



Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica
Comitê Científico e Didático

Processo de Seleção para Olimpíadas Internacionais de 2011

Gabarito da Prova Final

DADOS ÚTEIS (COMENTÁRIOS)

Sol		Unidade Astronômica (UA)	$1,5 \cdot 10^8$ km
Massa	$2 \cdot 10^{30}$ kg	Parsec (pc)	206 265 UA
Magnitude Aparente	-26,8		
Luminosidade	$3,84 \cdot 10^{26}$ W	Const. Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m ² /kg ²
(em todos os dados, é importante atentar para a precisão dada pela tabela)		Velocidade da luz no vácuo	$3,00 \cdot 10^8$ m/s
Terra		$\lambda_{\text{MAX}} \cdot T$ (em corpos negros)	$2,898 \cdot 10^{-3}$ K·m
Massa	$5,97 \cdot 10^{24}$ kg	Altura da Torre Eiffel	320 m
Raio	6370 km	(nem todos os itens da tabela são úteis...)	
Albedo	0,367	Dia Sideral Médio	23 h 56 min
Semi-eixo maior orbital	$1,496 \cdot 10^8$ km	Mês Sideral Médio	27 d 7 h 43 min
Excentricidade orbital	0,0167	Ano Trópico Médio	365,2422 d
		Ano Anomalístico Médio	365,2596
Lua			
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Albedo	0,39
Raio	1740 km	Albedo	0,39
Albedo	0,136	Albedo	0,39
Semi-eixo maior orbital	384 000 km	Albedo	0,39

A referência dos últimos dados é a música "Albedo 0.39", do Vangelis. Trata-se de um dos grandes clássicos do Rock Progressivo (ou Krautrock, ou Kosmische Musik, dependendo de como preferir chamar). Um link para o vídeo é: <http://www.youtube.com/watch?v=rL1oU6fH25w>

QUESTÕES CURTAS

1. A questão visava a ter uma pequena amostra do conhecimento observacional dos alunos. Apenas um candidato não escreveu qualquer resposta para esta questão. As constelações usadas foram pouco variadas: 32 das 49 provas continham Órion como uma das constelações, 32 tinham o Cruzeiro do Sul e 19 tinham ambas. Algumas continham informações bastante interessantes (escala de magnitudes, nomes, nebulosas, descrições e lendas), mas, se você for fazer a prova novamente no futuro, tente constelações mais criativas!

Outras constelações usadas foram Cão Menor (7), Cão Maior (4), Escorpião (5), Gêmeos (3), e, com uma aparição cada: Áries, Lira, Cassiopéia, Cefeu, Triângulo, Ursa Menor e, por fim, a não-existente constelação do Bode.



2. Essa era uma questão simples de estimativas e bom-senso numérico. Devido à grande diferença em ordens de grandeza, era difícil não perceber que a atmosfera é mais massiva. Há formas simples de fazer as estimativas; vejamos.

Humanidade:

Considerando que existem cerca de 6 bilhões de pessoas e considerando a massa média como sendo 70 kg, a massa da população mundial toda será:

$$M_h = N \cdot m_1 = 6 \times 10^9 \times 70 \text{ kg} = 4 \times 10^{11} \text{ kg}$$

Atmosfera:

A pressão atmosférica na superfície da Terra se deve a massa de ar sobre a mesma. Como a área da Terra é dada por $S_T = 4\pi R_T^2 = 5,1 \times 10^{14} \text{ m}^2$ e a pressão atmosférica na superfície é $p = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$:

$$M_a = \frac{p \cdot S_T}{g} = 5,2 \times 10^{18} \text{ kg}$$

Com isso vemos que a massa da atmosfera é muitas ordens de grandeza maior que a massa da humanidade.

Há outras maneiras de estimar. Sabemos, por exemplo, que um mol de atmosfera é composto de 80% de N_2 e 20% de O_2 , o que significa uma massa molar de $0,8 \cdot 28 + 0,2 \cdot 32 = 28,8 \text{ g}$. Por outro lado, sabemos que, ao nível do mar, o volume de um mol de atmosfera (ou de qualquer outro gás) ocupa 22,4 l, levando sua densidade ao nível do mar para $1,3 \text{ g/l} = 1,3 \text{ kg/m}^3$. Supondo a atmosfera com densidade constante igual à do nível do mar e uma altura h e sabendo a área da superfície terrestre ($5,1 \times 10^{14} \text{ m}^2$), vemos que, para ter uma massa igual à da humanidade, a coluna de ar precisaria ter uma altura de

$$h = \frac{M_h}{\rho \cdot S_T} = 6 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,6 \text{ mm}$$

Certamente a altura da atmosfera é maior que um milímetro, então a massa atmosférica deve ser maior. Na verdade, pelo valor obtido a partir da pressão, podemos calcular a *altura efetiva* da atmosfera: a altura que ela deveria ter, com densidade constante igual à do nível do mar, para ter a mesma massa que ela de fato tem. Esse valor dá algo em torno de 8 km de altura, que é quase a altura do Everest. Claro que, como a densidade atmosférica varia, ela atinge alturas muito maiores (a estratosfera vai até os 50 km).

3. Essa questão exigia apenas uma manipulação básica de sistemas de unidades. Quase todos acertaram-na. Um micro-século é $10^{-6} \text{ século} = 100 \times 10^{-6} \text{ ano} = 1 \times 10^{-4} \text{ ano}$. Transformando em horas, minutos e segundos, ficamos com

$$\mu \text{ sec} = 0 \text{ h } 52 \text{ min } 36 \text{ s}$$

Não era para transformar em horas, depois em minutos, depois em segundos. Isso não faz sentido!



4. A principal importância dessa questão era sondar se os candidatos haviam estudado o gabarito da Primeira Prova (a questão era uma repetição da questão 11, que teve um dos menores índices de acerto). Como o índice de acerto foi ainda menor na segunda prova, a impressão sobre estudar material passado foi bastante ruim.

O analema solar é produzido fotografando-se o Sol a cada dia solar, durante um ano; o efeito é gerado por dois fatores: (i) inclinação entre a eclíptica e o equador, e (ii) excentricidade da órbita solar em torno da Terra. A trajetória lunar também é elíptica e inclinada com relação ao equador; assim, o razoável seria fotografá-la durante um mês sideral, a cada dia lunar médio. Para calcular a duração do dia lunar médio, basta um simples cálculo de período sinódico:

$$\frac{1}{T_{LM}} = \frac{1}{T_{dia\ sideral}} - \frac{1}{T_{mês\ sideral}}$$

Logo, $T_{LM} = 24,84$ horas ou 24 horas e 50 min

5. A maior parte das pessoas respondeu que a proporção seria 1/500. É difícil acreditar que pensaram que colocaríamos na prova uma questão cuja resposta estivesse explícita no enunciado. Além disso, as pessoas não perceberam o mais importante que queríamos explorar na questão: a diferença entre o que se observa e o que se acredita. Em outras palavras, saber reconhecer o viés observacional.

Em resumo, a solução era a seguinte: as estrelas mais massivas são mais brilhantes e, portanto, podem ser enxergadas a uma distância maior. Então existe uma distância-limite até a qual vemos os dois tipos de estrelas misturados na proporção 1/500; a partir dessa distância e até uma segunda distância-limite, em que só veríamos as estrelas do tipo mais brilhante. A proporção observada é uma combinação dessas duas.

Agora vamos aos detalhes: temos dois tipos de estrela, uma com magnitude -5 e outra com magnitude +5. Como a cada cinco graus de magnitude o brilho das estrelas aumenta 100 vezes, as estrelas do primeiro tipo são 10.000 vezes mais brilhantes que as do segundo. Assim, elas são vistas até uma distância 100 vezes maior. Calculando

$$m - M = 5 \log d - 5$$

$$m = 17$$

$$M = -5 \rightarrow d = 2,5 \cdot 10^5 \text{ pc}$$

$$M = +5 \rightarrow d = 2,5 \cdot 10^3 \text{ pc}$$

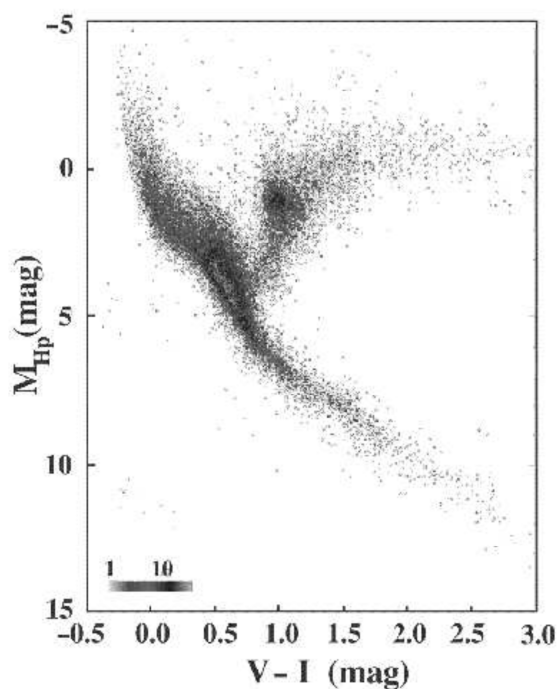
Seja k a densidade de estrelas de massa 10 por unidade de volume (que supomos constante). A densidade de estrelas de massa 1 será então $500k$. O volume em que podemos enxergar estrelas é um “cone” compreendido por um ângulo sólido Ω , determinado pela abertura do telescópio. Como se trata de uma região pequena, podemos aproximar esse volume por um cone de base circular, e a área da base seria Ωd^2 (em que d é a distância). Assim, o número de estrelas de cada tipo observado seria:

$$n_{10} = \frac{\Omega d_{10}^2 \cdot d_{10}}{3} \cdot k$$
$$n_1 = \frac{\Omega d_1^2 \cdot d_1}{3} \cdot 500k$$



$$\frac{n_{10}}{n_1} = \frac{1}{500} \cdot \frac{d_{10}^3}{d_1^3} = \frac{10^6}{500} = 2 \cdot 10^3$$

Assim, o Diagrama HR produzido deveria ser mais concentrado nas regiões mais altas, como neste exemplo gerado pelo satélite Hipparcos, usando 41453 estrelas de diversas direções do céu.



6. Essa era uma questão para testar conhecimentos básicos de astrofísica, em particular as relações comuns entre grandezas como luminosidade, fluxo, temperatura e cor. A luminosidade do Sol na nova situação pode ser obtida a partir da Lei de Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi R_s^2 \sigma T^4$$

Logo, se a temperatura superficial do Sol dobrar, sua luminosidade fica $2^4 = 16$ vezes maior. Então a magnitude fica:

$$m_{\text{dobro}} - m_{\text{atual}} = -2,5 \log \frac{16L}{L}$$

$$m_{\text{dobro}} = -26,8 - 3,0 = -29,8$$

Exercício: estime em quanto variaria o fluxo solar na Terra se sua magnitude dobrasse com a temperatura da fotosfera, e se tornasse -53. Nós sobreviveríamos a isso?

Já para estimar a cor, havia duas maneiras. Uma não-tão-bom era conhecer o tipo espectral a partir dos valores de temperatura. Como a temperatura da fotosfera solar fica em torno de 5600 K, na nova situação ela passa a 11000 K, entre os grupos O e B, ambos azulados. Outra maneira, um pouco mais precisa, era usar a Lei de Deslocamento de Wien para achar o comprimento de onda do pico:



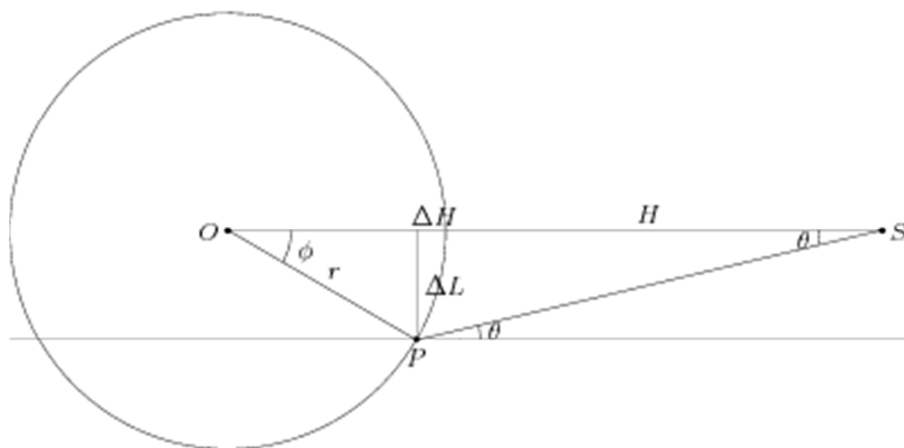
$$\lambda_{MAX} T = 2,878 \cdot 10^{-3} m \cdot K$$

$$\lambda_{MAX} = 2,6 \cdot 10^{-7} m = 260 nm$$

que cai na região do ultravioleta próximo. Portanto, sua cor seria azulada (não-ultravioletada, pelo menos para nós).

7. Essa era uma questão de geometria e visão espacial. O conceito astronômico envolvido é a paralaxe geocêntrica, mas era necessário apenas entender coordenadas terrestres e o que é um satélite geoestacionário.

Em primeiro lugar vamos desenhar a situação do problema. Faremos uma representação da Terra, um ponto aproximadamente no seu Equador e outro ponto P, situado a uma latitude ϕ . Estamos interessados em saber a paralaxe de um objeto S que esteja a uma altura H sobre o Equador Celeste (isso vale para pontos quaisquer na Terra, não apenas no equador):



Aqui H é a altura de S em relação à superfície, ΔL é a distância entre P e a reta OS, ΔH é o segmento de OS entre a superfície e o segmento que mede ΔL , ϕ é o ângulo de latitude e θ é a distância zenital de S para o observador em P (que é o ângulo de paralaxe geocêntrica de S para P). Pela figura, podemos determinar θ por:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta L}{H + \Delta H}$$

O raio da órbita do Brasilsat pode ser obtido comparando com a Lua, e lembrando que satélites geoestacionários têm período de um dia sideral (por isso são geoestacionários):

$$R_{\text{sat}} = R_{\text{Lua}} \left(\frac{T_{\text{sat}}}{T_{\text{Lua}}} \right)^{\frac{2}{3}} = 3,84 \times 10^5 \left(\frac{1}{27,32} \right)^{\frac{2}{3}} \text{ km} = 4,23 \times 10^4 \text{ km}$$

Calculando o ΔH e o ΔL para Porto Alegre:

$$\Delta H = r (1 - \cos \phi) = 853 \text{ km}$$

$$\Delta L = r \sin \phi = 3185 \text{ km}$$

Calculando a paralaxe do satélite:



$$\theta_{sat} = \arctan \frac{3185}{853 + 35960} = 4^{\circ} 56'$$

Calculando a paralaxe da Lua (Selene):

$$\theta_{Lua} = \arctan \frac{3185}{853 + 377600} = 29'$$

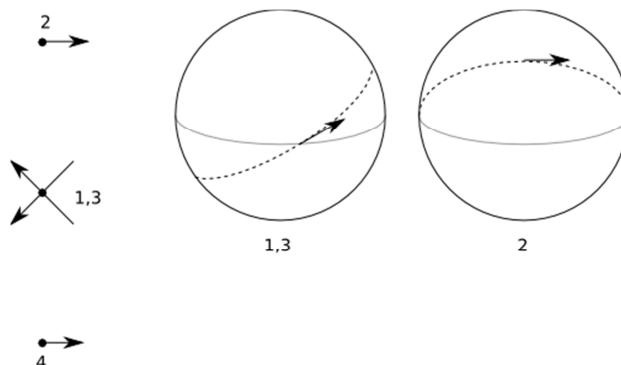
Naturalmente, a paralaxe da Lua é largamente desprezível. Para a maioria das situações, podemos considerá-la a uma distância infinita (paralaxe zero). Mas isso não significa que a Lua estaria a 49' do zênite!, afinal o zênite muda junto com a curvatura da Terra. Como o raio da Lua é cerca de 15', um observador em Porto Alegre vê o satélite a cerca de 4°27' da mesma.

8. A resposta da questão 8 é um 8.

Os efeitos que causam o analema solar (e o lunar) já foram explicados na questão 4. Podemos constatar que o mesmo efeito ocorre com a figura do satélite.

Em primeiro lugar, pelo fato de a nova órbita ser inclinada, há um movimento vertical (isto é, em declinação) do satélite. Esse movimento se processa quase entre +20° e -20° (o “quase” é por conta dos efeitos de paralaxe discutidos na questão anterior). Além disso, há também um movimento em ângulo horário, isto é, paralelo ao equador. A razão dele todos estão carecas de saber: a projeção da sua velocidade orbital no equador não é constante e isso é culpa da inclinação. Essa projeção é às vezes um pouco maior e outras vezes um pouco menor que a velocidade geoestacionária (chamaremos de V_G).

Para esclarecer, vamos fazer um desenho:



Do lado esquerdo, marcamos quatro pontos especiais de um analema (a figura completa, em uma versão tosca, pode ser vista abiaxo): os dois do cruzamento e os dois do topo. Do lado direito, as posições 1 e 2 na Esfera Celeste, com a órbita equatorial original e a versão inclinada.

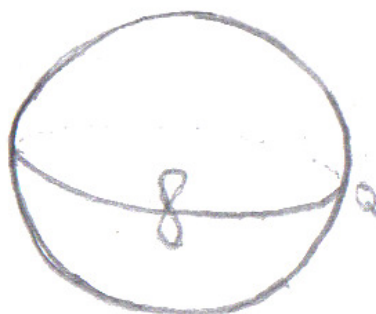
Nas situações 1 e 3 (cruzando o equador), a velocidade em ângulo horário é V_G multiplicado por $\cos 20^{\circ}$ (isto é, projetado no equador), que é menor que V_G . Assim, nesses pontos o satélite está atrasando, indo para trás. Pela simetria da órbita, é fácil ver que os pontos 1 e 3 coincidem.

Na situação 2 (altura máxima), a velocidade orbital é paralela ao equador, mas acontece em um círculo menor de ângulo horário. Assim, a velocidade angular no sentido do



ângulo horário é maior que V_G , então neste ponto o satélite está adiantando, indo para frente. A situação 4 é idêntica, mas com altura máxima para o outro lado. Novamente pela simetria das situações, é fácil ver que os pontos 2 e 4 situam-se na mesma “linha vertical” que os pontos 1 e 3.

Assim, seguindo as direções das setinhas e ligando os pontos, encontramos nosso 8 simétrico que responde à questão homônima!



9. Esta questão teve muitos acertos, mas muitos erros básicos também. Ela testava noções básicas de óptica e funcionamento de telescópios.

Dos erros, os que podemos citar como mais comuns foram:

- A fita isolante taparia parte da imagem do aglomerado;
- A fita provocaria distorções na imagem;
- O brilho iria aumentar quando tampássemos parte do telescópio. Essa interpretação é particularmente sem noção; se fosse assim, os astrônomos construiriam lentes enormes e tampariam ela quase inteira para obter melhores imagens.

Assim como não vemos o espelho secundário ou a aranha de um telescópio refletor, não veremos a fita isolante tampando parte da objetiva do telescópio. Isso acontece porque, quando preparamos um telescópio para uma observação, focalizamos para raios de luz que cheguem paralelos, vindo de objetos no infinito (é o caso das nebulosas, mas também de quaisquer objetos astronômicos). Assim, objetos próximos à lente objetiva ficarão tão desfocados na imagem que não serão visíveis. Por isso não poderemos ver nem a fita, nem pequenas imperfeições, sujeira ou insetos na lente.

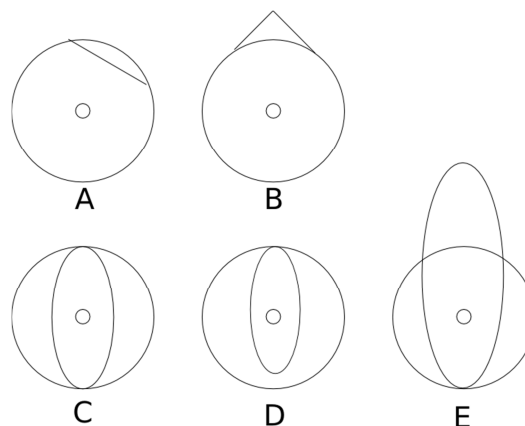
A fita também não implicará em impossibilidade de ver alguma parte do aglomerado. O campo de visão que você possuía antes de colocar a fita será o mesmo depois, isso porque a parte aberta do telescópio ainda é capaz de captar luz de todo o aglomerado e formar a imagem (afinal, os raios vêm paralelos).

Um efeito que pode surgir é o de redução do brilho do aglomerado. Como teremos apenas metade da área coletora de luz, conseguiremos coletar apenas metade da luz anterior, assim a magnitude do aglomerado deverá aumentar um pouco. Um outro efeito que isso pode gerar é que com a redução do brilho, poderá haver o “sumiço” das estrelas menos brilhantes do aglomerado.



Você pode testar facilmente essa questão com um telescópio: aponte-o para algum objeto interessante e observe-o enquanto algum amigo seu tenta tampar a objetiva com as mãos. O que você percebe é incrivelmente nada. Eu já testei e aprovo! =)

10. **a+b.** Há inúmeras respostas para essa questão, algumas melhores do que outras. Em primeiro lugar, o caminho desenhado deveria ser um caminho que pode existir. Veja os desenhos abaixo para alguns exemplos impossíveis:



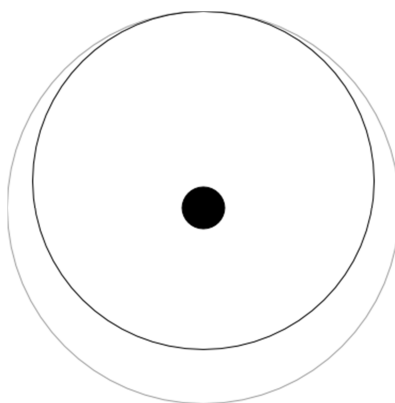
- A. Movimentos gravitacionais não são movimentos livres. Quando você aponta para uma direção, não há a possibilidade de você seguir até ela em linha reta (a menos que você fique com o motor ligado o tempo todo em potencia máxima), porque existe a força gravitacional, que “molda” todas as trajetórias. Além disso, o galão já está em movimento, tanto quanto você.
- B. Mesmo problema da A, mas em uma versão quebrada e mais longa.
- C. Uma forma resumida de explicar como a gravidade molda as trajetórias são as Leis de Kepler. A Primeira Lei de Kepler diz que as órbitas são elipses tendo o centro de gravidade *em um dos focos*, não no centro da elipse. A incidência desse tipo de desenho foi particularmente grande.
- D. Se a órbita completa fica no interior daquele círculo, então o ponto de tangência ao círculo é o apogeu, o ponto mais distante da Terra. Mas se for assim, o ponto mais próximo (perigeu) tem que estar oposto; essa é uma propriedade geométrica elementar das elipses. Os pontos laterais, entretanto, aparecem muito mais próximos do centro de gravidade, no desenho.
- E. Aqui o problema é similar. Se o apogeu está oposto ao ponto de tangência, o mesmo deve ser o perigeu. Se assim é, então os demais pontos da órbita devem estar mais distantes do centro de gravidade que o ponto de tangência. Em outras palavras, a órbita precisa ser totalmente externa ao círculo.

Houve ainda outros desenhos mais estranhos, com órbitas se cruzando multiplamente. Uma propriedade matemática importante das órbitas: se duas órbitas se cruzam em três ou mais pontos, elas são idênticas. Se duas órbitas se tocam em dois pontos e são tangentes em um desses pontos, elas também são idênticas. Assim, órbitas diferentes só podem se tangenciar em um ponto ou se encontrarem, cruzando, em dois. Os exemplos de A a E não respeitam essa regra.



A partir daí, havia algumas soluções razoáveis. Poder-se-ia, por exemplo, fazer uma órbita mais excêntrica que interceptasse o galão, mais ou menos como um lançamento oblíquo. Outra possibilidade é dar um impulso de $2v$ para trás, fazendo a nave se mover na mesma órbita mas no sentido oposto. Embora ninguém as tenha explorado completamente, são possibilidades. Mas uma estratégia mais razoável envolve se aproximar do galão com velocidade relativa próxima de zero; afinal, nossos heróis pretendem beber a água do galão, não atropelá-lo (imagine-se atingindo um galão de água frontalmente a 15 km/s).

Embora essa restrição possa parecer complicar o problema, ela direciona nossa atenção para as soluções mais simples e mais eficientes. A primeira delas é a que aparece na figura abaixo:



Ela consiste em frear um pouco a nave (isto é, dar um impulso com $\theta = 180^\circ$), fazendo-a descer para uma órbita mais excêntrica e com raio médio menor, mas tangente à órbita original no ponto do impulso (afinal, as elipses são curvas fechadas). A órbita menor tem também um período menor; assim, podemos calcular qual a órbita correta para que uma volta dela corresponda exatamente ao tempo para o galão quase-completar uma volta e atingir o ponto de tangência (no caso do nosso problema, percorrer 290°). Infelizmente, com os dados do nosso problema, o perigeu dessa órbita é menor que o raio da Terra.

Mas podemos fazer uma versão generalizada dela: em vez de ganhar os 70° do galão na primeira volta, podemos fazer uma órbita não tão baixa, que ganhe apenas 35° na primeira volta e mais 35 na segunda, alcançando o galão em duas voltas. Ou, de forma mais geral, podemos calcular os parâmetros para a situação em que, quando a nave percorre n voltas, o galão percorre $(n \cdot 360 - \phi)$ graus, encontrando-se com a nave.

Seja T_n o período da nave nesta nova órbita na estratégia com n voltas, e T_g o período da órbita original (a do galão). A relação que queremos é que:

$$nT_n = \left(n - \frac{\phi}{360}\right) T_g$$

Para achar o semi-eixo maior da nova órbita, podemos combinar essa condição com a Terceira Lei de Kepler:

$$T_n = T_g \sqrt{\frac{a^3}{R_0^3}}$$



Com isso, obtemos:

$$a = R_0 \left(1 - \frac{\phi}{n360^\circ} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Agora precisamos calcular o perigeu dessas órbitas para saber quais valores de n são possíveis:

$$\begin{aligned} R_0 &= a(1 + e) \\ e &= \frac{R_0}{a} - 1 \\ r_m &= 2a - R_0 > R_{Terra} \end{aligned}$$

Com essa relação, vemos que a nave não bate na Terra a partir da solução de 5 voltas, caso em que a altura mínima, em relação à superfície terrestre, é 47km. Essa altura é dentro da atmosfera (ver questão 2); logo o valor mínimo de voltas é 6, com altura de 106km. Nesse caso, sabendo que o período do galão é $T_g = 92m26s$, podemos calcular T_6 e, assim, calcular o tempo até o encontro:

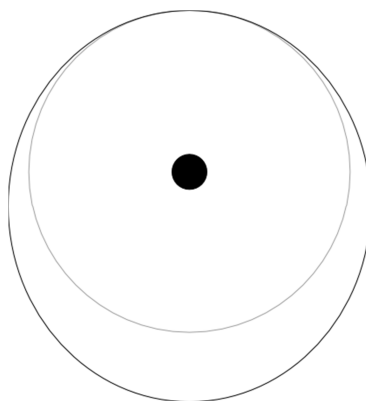
$$T_{enc} = 6 T_6 = 8h57m < 10h$$

Para essa órbita, o burst (mudando de velocidade circular para a velocidade de apogeu da nova órbita) precisa ser apenas de:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \left(1 - \sqrt{2 - \frac{R_0}{a}} \right)$$

$$\Delta v = 85 \text{ m/s}$$

A outra solução envolve acelerar a nave, em vez de freá-la (caso $\theta = 0^\circ$):



Nesse caso, a nova órbita tem um período orbital maior que o galão. No caso simples, o período novo deve ser igual ao tempo para o galão percorrer os 290° mais uma volta completa. No caso geral, a relação é:

$$n T_n = \left(n + 1 - \frac{\phi}{360^\circ} \right) T_g$$

$$a = R_0 \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{\phi}{n360^\circ} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Como não há a preocupação com bater na Terra, podemos escolher $n=1$. Com isso:

$$T_1 = 2h47m$$



E o burst fica:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \left(\sqrt{2 - \frac{R_0}{a}} - 1 \right)$$

$$\Delta v = 1160 \text{ m/s}$$

Para 5 voltas por fora ($T=8\text{h}57\text{m}$), o $\Delta v = 355 \text{ m/s}$. Logo, caso os heróis tenham pouco combustível, a melhor solução é a de 6 voltas para o caso $\theta = 180^\circ$, caso eles tivessem pressa, a melhor solução é a de 1 volta para o caso $\theta = 0^\circ$.

QUESTÕES LONGAS

11. Houve poucos astrônomos românticos entre os que fizeram a prova. A questão testava visão espacial e relações básicas de fluxo e luminosidade. Pelo menos para os três primeiros itens, cada item contava aproximadamente como uma questão curta.

- a. Calcular o fluxo luminoso da Lua pode ser algo meio complicado, mas normalmente utiliza-se um modelo simplificado que funciona bem para a Lua nas fases cheia, quarto crescente e quarto minguante. Em situações intermediárias o modelo é falho. A hipótese mais forte desse modelo é: toda a luz que a Lua recebe é refletida, espalhando-se por meia casca esférica.

Conforme exemplificado nas *Sete Regras de Buda*, Esse problema pode ser mais facilmente compreendido se seguirmos cada passo de uma vez. Em primeiro lugar, precisamos saber o fluxo de luz solar na região da Terra e da Lua, que é:

$$F_{Sol} = \frac{L_{Sol}}{4\pi d_{SL}^2}$$

onde L_{Sol} é a luminosidade solar que consta na tabela e d_{SL} é a distância Sol-Lua, que aqui pode ser considerada igual à distância Sol-Terra.

A partir desse fluxo, podemos encontrar a quantidade de luz recebida e refletida pela Lua. Vale lembrar que a área que captará a luz não é metade da superfície da Lua, pois em diferentes partes da Lua os raios solares chegam com uma inclinação diferente e, como veremos no item c, a inclinação dos raios luminosos muda o fluxo na superfície. Uma maneira de driblar isso é tomando as “componentes ortogonais” da superfície em cada ponto. Assim, o que consideraremos é uma seção reta da Lua, ortogonal aos raios luminosos e passando pelo centro da mesma (isto é, com raio R_L):

$$L_{Lua} = F_{Sol} \cdot \pi R_L^2 \cdot a$$

Então os raios se espalham por uma semi-casca esférica (não uma casca inteira), atingindo a Terra. Para o fluxo zenital, não precisamos dar conta de efeitos de inclinação, logo o fluxo será:

$$F_{Lua} = \frac{L_{Lua}}{2\pi d_{TL}^2}$$



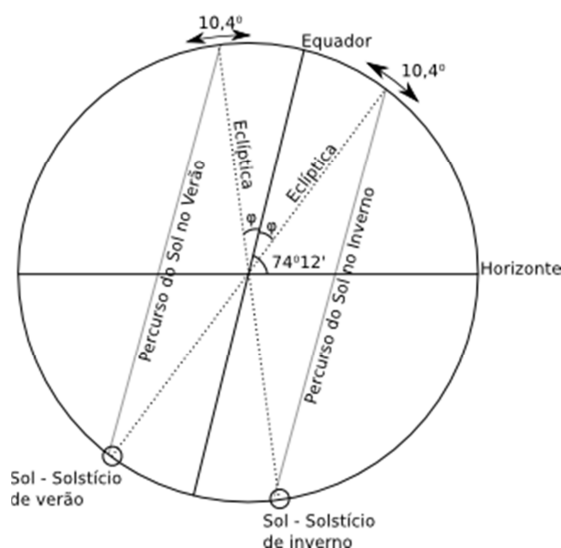
Ou, substituindo tudo:

$$F_{Lua} = \frac{L_{Sol} \cdot R_L^2 \cdot a}{8\pi \cdot d_{TL}^2 \cdot d_{SL}^2}$$

Substituindo os dados da prova, encontramos $F_{Lua} = 1,906 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$

b. Para fazer este item, era necessário compreender três coisas de astronomia de posição:

- A posição das estrelas e do Equador Celeste para observadores de diferentes latitudes;
- O movimento do Sol para diferentes observadores, sendo sempre paralelo ao Equador mas, ao longo de um ano, acumulando diferenças que perfazem um círculo inclinado em 23 graus, a eclíptica;
- Perceber que, na Lua Cheia, a Lua deve ficar oposta ao Sol no céu. Como ambos os astros estão “presos” na região da eclíptica, isso significa ficar ao sul quando o Sol está ao norte e vice-versa. Veja o desenho abaixo:



Como a Lua pode se afastar até $5,2^\circ$ da eclíptica, ela, quando Cheia, pode ocupar, nos solstícios de verão ou de inverno, as posições dadas pelas setinhas pretas no topo do desenho. Em Brasília, o Equador Celeste possui uma obliquidade de $74^\circ 12'$ em relação ao horizonte ($90^\circ - 15^\circ 48'$).

Então, para calcular a altura da Lua Cheia no verão, devemos levar em conta que, na estação como um todo, a Lua Cheia estará em sua altura máxima quando o Sol estiver no Equinócio de Primavera (no dia anterior, para ser mais preciso):

$$h_v = 74^\circ 12' + 5^\circ 12' = 79^\circ 24'$$

Outra resposta, menos precisa mas mais representativa, é calcular a altura típica máxima que a Lua pode ter para o Solstício de Verão, assim teríamos:

$$h_{sols-v} = 74^\circ 12' - 23^\circ 30' + 5^\circ 12' = 55^\circ 24'$$



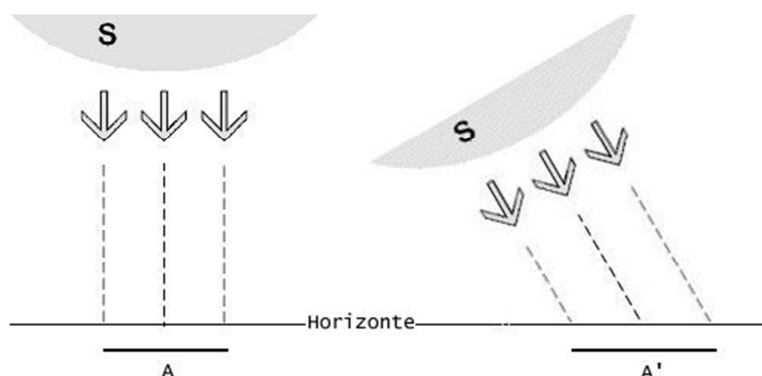
Para o inverno, o ângulo entre a Eclíptica e o Horizonte para a meia noite do Solstício é maior que 90° (em relação à direção norte, tomada como referência para o ângulo entre o Equador e o Horizonte), assim a região em que será possível observar a Lua Cheia e o Equinócio de Outono passa pelo Zênite entre o Solstício, logo a altura máxima em que a Lua será visível é no Zênite, caso em que $h_i = 90^\circ$

A solução representativa aqui é a do Solstício de Inverno, somando o ângulo formado entre a Eclíptica e o Horizonte no Solstício de Inverno com a obliquidade da órbita da Lua. Assim teríamos:

$$h_{sols-i} = 180^\circ - 74^\circ 12' - 23^\circ 30' + 5^\circ 12' = 87^\circ 30'$$

Algumas pessoas erraram essa parte pois encontraram uma altura maior que 90° , porém essa altura era impossível, já que o maior valor que essa coordenada pode receber é 90° . O valor que essas pessoas encontraram não foi a altura, mas o ângulo que a órbita da Lua fazia com o Horizonte, no lado Norte da interseção. Outras pessoas trocaram as posições do Sol no Verão e no Inverno, ou simplesmente inverteram (quando a altura do Sol era maior, como no verão, a altura da Lua também era maior).

- c. Como as alturas são diferentes, as iluminações são diferentes. Imagine o seguinte: quando iluminamos uma parede com uma lanterna, se a lanterna estiver perpendicular à parede a iluminação será máxima; mas se inclinarmos a lanterna, a mesma quantidade de luz se espalha por uma região maior, fazendo com que o fluxo torne-se menor. O mesmo fenômeno vale para objetos astronômicos. Veja a figura abaixo:



Assim, para um astro com inclinação θ , teremos:

$$A' = \frac{A}{\sin \theta}$$

Como $F' = \frac{F}{A'}$ então $F' \propto F \cdot \sin \theta$

Logo

$$\frac{F'_i}{F'_v} = \frac{F_{Lua} \cdot \sin h_i}{F_{Lua} \cdot \sin h_v} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 79^\circ 24'} = 1,01736$$

ou

$$\frac{F'_{sols-i}}{F'_{sols-v}} = \frac{F_{Lua} \cdot \sin h_{sols-i}}{F_{Lua} \cdot \sin h_{sols-v}} = \frac{\sin 87^\circ 30'}{\sin 55^\circ 24'} = 1,2051$$

Assim a iluminação da Lua é 1,01736 (ou 1,2051) mais brilhante no inverno que no verão.



- d. Tomando um caso genérico:

$$F_{Lamp} = \frac{60}{4\pi d^2} = F_{Lua} \cdot \sin h$$

$$d = \sqrt{\frac{60}{4\pi F_{Lua} \sin h}}$$

Usando os calculos anteriores, encontramos

$$d_i = \sqrt{\frac{60}{4\pi \times 1,906 \times \sin 90^\circ}} \approx 50 \text{ m}$$

$$d_v = \sqrt{\frac{60}{4\pi \times 1,906 \times \sin 79^\circ 24'}} \approx 51 \text{ m}$$

12. Esse é um estilo de questão comum em algumas olimpíadas (como a IphO) e em alguns cursos universitários. A ideia é se deparar com um problema científico sério / relevante, e a solução para o problema (que geralmente envolve criar algum modelo) ir sendo construída ao longo dos itens da questão. Como o modelo deve ser não-trivial, normalmente trata-se de vários itens.

Embora poucos tenham chegado até essa parte da prova, recomendamos tentarem fazer novamente a questão e, depois disso, estudarem o gabarito.

- a. Um calendário precisa ter várias adaptações para ser razoável para os negócios humanos. Uma exigência bastante razoável é que períodos grandes de contagem (semana, mês, ano, etc.) possuam um número inteiro de dias, mesmo que isso não corresponda a alguns interesses do calendário (p. ex. deixe a época de plantio se deslocar do calendário). Uma solução possível é a que usamos, dos anos bissextos: a cada 4, 100 e 400 anos fazemos correções de um dia, de forma a acertar as coisas. Somando as correções, a ideia é chegarmos tão próximo quanto possível do ano trópico.
- b. A diferença entre os anos trópico e anomalístico faz com que o periélio ocorra em diferentes estações com o passar dos anos. A cada ano trópico, o periélio ocorre $365,2596 - 365,2422 = 0,0174$ dias à frente. O solstício de verão do hemisfério sul ocorre por volta de 22 de dezembro, cerca de 350 dias depois do periélio atual. Ele coincidirá com o periélio portanto daqui a cerca de

$$\frac{350 \text{ dias}}{0,0174 \text{ dias/ano}} \approx 20\,000 \text{ anos}$$



- c. Basta descontar os múltiplos inteiros de 365,2596. Assim, temos

$$\begin{aligned}5845,96 - 16 \times 365,2596 &\approx 1,81 \\6213,58 - 17 \times 365,2596 &\approx 4,17 \\6577,25 - 18 \times 365,2596 &\approx 2,58 \\6942,21 - 19 \times 365,2596 &\approx 2,28 \\7309,33 - 20 \times 365,2596 &\approx 4,14\end{aligned}$$

- d. É importante atentar para o que significa variação. Queremos saber, no máximo, quanto a data do periélio varia em relação ao calendário de Rá. Nos dados da tabela, observamos que a data máxima é 4,29, e a mínima 1,74 – ou seja, uma variação de 2,55 dias. Essa é a maior variação num intervalo de 20 anos. Sabemos então que a variação máxima em todos os tempos é, pelo menos, 2,55 dias; portanto essa é uma estimativa inferior. Vale lembrar ainda que essas variações não são supostamente aleatórios; nosso modelo visa justamente encontrar causas determinísticas para eles. Assim, não é razoável tratá-los estatisticamente, calculando p. ex. desvio-padrão.

- e. Sejam m_T a massa da Terra, m_L a massa da Lua, r_T a distância da Terra ao centro de massa do sistema, e r_L a da Lua ao centro de massa do sistema. Temos portanto:

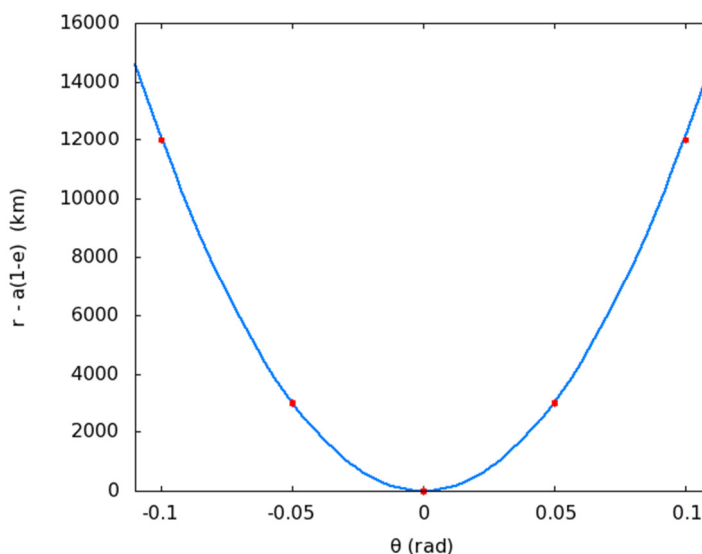
$$\frac{r_T}{r_L} = \frac{m_T}{m_L}$$

Substituindo $m_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $m_L = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ e considerando $r_L = 384\,000 \text{ km}$, encontramos $r_T = 4,73 \cdot 10^3 \text{ km}$, que ainda está dentro da Terra, mas obviamente não em seu centro. Isso significa que o centro da Terra possui um movimento orbital com raio r_T em torno do centro de massa do sistema, ainda que esse movimento aconteça “dentro” da Terra.

- f. Substituindo e calculando, obtemos:

$$\begin{aligned}\theta &= 0,00 \text{ rad} \Rightarrow r = a(1 - \epsilon) = 1,4710 \cdot 10^8 \text{ km} \\ \theta &= \pm 0,05 \text{ rad} \Rightarrow r = 1,4710 \cdot 10^8 + 3020 \text{ km} \\ \theta &= \pm 0,10 \text{ rad} \Rightarrow r = 1,4710 \cdot 10^8 + 12017 \text{ km}\end{aligned}$$

- g. No gráfico abaixo estão plotados os dados do item anterior. O gráfico pode ser muito bem aproximado por uma parábola.





A órbita da Terra em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua contribui com uma variação de até $2 \cdot 4,73 \cdot 10^3 = 9,46 \cdot 10^3 \text{ km}$ na distância do centro da Terra ao centro do Sol. Com isso, podemos estabelecer um limite teórico simples para a variação da data do periélio.

Interpolando os dados, gráfica ou analiticamente, concluímos que a distância do centro Terra ao Sol equivale a esse máximo de $a(1 + \epsilon) + 9,46 \cdot 10^3 \text{ km}$ quando $\theta = \pm \theta_0 = \pm 0,088 \text{ rad}$.

Para converter esse resultado para tempo em dias, lembramos da *Segunda Lei de Kepler*. Como r varia pouco nesse intervalo, a área varrida pelo segmento Sol-Terra pode ser aproximada pela de um setor circular de ângulo $2\theta_0$ e raio $r = a(1 - \epsilon)$. A área da elipse é dada por $\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}$. A duração do intervalo máximo de variação do periélio é, portanto,

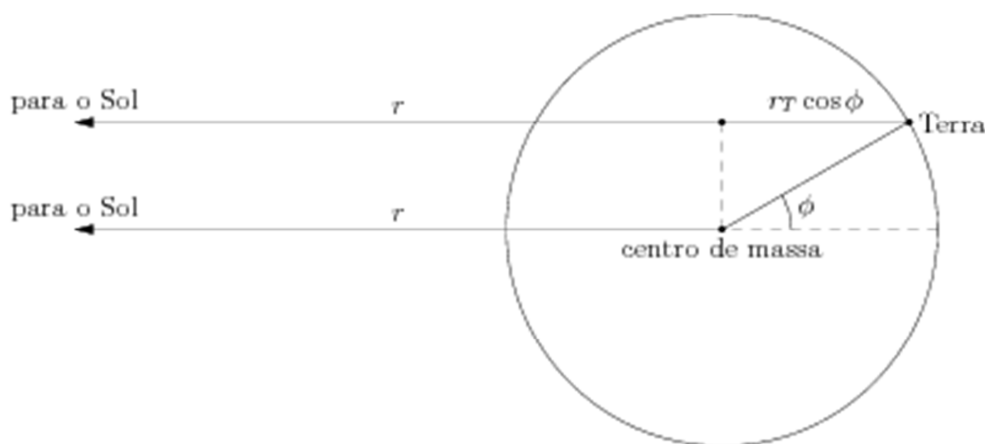
$$\frac{r^2 \theta_0}{\pi ab} \cdot 365,2596 = \frac{(1 - \epsilon)^2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \cdot \frac{\theta_0}{\pi} \cdot 365,2596 = 9,95 \text{ dias}$$

- h. Como comentamos, o valor encontrado no item g é um limite superior. Nesse sentido, ele é coerente com o limite inferior medido da tabela. Por outro lado, ele largamente superestima a variação na data do periélio. A principal razão para isso é que estamos ignorando a natureza do movimento da Terra em torno do centro de massa Terra-Lua.

Para a variação da data do periélio se aproximar do limite teórico imposto no item anterior, a Lua deveria estar nova em $\theta = 0$ e passar a cheia em $\theta = \theta_0$, de um modo bem particular. Isso já é absurdo porque a Lua deveria ter um período sinódico de 9,95 dias, bem menos do que os 29,53 dias do mês sinódico médio.

Para melhorar essa previsão, estudaremos com mais atenção como a órbita da Terra em torno do centro de massa Terra-Lua contribui com sua distância ao Sol ao longo do tempo. Ainda consideraremos essa órbita circular e contida no plano da eclíptica.

A figura abaixo mostra que a contribuição da órbita da Terra em torno do centro de massa para sua distância ao Sol, em um determinado instante, é $r_T \cos \phi$, onde ϕ é um ângulo correspondente à fase da Lua, e que portanto varia com o tempo de forma aproximadamente uniforme e completa um ciclo a cada mês sinódico.





Escrevemos a distância da Terra ao Sol como

$$y(\theta) = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta} + r_T \cos (\kappa\theta + \phi_0)$$

onde κ é a razão entre as taxas de variação de ϕ e de θ , e ϕ_0 é um ângulo qualquer que corresponde à fase da Lua em $\theta = 0$.

A partir daqui, nossa solução bifurca em duas:

1. Solução pelo modelo (precisa de cálculo!)

Procuramos o valor de θ para o qual essa função atinge um mínimo local. Uma condição necessária para tal é que sua derivada seja nula. Calculamos pois

$$y'(\theta) = \frac{a\epsilon(1 - \epsilon^2)}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \sin \theta - \kappa r_T \sin (\kappa\theta + \phi_0)$$

Rearranjando a equação $y'(\theta) = 0$, obtemos

$$\sin \theta = \frac{\kappa r_T (1 + \epsilon \cos \theta)^2}{a\epsilon(1 - \epsilon^2)} \sin (\kappa\theta + \phi_0)$$

Esta equação pode parecer complicada, mas não precisamos resolvê-la para encontrar a informação procurada.

Com efeito, da simples observação de que $\cos \theta \leq 1$ e $|\sin (\kappa\theta + \phi_0)| \leq 1$, segue que

$$|\theta| \approx \sin \theta \leq \frac{\kappa r_T (1 + \epsilon)^2}{a\epsilon(1 - \epsilon^2)} =: \theta_{max}$$

Exercício: para que valor de ϕ_0 , $\theta \approx \theta_{max}$?

Para converter esse resultado em dias, procedemos como antes, encontrando para a variação máxima da data do periélio em torno de seu valor médio

$$t_{max} = \frac{(1 - \epsilon)^2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \cdot \frac{\theta_{max}}{2\pi} \cdot T_{ano}$$

$$t_{max} = \sqrt{1 - \epsilon^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\kappa r_T}{a\epsilon} T_{ano}$$

onde T_{ano} denota o ano anomalístico.

Para calcular κ , recorremos mais uma vez à Segunda Lei de Kepler para obter

$$\kappa = \frac{(1 - \epsilon)^2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \cdot \frac{T_{ano}}{T_{syn}}$$

onde T_{syn} denota o mês sinódico.



Substituindo, obtemos

$$t_{max} = (1 - \epsilon)^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r_T}{a\epsilon} \cdot \frac{T_{syn}}{T_{ano}}$$

Antes de proceder às contas, observamos que essa fórmula já nos permite tirar conclusões importantes sobre o fenômeno.

Exercício: o que aconteceria à variação da data do periélio se o mês sinódico dobrasse? E se a distância da Terra ao centro de massa Terra–Lua triplicasse? E se a excentricidade da órbita da Terra em torno do Sol caísse pela metade?

Exercício: o que aconteceria à variação da data do periélio se a massa do Sol fosse o dobro da atual? E se a massa da Lua fosse metade da atual? E se a massa da Terra fosse o dobro da atual?

Feitos os exercícios, vamos às contas. Jogando tudo na calculadora, obtemos, para a variação total da data do periélio

$$2t_{max} \approx 2,63 \text{ dias}$$

um valor apenas um pouco acima do experimental de 2,55 dias.

Exercício: como varia ϕ_0 de periélio para periélio?

Exercício: baseado na tabela da questão, encontre as fases da Lua nos periélios de 2007 e de 2011.

2. Solução pelos dados

Não é necessário saber cálculo diferencial para encontrarmos uma solução aproximada (porém precisa) para o problema.

Lembre-se que queremos estimar quando ocorre o periélio para cada fase da Lua (isto é, para cada valor do ângulo ϕ_0). Uma vez estabelecida a data do periélio, ou equivalentemente, o ângulo θ , precisamos achar o maior valor que θ atinge em função de ϕ_0 .

O item 12g indica que $-0,05 \text{ rad} < \theta < 0,5 \text{ rad}$. Para uma primeira aproximação, podemos pegar valores de ϕ_0 em intervalos de 45° , ou $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$. Para os valores de θ , usaremos um intervalo de $0,0025 \text{ rad} \approx 0,14^\circ$, que corresponde à distância angular que a Terra percorre num intervalo de tempo entre 3 e 4 horas.

Na tabela abaixo, feita com um programa de planilha de cálculo (Microsoft Excel, Open Office Calc, etc.) temos a distância da Terra ao Sol para diferentes valores de θ e ϕ_0 em quilômetros, subtraídos de 147.000.000 km para que ela ficasse bem formatada. Assim, por exemplo para $\theta = -0,0500$ e $\phi_0 = \frac{5\pi}{4}$, temos que a distância é $147.000.000 + 100.065 = 147.100.065 \text{ km}$.



θ/ϕ_0	0	$\pi/4$	$2\pi/4$	$3\pi/4$	$4\pi/4$	$5\pi/4$	$6\pi/4$	$7\pi/4$
-0,0500	108.528	109.335	107.427	103.922	100.872	100.065	101.972	105.478
-0,0475	108.316	109.014	107.013	103.484	100.495	99.797	101.798	105.327
-0,0450	108.115	108.704	106.611	103.063	100.137	99.548	101.641	105.190
-0,0425	107.926	108.405	106.222	102.657	99.798	99.319	101.501	105.066
-0,0400	107.748	108.116	105.846	102.268	99.477	99.109	101.379	104.957
-0,0375	107.581	107.839	105.483	101.895	99.176	98.919	101.274	104.862
-0,0350	107.425	107.572	105.133	101.539	98.894	98.748	101.186	104.780
-0,0325	107.281	107.315	104.797	101.200	98.631	98.597	101.115	104.712
-0,0300	107.147	107.070	104.473	100.877	98.388	98.464	101.061	104.658
-0,0275	107.024	106.836	104.163	100.571	98.163	98.351	101.024	104.616
-0,0250	106.912	106.613	103.867	100.282	97.958	98.257	101.003	104.588
-0,0225	106.810	106.401	103.584	100.010	97.773	98.182	100.999	104.573
-0,0200	106.720	106.200	103.315	99.756	97.607	98.127	101.011	104.571
-0,0175	106.640	106.010	103.060	99.519	97.460	98.090	101.040	104.581
-0,0150	106.571	105.832	102.820	99.299	97.333	98.072	101.084	104.604
-0,0125	106.513	105.665	102.593	99.097	97.225	98.073	101.144	104.640
-0,0100	106.465	105.509	102.381	98.913	97.137	98.092	101.220	104.688
-0,0075	106.428	105.365	102.184	98.747	97.068	98.131	101.312	104.749
-0,0050	106.401	105.233	102.001	98.599	97.019	98.188	101.419	104.822
-0,0025	106.385	105.112	101.833	98.469	96.990	98.263	101.542	104.907
0,0000	106.380	105.003	101.680	98.357	96.980	98.357	101.680	105.003
0,0025	106.385	104.907	101.542	98.263	96.990	98.469	101.833	105.112
0,0050	106.401	104.822	101.419	98.188	97.019	98.599	102.001	105.233
0,0075	106.428	104.749	101.312	98.131	97.068	98.747	102.184	105.365
0,0100	106.465	104.688	101.220	98.092	97.137	98.913	102.381	105.509
0,0125	106.513	104.640	101.144	98.073	97.225	99.097	102.593	105.665
0,0150	106.571	104.604	101.084	98.072	97.333	99.299	102.820	105.832
0,0175	106.640	104.581	101.040	98.090	97.460	99.519	103.060	106.010
0,0200	106.720	104.571	101.011	98.127	97.607	99.756	103.315	106.200
0,0225	106.810	104.573	100.999	98.182	97.773	100.010	103.584	106.401
0,0250	106.912	104.588	101.003	98.257	97.958	100.282	103.867	106.613
0,0275	107.024	104.616	101.024	98.351	98.163	100.571	104.163	106.836
0,0300	107.147	104.658	101.061	98.464	98.388	100.877	104.473	107.070
0,0325	107.281	104.712	101.115	98.597	98.631	101.200	104.797	107.315
0,0350	107.425	104.780	101.186	98.748	98.894	101.539	105.133	107.572
0,0375	107.581	104.862	101.274	98.919	99.176	101.895	105.483	107.839
0,0400	107.748	104.957	101.379	99.109	99.477	102.268	105.846	108.116
0,0425	107.926	105.066	101.501	99.319	99.798	102.657	106.222	108.405
0,0450	108.115	105.190	101.641	99.548	100.137	103.063	106.611	108.704
0,0475	108.316	105.327	101.798	99.797	100.495	103.484	107.013	109.014
0,0500	108.528	105.478	101.972	100.065	100.872	103.922	107.427	109.335

Em negrito temos a distância no periélio. Vemos que os extremos acontecem quando $\phi_0 = \frac{2\pi}{4}$ e $\frac{6\pi}{4}$, onde $\theta = 0,0225 = \theta_{max}$. A variação da data do periélio pode ser então aproximada para $t_{max} = 365 \cdot 2\theta_{max}/2\pi = 2,6$ dias. Consideramos aqui que a velocidade angular da Terra era constante, mas podemos refinar esse cálculo considerando a velocidade dela no periélio (vide o outro método de solução).



Observamos ainda que esta é uma estimativa inferior mas bem mais próxima do valor encontrado experimentalmente.

Obviamente não esperavamos que você fizesse a tabela acima durante a prova; o mais importante era refletir sobre como a Lua influencia a órbita da Terra ao redor do Sol.

13. Obviamente, havia infinitos desenhos possíveis; muitos dos que vimos eram interessantes, bem feitos e originais. Alguns desenhos que gostaríamos de ter feito são as tirinhas do xkcd envolvendo o universo, em especial:

xkcd.com/482 - altura do universo em log scale

xkcd.com/224 - linguagem em que o universo foi escrito

xkcd.com/505 - universo de pedras

xkcd.com/847 - não confie nas estrelas.

Mas nossa solução final segue abaixo.

