

Olimpíada Uruguaya de Astronomía

Prueba Clasificatoria - 11 de mayo de 2013

Ejercicio (1)

El día del Equinoccio de Aries, una persona observa que la sombra de una columna de 3 metros de altura se extiende 4,5 metros sobre el suelo. Suponiendo que dicha observación es realizada al momento de producirse la culminación superior del Sol:

1. ¿Cuánto vale dicho instante, medido en Tiempo Sidéreo Local?
2. ¿A qué latitud (en principio, norte o sur) se encuentra el observador? Expresar sus resultados en grados y minutos de arco.
3. Si además sabemos que se trata de un observador del Hemisferio Sur, ¿qué estación está comenzando, y cuál es el acimut de la dirección hacia dónde apunta la sombra de la columna? (suponga que el acimut se mide desde el punto cardinal Norte y en sentido N–O–S–E). ¿Dicha dirección se corresponde con alguno de los puntos cardinales? Nota: exprese sus resultados en grados y minutos de arco
4. Si otro observador a la misma latitud observa que la culminación del Sol se produce 40 minutos después ¿cuál es la diferencia (aproximada) en longitud entre ambos observadores?
5. En la figura (1) deduzca la posición de al menos un punto cardinal, etiquete en la figura que constelaciones y estrellas notables puede distinguir e indique el sentido del Movimiento General Diurno (MGD) representando la posición al cabo de 9 horas de una constelación conocida cualquiera de la figura.

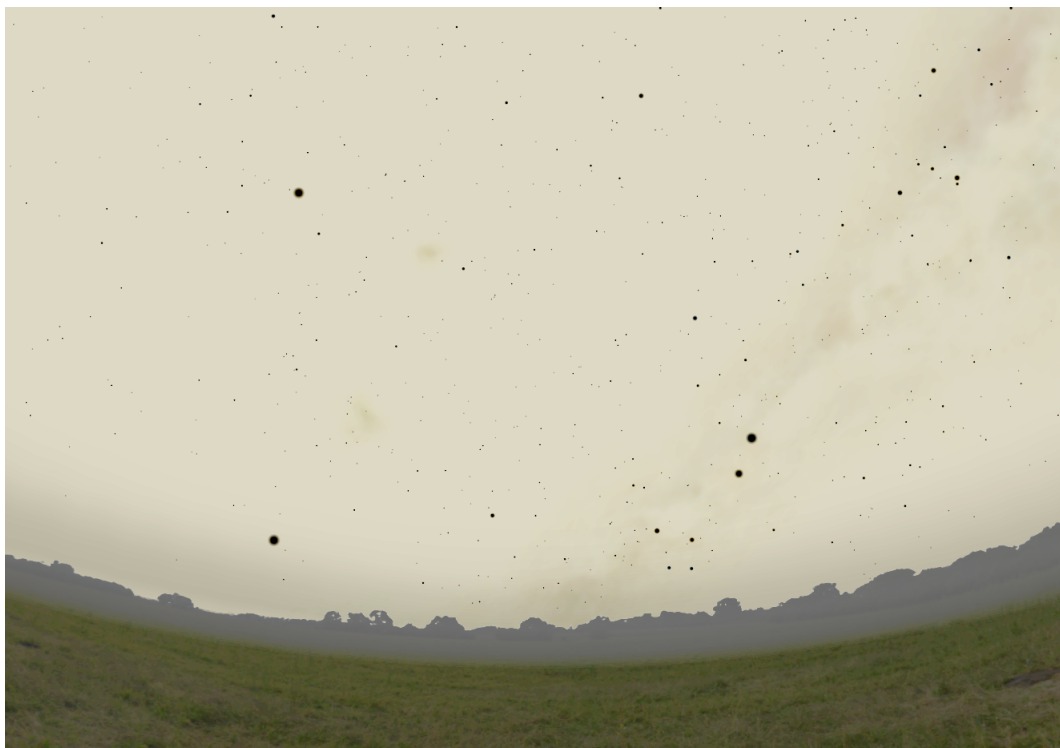


Figura 1: Vista de un observador hacia el cielo en cierta dirección.

Ejercicio (2)

Durante gran parte de 2013 el planeta Saturno estará en oposición brillando con una magnitud aparente de 0,33. Asumiendo que la órbita de Saturno es circular de radio 9,5 ua, calcule:

1. La magnitud que tendrá el planeta cuando se encuentre en conjunción.
2. Calcular los diámetros máximo y mínimo que presentará Saturno en oposición y conjunción sabiendo que su radio es $R_{\text{saturno}} = 60268 \text{ km}$ y expresarlo en segundos de arco.
3. Considerando la figura (2) calcule el diámetro mínimo que debería tener un telescopio para poder resolver la división de Cassini en los anillos de Saturno durante su oposición. Nota: Utilizar la longitud de onda de la luz $\lambda = 550 \text{ nm}$.
4. Utilizando la Ley de Kepler, estime el período de traslación del satélite Titán en torno a Saturno, sabiendo que su semieje mayor es $a = 1221870 \text{ km}$ y la masa de Saturno es $5,68 \times 10^{26} \text{ kg}$, y expréselo en días.

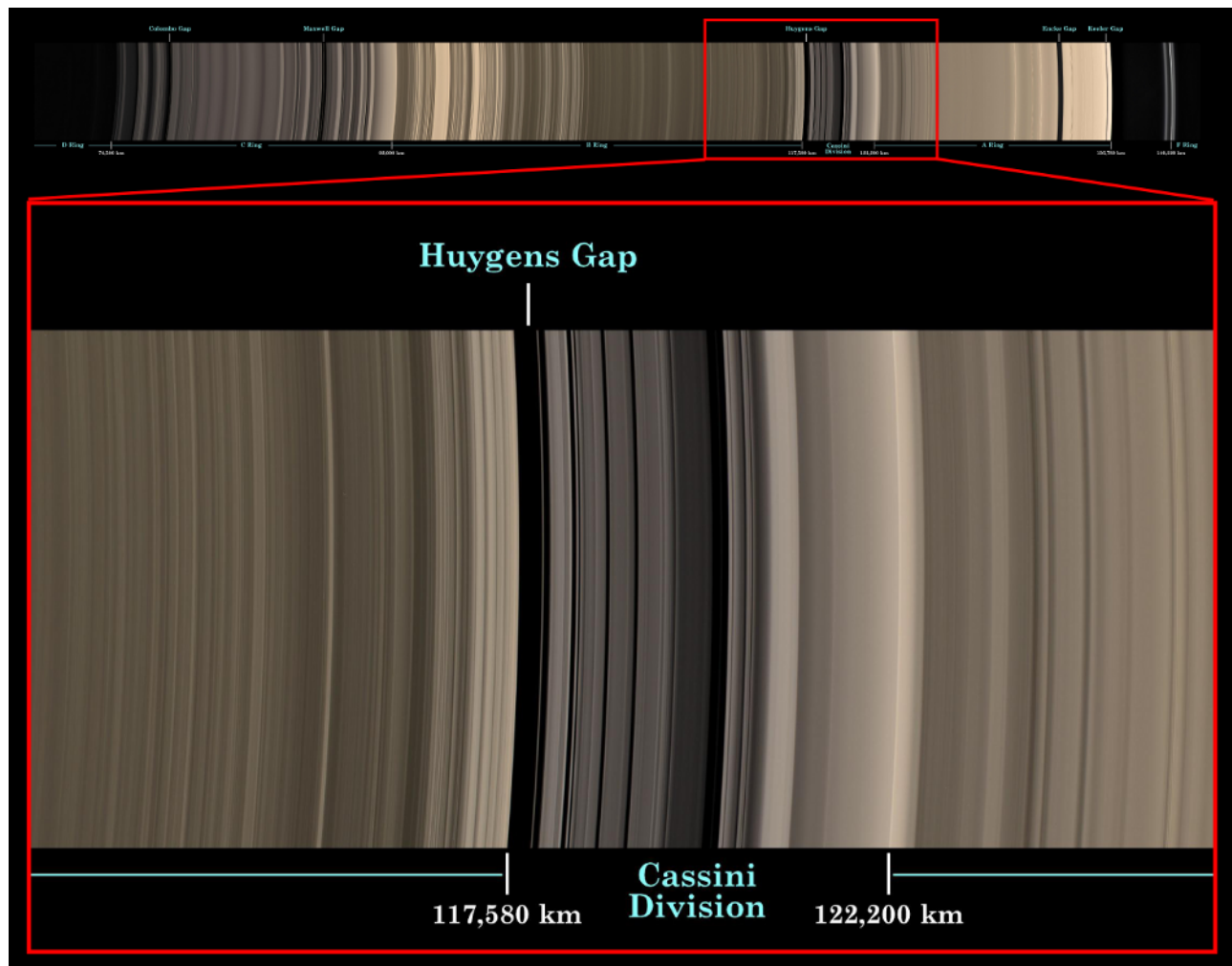


Figura 2: Estructura y dimensiones de los anillos de Saturno

Ejercicio (3)

La paralaje anual de la estrella Altair es de $0.196''$ (segundos de arco).

1. ¿A qué distancia se encuentra dicha estrella del Sol?. Exprese el resultado en parsecs y utilizando dos cifras significativas.
2. Si la magnitud aparente visual (m) de Altair es 0.8, ¿Cuánto vale su magnitud absoluta visual (M)? (desprecie la extinción debida al medio interestelar). Exprese el resultado con una cifra decimal.
3. Despreciando la corrección bolométrica (es decir, la diferencia entre la magnitud visual y la magnitud bolométrica), determine cuántas veces más luminosa es Altair con respecto al Sol, sabiendo que la magnitud absoluta del Sol ($M_{\odot}$) es aproximadamente 4.8. Utilice la siguiente relación entre magnitudes absolutas y luminosidades $M - M_{\odot} = -2,5 \log_{10} (L/L_{\odot})$, siendo $L_{\odot}$ la luminosidad del Sol.
4. El siguiente diagrama de *Hertzprung-Russell* muestra la ubicación de varias estrellas conocidas, incluyendo al Sol. Ubique aproximadamente en este diagrama (dibujando una cruz) a la estrella Altair, suponiendo que su temperatura efectiva sea de unos 9000 K. ¿Cómo se denomina a la región del diagrama a la cual pertenecen el Sol y Altair?
5. Considere una estrella con la misma temperatura superficial que Altair, pero mil veces menos luminosa que el Sol. Marque su posición aproximada en el diagrama H-R mediante un asterisco. Determine si dicha estrella es mayor o menor en tamaño que Altair, y en qué factor (es decir, cuantas veces más grande, o cuantas veces más chica). Fundamente su respuesta.

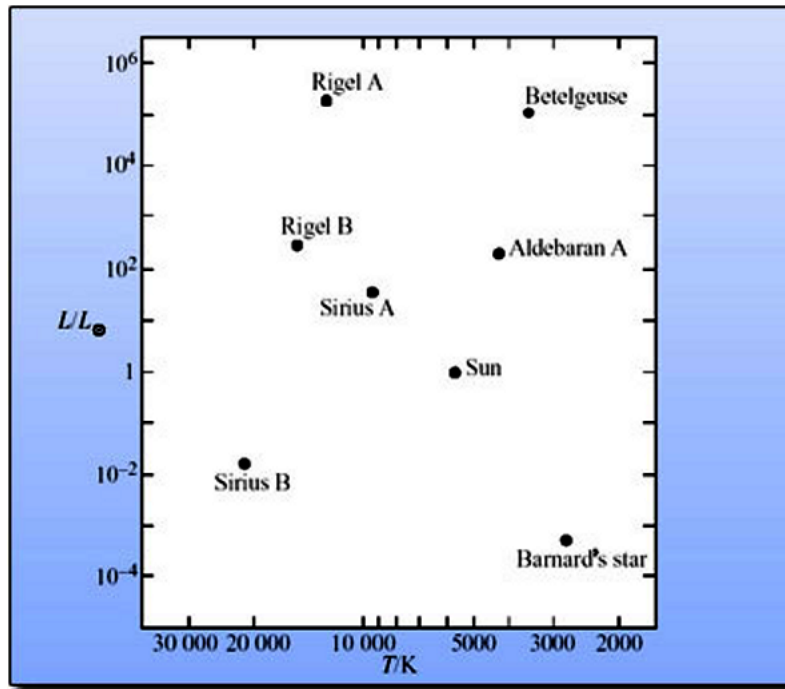


Figura 3: Diagrama H-R. En el eje de ordenadas se indica la luminosidad relativa al Sol, y en el eje de abscisas la temperatura efectiva (K). Ambos ejes están en escala logarítmica (extraído de astro.unl.edu).

Ejercicio (4)

En el marco de la teoría del “Big Bang”, la “Ley de Hubble” es considerada una herramienta para medir distancias cosmológicas.

1. Suponiendo un valor de 71 km/s/Mpc para la llamada constante de Hubble (H), calcule a que distancia se encuentra la galaxia NGC 3159 si el corrimiento relativo al rojo observado es $z = 0.02$ (utilizar únicamente las fórmulas clásicas). Nota: velocidad de la luz en el vacío (c) = $3 \times 10^5 \text{ km/s}$. Exprese el resultado en Mpc y en años luz, y con 1 cifra decimal.
2. La llamada “distancia horizonte” es una medida aproximada del tamaño del Universo. Calcule la misma sabiendo que se define como la distancia recorrida por un fotón durante un tiempo equivalente a la edad del universo ($\tau \approx 14 \text{ Giga-años}$). Exprese el resultado en Mpc.

Ejercicio (5)

Un cohete, que transporta un satélite para poner en una órbita geoestacionaria, experimenta un cambio de velocidad que lo lleva del reposo a una velocidad de 11 m/s al cabo de 5 segundos .

1. Sabiendo que la masa del cohete es de 2 tn , calcule el impulso I y la fuerza F (supuesta constante) aplicados inicialmente al cohete (Nota: se desprecia la masa del satélite).
2. Si el satélite se coloca en órbita circular sobre el Ecuador terrestre, y con la misma velocidad angular que la de la Tierra, calcule su altura con respecto a la superficie terrestre, sabiendo que el radio ecuatorial de la Tierra es $\approx 6380 \text{ km}$, y que la velocidad orbital del satélite geoestacionario es $\approx 11033 \text{ km/h}$.

Solución (1)

Parte 1

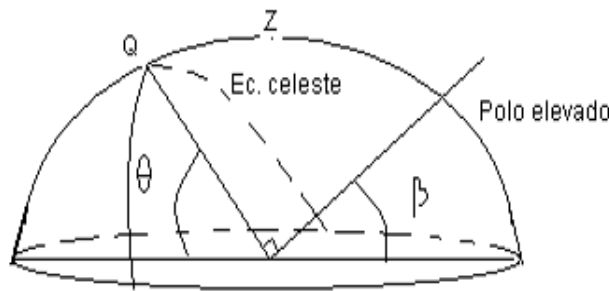
El Tiempo Sidéreo Local es

$$TSL = \alpha + H = 0h + 0h = 0h$$

siendo α la ascensión recta del Sol, y H su ángulo horario.

Parte 2

Durante el equinoccio de Aries, el Sol viaja por el Ecuador Celeste, por lo tanto, al producirse la culminación de éste, su altura sobre el horizonte (ángulo θ) es igual a la altura máxima del Ecuador en la bóveda celeste (punto Q). El ángulo θ se obtiene a partir del método del gnomon:



$$\tan \theta = \frac{\text{altura}}{\text{sombra}} = \frac{3}{4,5} = \frac{2}{3} \Rightarrow \arctan \left(\frac{2}{3} \right) \cong 33^{\circ}41'$$

Luego, la altura del polo elevado se obtiene como:

$$\theta + \beta + 90^{\circ} = 180^{\circ} \Rightarrow \beta = 90^{\circ} - \theta = 56^{\circ}19'$$

que por el Teorema de la Latitud, resulta ser la latitud del observador.

Parte 3

Si el observador está en el H. Sur, la estación que comienza es el otoño y por ser la culminación del Sol (mediodía), la sombra apunta al punto cardinal Sur

Parte 4

Haciendo la aproximación correspondiente (diferencia en tiempo $\sim$ diferencia en longitud), puede tomarse la diferencia de 40 minutos como $2/3$ de hora y por regla de 3 simple se obtiene una diferencia en longitud de 10° para dos observadores a la misma latitud

Parte 5

El punto cardinal visible es el Sur. Las estrellas notables son Canopus, Achernar, Alfa Centauri, Beta Centauri y Acrux (Cruz del Sur). La constelación más notable es la Cruz del Sur, le siguen la constelación del Centauro (Alfa y Beta del Centauro), La constelación del Navío o Carina (Canopus) y Eridano (Achernar). El MGD es de oriente a occidente por lo tanto Achernar (por ejemplo) se moverá hacia el lado derecho de la figura, pasando por la parte superior.

Solución (2)

Parte 1

En conjunción la distancia aproximada de Saturno es

$$9,5ua + 1,0ua = 10,5ua$$

y en oposición es

$$9,5ua - 1,0ua = 8,5ua$$

Llamando al brillo que presenta Saturno, B_{op} y B_{con} para oposición y conjunción respectivamente, sabemos que

$$B_{op} \propto \frac{1}{8,5^2}$$

$$B_{con} \propto \frac{1}{10,5^2}$$

Por lo tanto utilizando la fórmula que relaciona brillo con magnitudes tenemos que

$$m_{op} - m_{con} = -2,5 \log_{10} \left(\frac{B_{op}}{B_{con}} \right) \Rightarrow 0,33 - m_{con} = -2,5 \log_{10} \left(\frac{10,5^2}{8,5^2} \right)$$

$$m_{con} = 0,33 + 2,5 \log_{10} \left(\frac{10,5^2}{8,5^2} \right) \cong 0,79$$

Parte 2

Tomando el radio de Saturno y su distancia de oposición y conjunción respectivamente 8,5 y 10,5 ua, calculamos los arcos subtendidos por el planeta considerando el triángulo rectángulo con el ángulo θ en la Tierra, cateto adyacente 8,5ua y 10,5ua respectivamente y cateto opuesto 60268km

$$60268km \simeq 0,0004ua$$

$$\tan \theta = \frac{0,0004}{8,5} \Rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{0,0004}{8,5} \right) = 4,7 \times 10^{-5} rad$$

Utilizando que 1 radián contiene 206265 segundos de arco, tenemos que

$$\theta = 9,7''$$

Finalmente el diámetro de saturno será 2 veces este valor

$$\theta \cong 19,4''$$

Análogamente para la conjunción es hacer la misma cuenta solo cambiando el cateto adyacente del triángulo por 10,5 donde se obtiene el resultado

$$\theta \cong 15,7''$$

Parte 3

De la figura puede deducirse que la dicisión de Cassini tiene una extensión de $l = 4620km$. Convirtiendo esta extensión a unidades astronómicas tenemos que

$$l = 0,0000308ua$$

El ángulo subtendido por dicha extensión es

$$\tan \theta = \frac{0,0000308}{8,5} \Rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{0,0000308}{8,5} \right) = 3,623 \times 10^{-6} rad$$

Escribiendo un criterio de resolución, como el de Rayleigh, tenemos que

$$\theta_R[rad] = \frac{1,22\lambda}{D}$$

Despejando D obtenemos, utilizando la 550nm como la longitud de onda de la luz

$$D = \frac{(1,22) (550 \times 10^{-9})}{3,623 \times 10^{-6}} = 0,185m$$

$$D \simeq 18cm$$

Parte 4

Aplicando directamente la Ley de Kepler expresada en el sistema internacional MKS tenemos que

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_{sat} + m_{tit})} \approx \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_{sat}}$$

dado que la masa de titán es despreciable con respecto a la de Saturno. Luego despejando T y expresandolo en días

$$T \approx \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{Gm_{sat}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (1221870000)^3}{(6,67 \times 10^{-11})(5,68 \times 10^{26})}} = 15,9d$$

Solución (3)

Parte 1

Sea r la distancia Sol – Estrella. Se tiene: $r(pc) = 1/p''$, siendo p la paralaje anual. Luego la paralaje resulta

$$r = 5,1pc$$

Parte 2

Tenemos que:

$$M = m - 5 \log_{10} \left(\frac{r}{10} \right)$$

donde r está dada en pc, luego:

$$M = 0,8 - 5 \log_{10} \left(\frac{5,1}{10} \right) = 0,8 - (5)(-0,292) = 0,8 + 1,462$$

$$M = 2,3$$

Parte 3

Tenemos que:

$$M - M_{\odot} = -2,5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) \Rightarrow -0,4 (M - M_{\odot}) = \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) \Rightarrow 10^{-0,4(M-M_{\odot})} = \frac{L}{L_{\odot}}$$

$$10^{-0,4(2,3-4,8)} = 10^{0,995} = \frac{L}{L_{\odot}}$$

Luego

$$\frac{L}{L_{\odot}} \approx 10$$

Parte 4

La región del diagrama H-R a la cual pertenecen el Sol y Altair se denomina *Secuencia Principal* (ver el diagrama con la posición de Altair más abajo).

Parte 5

La estrella (*) se encuentra en la región de las enanas blancas. Es menor que Altair pues al tener la misma temperatura superficial, emite la misma cantidad de energía por unidad de superficie (por la ley de Stefan para la radiación de cuerpo negro). Eso implica que al ser menos luminosa, debe tener menos superficie, y por lo tanto su radio debe ser menor. Para calcular cuántas veces menor sería su radio, en relación a Altair, aplicamos:

$$L = 4\pi R^2 F$$

donde F representa la energía por unidad de superficie (y de tiempo, etc.). Por la ley de Stefan se tiene:

$$F = \sigma T^4$$

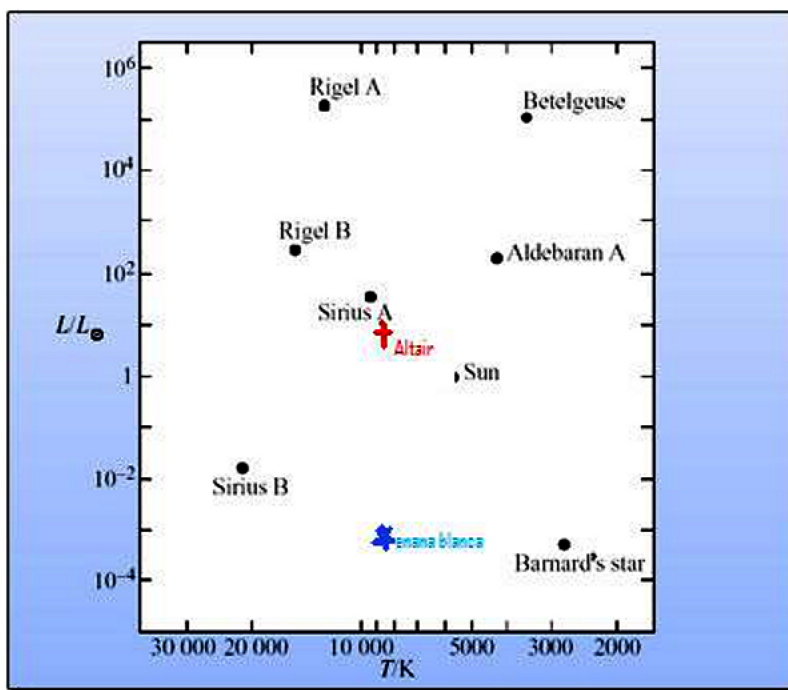
por lo cual resulta:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Luego, cancelando las constantes y las temperaturas (que son iguales), se llega a:

$$\frac{L_{\star}}{L_{Altair}} = \left(\frac{R_{\star}}{R_{Altair}} \right)^2 \Rightarrow \frac{R_{\star}}{R_{Altair}} = \sqrt{\frac{L_{\star}}{L_{Altair}}} = \sqrt{\frac{10^{-3}}{10}} = \sqrt{10^{-4}} = 0,01$$

O sea que la estrella es cien veces menor en tamaño que Altair. (Nota: Las luminosidades están expresadas en unidades solares).



Solución (4)

Parte 1

Por la fórmula clásica del efecto Doppler se tiene:

$$v = zc = (0,02) (3 \times 10^5) = 6000 \text{ km/s}$$

Siendo v la velocidad de alejamiento de la galaxia (también velocidad radial o velocidad de recesión).
Luego por la ley de Hubble, se obtiene

$$v = Hd \Rightarrow d = \frac{v}{H} = 84,5 \text{ Mpc} = 84,5 \times 10^6 \text{ pc} = 275,5 \text{ millones de años luz}$$

Parte 2

La distancia de horizonte Δx puede calcularse como

$$\Delta x = c\tau = 3,10^5 \text{ km/s} \times 14 \times 10^9 \text{ años} = (3 \times 10^5) (14 \times 10^9) (365,25) (24) (3600) = 11,3254192 \times 10^{23} \text{ km} = 4,303 \times 10^9 \text{ pc} = 4303 \text{ Mpc}$$

Solución (5)

Parte (1)

$$I = m(v_f - v_i) = mv_f = 2000 \text{ kg} \times 11 \text{ m/s} = 22 \times 10^3 \text{ kg m/s}$$

$$F = \frac{I}{\Delta t} = \frac{22 \times 10^3}{5} = 4400 \text{ N}$$

Parte (2)

Si la velocidad angular ω del satélite es igual a la de la Tierra, entonces el período orbital T del satélite es igual a 24 h. Por otro lado, como el movimiento es circular, se tiene:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Siendo “ r ” la distancia del satélite al centro de la Tierra, y “ v ” su velocidad orbital. Luego

$$r = \frac{Tv}{2\pi} = 42143km$$

Finalmente la altura “ h ” respecto a la superficie será:

$$h = r - 6380km \approx 35763km$$