direções. De fato, existem infinitas escolhas possíveis.

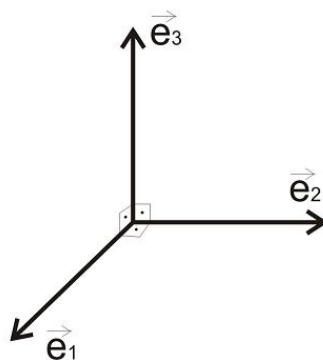


Figura C.11: Uma base com 3 vetores perpendiculares entre si.

Chamaremos nossos vetores de base de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$, também é normal associarmos os vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ às direções x, y e z, respectivamente.

Assim, um vetor $\vec{u}$ que pode ser decomposto em 5 unidades na direção x e 3 unidades na direção y, pode ser escrito como: $\vec{u} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$, uma outra forma cômoda de escrevermos esse vetor é simplesmente: $\vec{u} = (5, 3, 0)$

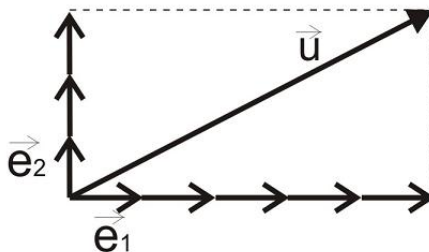


Figura C.12: O vetor $\vec{u}$.

Vejamos como agora é fácil somarmos e subtrairmos vetores: Sejam $\vec{u} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$ e $\vec{v} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, temos que $\vec{u} + \vec{v} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = 7\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

Usando triplas ordenadas, a conta fica ainda mais simples: $(5, 3, 0) + (2, -3, 2) = (7, 0, 2)$

C.3.1 Módulo de vetores decompostos

Mesmo sabendo decompor vetores, às vezes ainda precisamos simplesmente saber o módulo do vetor. Como nossa base é ortogonal (os vetores base são perpendiculares entre si), basta usarmos o Teorema de Pitágoras. Talvez você tenha dificuldade em visualizar isso com um vetor de 3 dimensões, o que você realmente deve fazer é aplicar o Teorema de Pitágoras duas vezes!

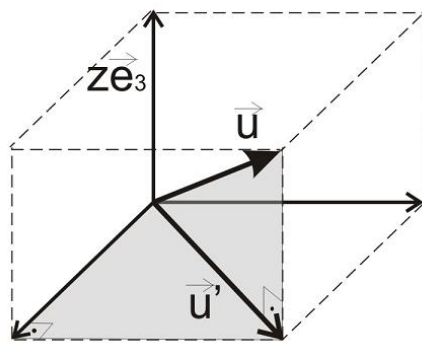


Figura C.13: Cálculo do módulo de $\vec{u}$

Seja $\vec{u} = (x, y, z)$, vamos decompô-lo em $\vec{u}' = (x, y, 0)$ e $z\vec{e}_3 = (0, 0, z)$. O módulo de $\vec{u}'$ é fácil calcular: $\sqrt{x^2 + y^2}$, o módulo de $z\vec{e}_3$ é simplesmente z , agora percebemos que $\vec{u}'$ também é perpendicular a $z\vec{e}_3$! Assim, o módulo de $\vec{u}' + z\vec{e}_3$ é: $\sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

A notação usada para representar o módulo de um vetor $\vec{u}$ é: $\|\vec{u}\|$, ou simplesmente u , mas cuidado para não se confundir com as notações, para não confundir u com uma grandeza simplesmente escalar. Existem ainda alguns livros que usam u diretamente como notação para vetor, sem diferenciá-los... ⁴

Portanto, se $\vec{u} = (x, y, z)$, então $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

- 15- Sejam os vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-2, 5, 7)$ e $\vec{w} = (3, 0, 1)$. Calcule as coordenadas e o módulo dos vetores:

- (a) $\vec{u} + \vec{w}$
- (b) $2\vec{u} - \vec{v}$
- (c) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$

- 16- Imagine um espaço de 4 dimensões e uma base para descrever esse espaço, semelhante a usada até aqui, só que com 4 vetores: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$.

- (a) Tente desenhar essa base. (Cuidado! Todos os vetores devem ser perpendiculares entre si!!)
- (b) Sendo $\vec{u} = (2, 1, 3, 5)$ e $\vec{v} = (1, -2, 1, -3)$, calcule as coordenadas e o módulo de $\vec{u} + \vec{v}$, faça um desenho pra te ajudar.

⁴Por isso, sempre preste atenção na notação usada em algum livro que você venha a ler, e claro, no contexto.

C.4 Produto Escalar

Além da soma, subtração e multiplicação por escalar existem outras duas operações com vetores que são muito usadas na física: o PRODUTO ESCALAR entre vetores e o PRODUTO VETORIAL.

O produto escalar, representado por: $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é uma forma de multiplicarmos dois vetores, tal que o resultado seja um *número* (ou *escalar*). Podemos interpretá-lo geometricamente como sendo o produto entre o módulo do primeiro vetor com o módulo da *projeção* do segundo vetor na direção do primeiro.

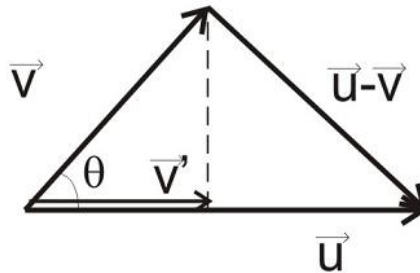


Figura C.14: Cálculo de $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Sendo θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos que $v' = v \cdot \cos\theta$, da onde concluímos que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cdot \cos\theta$$

Podemos criar uma fórmula para calcular o produto escalar a partir das coordenadas. Para isto, basta observarmos o triângulo formado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ na figura anterior e aplicarmos a lei dos cossenos (seja $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$):

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = u^2 + v^2 - 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos\theta$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos\theta$$

$$x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1 \cdot y_2 + y_2^2 + z_1^2 - 2z_1 \cdot z_2 + z_2^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos\theta$$

$$u \cdot v \cdot \cos\theta = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

O que é uma fórmula bem simples! Viva a decomposição dos vetores! \o/

Observe ainda que $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

- 17- Ache a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 3, 0)$ e $\vec{v} = (2, 1, 1)$
- 18- Ache a medida do ângulo formado entre a diagonal de um cubo e um dos seus lados.
- 19- Quanto vale o produto escalar entre dois vetores perpendiculares entre si?

C.5 Produto Vetorial

O produto vetorial, representado por $\vec{u} \times \vec{v}$ é o outro produto que podemos fazer entre vetores. Ao contrário do produto escalar, o resultado do produto vetorial também é um vetor.

Podemos interpretar geometricamente o módulo do produto vetorial como sendo o produto entre o módulo do primeiro e o módulo da componente perpendicular do segundo vetor em relação ao primeiro.

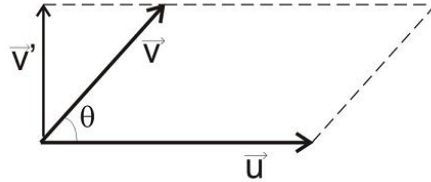


Figura C.15: Cálculo do módulo de $\vec{u} \times \vec{v}$

Sendo θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos que $v' = v \cdot \sin\theta$, da onde concluímos que:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = u \cdot v \cdot \sin\theta$$

Vendo a figura C.15 e a fórmula encontrada, podemos fazer uma outra interpretação geométrica sobre o módulo do produto vetorial: ele é igual à *área* do paralelogramo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Preste atenção em que $u \cdot v \cdot \sin\theta$ é apenas o **MÓDULO** do produto vetorial, diferentemente do produto escalar, escrever $\vec{u} \times \vec{v} = u \cdot v \cdot \sin\theta$ é errado!

A direção do produto vetorial é a direção perpendicular aos dois vetores e o sentido é tal que podemos aplicar a *regra da mão direita*: olhando $\vec{u} \times \vec{v}$ "para cima" devemos ver a rotação entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ocorrer no sentido anti-horário.

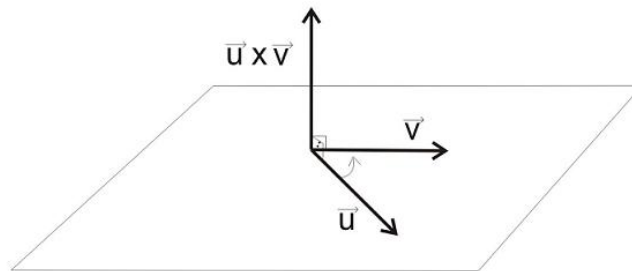


Figura C.16: Direção e sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$

Mais uma observação importante sobre o produto vetorial é que para determinarmos o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ a ordem de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é importante! Assim, $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

Agora que o produto vetorial foi bem definido (módulo, direção e sentido) podemos nos perguntar como calculá-lo através das coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Nesse caso as contas ficam mais complicadas, mas basta impor as condições já mencionadas e assim encontrar o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ perpendicular a $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = (y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2, z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2, x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2)$$

- 20- Sejam $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 1)$, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ e confirme se o vetor encontrado satisfaz as três propriedades mencionadas sobre módulo, direção e sentido. (dica: calcule $\sin\theta$ sem usar o produto vetorial)
- 21- Sendo $\vec{u} = (2, -2, 1)$ e $\vec{v} = (3, 1, 0)$, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.
- 22- Calcule a área do triângulo ABC, sendo $\vec{AC} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{AB} = (0, 1, 3)$.
- 23- Ache um vetor unitário e perpendicular a $\vec{u} = (1, 1, 2)$ e a $\vec{v} = (2, -1, 0)$.

Índice Remissivo

- área, 158
- órbita
 - de transf. de Hohmann, 128
 - de transf. por parábola, 137
 - geoestacionária, 131
 - hiperbólica, 135
 - lixo, 131
 - parabólica, 134
 - semi-geoestacionária, 131
- aceleração
 - angular, 89
 - centrífuga, 70
 - centrípeta, 69, 101
- anti-foco, 106
- apoastro, apogeu e afélio, 102, 111
- Aristóteles, 11, 50
- arte, 52
- asteróides troianos, 76
- astrologia e astrofísica, 15
- atrito, 51, 59
- Böde, Johan Elert, 33
- buraco negro, 98
- cálculo infinitesimal, 157
- círculo trigonométrico, 165
- calor, 80
- Camões
 - Os Lusíadas*, 11
- canhão, 174
- carga
 - eletromagnética, 49
 - gravitacional, 57
- Castor, 87
- centro de massa, 86
 - aceleração do, 87
 - velocidade do, 86
- conjunção, 15
- Copérnico
 - De Revolutionibus*, 21
 - Nicolau, 21
 - relatividade de, 67
- corpo rígido, 88
- Dandelin
 - esferas de, 108
- derivada, 157
 - de um produto, 91
- Descartes
 - Principia Philosophiae*, 36
 - René, 36
- dimensão, 173
- Donne, John, 28
- elipse, 30
 - excentricidade, 31, 110
 - focos, 31
 - semi-eixos, 109
- energia, 77
 - ATP, 81
 - cinética, 77
 - potencial, 79
 - potencial elástica, 84
 - potencial gravitacional, 77, 83
 - térmica, 80
- epiciclo, 19
- Esfera das Estrelas Fixas, 10
- Esferas Celestiais, 10
- Esferas Materiais, 10
- Estrela D'Alva, 18
- Euclides
 - Elementos*, 161
 - Elementos*, 53
- Eudoxo de Cnido, 18
 - método da exaustão, 159
- excentricidade, 31
- exosfera, 130
- Fórmula de Baskhara, 153
- Fases de Vênus, 26
- Feynmann
 - Lectures on Physics*, 48
 - Leis de Kepler, 114
 - Richard, 48
- filosofia magnética, 37

- filosofia mecânica, 36
- fluxo luminoso, 35
- força
 - de atrito, 59
 - central, 92, 115
 - de Coriolis, 68
 - de maré, 146
 - elástica, 57, 117
 - fantasma, 68
 - gravitacional, 58
 - normal, 173
- força, conceito de, 50
- função, 46, 150
 - de primeiro grau, 151
 - de segundo grau, 151
 - domínio e contra-domínio, 150
 - exponencial, 153
 - imagem, 150
 - trigonométrica, 155
- Galileu, 51
 - Dialogo*, 27
 - Nuncius Sidereus*, 25
 - Galilei, 25
 - Il Saggiatore*, 51
 - princípio de inércia, 51
 - relatividade de, 67
- Gedeão, Antônio, 14
- GPS/GLONASS/Galileo, 131
- grandezas escalares e vetoriais, 170
- Halley, Edmund, 134
- Hohmann
 - Walter, 128
- holismo, 96
- Hooke, Robert, 53
- inércia, 27
- inclinação, 151
- integral, 83
- ionosfera, 130
- ISS, 82, 130
- Kepler
 - Astronomia Nova*, 32
 - Harmonices Mundi*, 32
 - Mysterium Cosmographicum*, 32
 - Lei Harmônica, 40
 - Segunda Lei, 114
 - Terceira Lei, 120
- Kuhn, Thomas, 13
- Lagrange
 - Joseph Louis, 113
- lei dos co-senos, 166
- lei dos senos, 116
- Leibiniz
 - notação de, 157
- Leibniz
 - Gottfried, 41
- limite, 46, 49
 - definição, 156
- limite de Roche, 146
- loira, 65
- luas
 - galileanas, 26
 - pastoras, 147
 - shakesperianas, 147
- máquina de levantar e abaixar pesos, 78
- média ponderada, 86
- maré, 144
 - alta / baixa, 141
 - de sigízia / quadratura, 143
- massa inercial, 54
- milha marítima, 89
- momento angular, 91
- número complexo, 153
- número de Reynolds, 59
- Navalha de Ockham, 42
- Newton
 - Principia*, 38
 - Principia*, 52
 - Isaac, 52
 - Lei da Gravitação Universal, 41
 - notação de, 157
 - Primeira Lei, 53
 - Segunda Lei, 53
 - versão circular, 90
 - versão energética, 82
 - Terceira Lei, 40, 54
- oposição, 15
- Píteas, 141
- paradoxo
 - da dicotomia, 96
- paralaxe, 168
- Parmênides de Eléia, 96
- período planetário
 - orbital, 17
 - sideral, 16

- sinódico, 16
- periastro, perigeu e periélio, 102, 111
- pi, 167
- polinômio, 151
 - coeficientes de, 151
- Princípio
 - das Máquinas de Carnot, 79
 - Antrópico, 116
 - da Conserv. da Energia, 80, 83
 - da Conserv. da Quant. de Movimento, 55, 86
 - da Conserv. do Momento Angular, 93
 - de Inércia de Galileu, 51
- problema de dois três corpos, 113
- produto escalar, 90, 177
- produto vetorial, 89, 90, 178
- prova por absurdo, 96
- quadratura, 15
- quantidade
 - de átomos, 54
 - de matéria, 54
 - de movimento, 54
- radiano, 167
- referencial inercial, 67
- Relação Fundamenal da Trigonometria, 164
- rotação sincronizada, 147
- séries infinitas, 97
- satélite
 - geoestacionário, 70
- semelhança de triângulos, 163
- semi-latus rectum, 111
- seno
 - etimologia, 163
- sextil, 15
- tangente (trig.), 164
- Teorema de Pitágoras
 - inesquecibilidade de, 161
- Teorema Fundamental da Álgebra, 153
- Teorema Fundamental do Cálculo, 159
- termosfera, 130
- Titius, Johan Daniel, 33
- Titius-Böde, Lei de, 33
- torque, 90
- trígono, 15
- trabalho, 82, 89
- triângulo retângulo
 - hipotenusa e catetos, 161
- Tycho Brahe, 27
 - De Mundi aetherei*, 27
 - De Stella Nova*, 29
- Uranibourg, 29
- vaca, 159
- Van Allen, cinturão de, 131
- velocidade
 - angular, 89
 - areolar, 116
 - cósmica, primeira, 102
 - cósmica, segunda, 103
 - de órbita circular, 102
 - de escape, 84, 103
 - limite, 66
- vetor, 69, 89
 - base de, 173
 - módulo de, 169
- Vinícius, 67
- Voltaire, 42
- Wikipédia, 52
- Zenão de Eléia, 96